G

RE

TABLES

T

ILLUS

Arp

NOUVEAU TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE
ET DE
TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,
SUIVI DU TOISÉ
DES SURFACES ET DES VOLUMES

ET ACCOMPAGNÉ DE

TABLES DE LOGARITHMES DES NOMBRES ET SINUS, ETC., NATURELS
ET LOGARITHMIQUES ET D'AUTRES TABLES UTILES.

OUVRAGE

THÉORIQUE ET PRATIQUE

ILLUSTRÉ DE PLUS DE 600 VIGNETTES, AVEC UN GRAND NOMBRE
D'EXEMPLES ET DE PROBLÈMES

A L'USAGE DES

Arpenteurs, Architectes, Ingénieurs, Professeurs et Élèves, Etc.

PAR

CHS. BAILLAIRGÉ,

QUÉBEC:
C. DARVEAU, IMPRIMEUR-ÉDITEUR,
8, Rue La Montagne, Basse-Ville.

1866

PRÉFACE

OU

INTRODUCTION.

Euclide qui écrivait, il y a deux mille ans, pouvait dévouer comme il l'a fait, aux seuls éléments de la géométrie, un volume tout entier de propositions abstraites ; et les élèves d'alors, peu occupés de tant d'autres sciences qui étaient à cette époque, ou inconnues, ou seulement dans leur enfance, mais qui de nos jours ont pris tant de développement, pouvaient sacrifier à l'étude de ces éléments un temps beaucoup plus considérable qu'on ne saurait le faire aujourd'hui.

Fort de cette pensée, l'auteur de ce traité s'est appliqué à une étude spéciale de l'œuvre de l'ancien Géomètre, dans le but d'abréger autant que possible et de rendre plus concis l'ensemble des propositions qui la constituent.

C'est ainsi qu'on a réduit de plus de moitié les deux cents et quelques propositions des six premiers livres de l'auteur Grec, dans l'édition qu'en a donnée Playfair ; mais sans y comprendre cependant le cinquième livre qu'on a entièrement éliminé ou séparé des cinq autres, pour en mettre au nombre des principes(c.-à-d., où il convient, croyons-nous) les théorèmes les plus importants et indispensables.

Il serait évidemment par trop long de détailler ici tout le procédé suivi pour fondre les propositions afin d'en diminuer le nombre ou pour mieux dire, l'étendue ; et d'ailleurs quelques exemples suffiront pour faire juger du travail tout entier.

On ne nous fera assurément pas une faute d'avoir mis tout d'abord au nombre (**220** et **221** *) des postulats ou demandes, les 2nde. et 3ème. propositions du 1*er. livre d'Euclide.* De la 22ème. prop. on a fait (**222**) la 1ère, après avoir tiré des définitions mêmes les conclusions nécessaires à sa

(*) Les chiffres noirs renvoyent aux propositions de cet ouvrage ; les autres, aux propositions d'Euclide.

solution, et de cette manière la 1ère. prop. d'Euclide s'est réduite (**223**) à une simple conséquence de la 22ème. Aidé des carollaires tirés (**122** et **123**) de la définition (**121**) d'un angle, on a pu déduire des définitions qui y ont trait, les propositions 13, 14, 15, 20, 27, 28, etc. Pourquoi ne ferait on pas (**143**) de la 30ème. prop. un simple axiome? Les axiomes (**76**) et (**77**) nous en donnent bien le droit (**144**). Des 33ème. et 34ème. d'Euclide nous n'avons fait qu'une prop. Nous en avons agi de même (**284**) à l'égard des prop. 35 et 36; car Euclide lui-même qui dans ses 4ème. et 8ème., par exemple, superpose les figures les unes aux autres afin d'en démontrer l'égalité, aurait pu de même superposer l'une à l'autre les bases égales de ses parallélogrammes pour les regarder ensuite comme une seule et même base; ce qui eût permis de faire de la seconde de ces deux prop. une conséquence directe de la première. On a réduit et pour cause (**286**) à un simple corollaire les deux propositions suivantes, les 37ème. et 38ème.; et ainsi de suite.

Pour ce qui est du 2*ème. livre d'Euclide* qu'on a aussi quelque peu condensé, l'on y a ajouté (**366**) un lemme qui fera comprendre (**369**) toute l'importance de la cinquième prop. de ce *livre* dans la solution de plusieurs problèmes d'une très grande utilité pratique, savoir: (**373**), (**375**), (**376**), (**591**), etc. Des propositions 9 et 10 l'on a donné (**385**) (**387**) des démonstrations différentes, plus succinctes et par là même plus faciles à retenir, quoique cependant l'on n'aît fait que peu ou point d'usage de ces théorèmes dans la suite de ce traité.

Passons au 3*ème. livre d'Euclide.* Nous sommes bien de l'avis de Clairaut, que c'est parce que Euclide avait affaire de son temps à des sophistes obstinés qui se faisaient fort de refuser leur assentiment aux vérités les plus évidentes, qu'il trouva nécessaire de prouver, comme il le fait (prop. 2), que "la ligne droite qui relie deux points quelconques dans la circonférence d'un cercle est entièrement dans ce cercle"; et de même il nous paraît qu'il n'est pas indispensable de démontrer la vérité des prop. 23 et 24, rendues évidentes par les propositions (**399**) (**404**). Pourquoi ne pas faire du problème 25 un simple cor. du prob. 1? L'on conçoit sans doute qu'il aît été possible de réduire les quatre prop. suivantes à de simples corollaires d'une prop. plus générale. Une solution différente (**450**) de la 33ème., en réduira les trois cas à un seul; et il en sera de même (**502**) et (**503**) des prop. 35 et 36.

Au 4*ème. livre d'Euclide,* on a fait de la première prop. une conséquence (**255**) de la première de ce traité; on a réduit comme on peut le voir, (**633**) les quatre problèmes 6, 7, 8, 9; et à l'aide d'une proposition

plus générale, on a fait (**641**) (**642**) des problèmes 11, 12, 13 et 14, de simples corollaires ou scolies. Les trois angles ou sommets d'un triangle ne sont que des points, considération qui nous a permis de fondre (**417**) (**420**) la prop. V de ce *livre* avec la prop. B. du dernier.

Dans le 5*ème. livre d'Euclide*, dont on trouvera comme on l'a déjà dit, les conclusions parmi les principes de ce traité, on a fait usage du mot quantité, avec la signification générale qu'on lui donne à l'endroit de l'article (**24**), afin de pouvoir, à l'aide des propositions ayant trait aux rapports et proportions entre deux ou plusieurs quantités quelconques de même espèce, raisonner sur les nombres aussi bien que sur les lignes, les angles, les surfaces et les solides, et en déduire comme on l'a fait dans beaucoup de cas (et par analogie, dans tous les cas) la manière d'arriver à la solution numérique aussi bien que géométrique des divers problèmes de cet ouvrage.

On a réduit à de simples axiomes, plusieurs des propositions de ce *livre*; savoir, les prop. 7, 9, 11, 15 et F qui ont leurs équivalents respectifs dans les paragraphes (**82** et **83**) (**72**) (**75**) (**73**) et (**81**) et pour cause (**71**) (**74**) (**80**). En effet, nous tenons que pour se rendre compte de la vérité d'un axiome, il se fait dans l'esprit un raisonnement plus au moins long. On n'est pas prêt à admettre instantanément que si deux choses, par exemple, sont égales à une troisième, elles sont égales entre elles. Avouons que dans le cas de cet axiome, le premier et le plus évident de tous, le raisonnement mental n'est que de quelques secondes; mais tout court que soit ce raisonnement, il a lieu. Prenons les axiomes suivants d'Euclide. " Si à des quantités égales, on ajoute des quantités égales, les touts seront égaux; et si de quantités égales l'on retranche des quantités égales, les restes seront égaux. Ici le raisonnement est un peu plus long que dans le dernier cas, et si l'on passe aux axiomes suivants où l'on ajoute et retranche des quantités égales et inégales, il faut un procédé de l'esprit encore plus long pour se rendre compte tout d'abord de la proposition, c'est-à-dire pour bien en apprécier l'énoncé, puis, en saisir la vérité. Cela posé, il suffira de pousser l'opération mentale un peu plus loin, mais toujours dans d'étroites limites, pour déduire comme nous l'avons fait, des axiomes ordinaires, les axiomes additionnels de ce traité.

A part les quelques théorèmes dont on a, comme on vient de le dire, fait des axiomes, on en a éliminé un bon nombre, condensé quelques-uns et déduit les autres comme conséquences de ceux qui les précèdent, et d'ailleurs.

Disons enfin, à l'égard du 6ème. *livre d'Euclide*, qu'on ne voit pas trop la nécessité de faire des propositions 14 et 15 des théorèmes séparés, puisque comme on le fait voir (**547**), chaque triangle est moitié de son parallélogramme correspondant et que les moitiés sont comme les touts.

Il est clair aussi que la définition qu'on a donnée (**24**) du mot quantité permet de démontrer (**86** à **89**) les théorèmes 16 et 17 qu'on a d'ailleurs déduits aussi des propositions LV et LVII de ce traité; et pour ce qui est par exemple de la prop. 21 de ce *livre*, il suffira des remarques précédentes pour faire comprendre de suite qu'on a dû en faire un simple axiome ou (**209**) le corollaire d'une définition.

En général l'on s'est attaché à mettre les divers problèmes qui dépendent des éléments, immédiatement en regard, pour ainsi dire, des théorèmes sur lesquels reposent leur solution, et on en a fait de simples scolies ou conséquences découlant de ces propositions; cette mise en regard et juxtaposition ayant l'avantage de rendre la solution d'autant plus facile qu'on a plus frais dans la mémoire les principes applicables à cette solution.

Les démonstrations sont dans un grand nombre de cas différentes de celles d'Euclide; elles sont la plupart plus concises, plus succinctes et plus variées. On a souvent expliqué les problèmes et théorèmes de deux ou plusieurs manières différentes, comme à l'article (**374**) par exemple et à l'endroit des articles (**381**) (**382**) (**489**) (**553**) etc., afin de se mettre autant que possible à la portée des intelligences diverses.

L'on verra d'ailleurs dans le tableau qui va suivre, la mise en regard des propositions qui se correspondent dans ce traité et dans les éléments d'Euclide.

Du théorème additionnel (**589**) on a déduit une règle pour la solution d'un problème (**591**) d'une haute importance pratique dans le partage des terres, et de même on a tiré du cor. (**608**) le moyen de résoudre le problème du par. (**609**).

On a souvent mis en regard de la solution ou construction géométrique d'un problème, sa solution numérique (**570**) (**571**) (**599** sco. **4**) et le Lemme, page 177, permet de comparer dans tous les cas et de traduire les données pour les rendre propres aux opérations auxquelles on désire les soumettre.

De plus, ce qui d'ailleurs était de stricte nécessité pour rendre logiques toutes les conclusions de ce traité, l'ouvrage est suivi et raisonné du commencement à la fin; chaque proposition, comme dans Euclide, ne

dépendant pour sa démonstration ou solution que de celles qui la précèdent et nullement de celles qui viennent après. En effet, référer, comme on le fait à l'endroit de l'article (**288**) aux articles (**513**) (**514**) ne détruit aucunement ce que l'on vient d'affirmer, car ce renvoi équivaut tout simplement à avérer que le problème dont il s'agit se réduit à un autre problème non encore démontré ; et de même (**431**) rien empêche de dire que la surface d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon quoique ce ne soit qu'à l'art. (**670**) qu'on donne le moyen de trouver cette circonférence.

Qu'il y ait des imperfections, et en grand nombre, dans notre manière de traiter le sujet, c'est ce dont nous sommes intimement convaincu, et au moment d'écrire ces mots, nous les connaissons déjà pour la plupart et y porterons remède dans une seconde édition ; mais espérons, qu'on nous tiendra compte de la tâche ardue de sortir d'un sentier battu depuis 2000 ans, par les plus célèbres géomètres, et rendu sacré et historique, pour ainsi dire, par les souvenirs qu'ils nous en ont laissés, pour se frayer une route moins longue, mais toute nouvelle et jonchée d'obstacles aussi insurmontables, dans leur espèce, que le percement de Suez ou des Alpes ou que celle que l'on tente inutilement depuis si longtemps par les mers du nord pour sauver les mois pénibles que requièrent le détour d'un continent.

Pour dire un mot du reste de notre œuvre, espérons que l'Elève nous saura gré de l'avoir souvent pris par la main pour le conduire au but désiré, d'avoir pour ainsi dire pensé tout haut avec lui, de nous être mis à sa place, d'être descendu à la portée de sa jeune intelligence pour lui rendre facile et agréable la solution de tant de problèmes dont on se contente d'ordinaire d'indiquer la route à suivre, sans sarrêter un instant pour se rendre compte des considérations qui en ont déterminé le choix, comme on le fait à l'endroit de la proposition LX de ce traité ; de même, en (**709**) (**712**) (**724**) (**725**) (**754** et **755**), plus particulièrement au prob. de l'article (**760**) **761**) (**762**), encore aux problèmes (**764**) (**765**) (**772**) (**827**) et en général partout où une solution présente quelque difficulté ou ne se présente pas de suite à l'esprit de qui veut en faire l'essai

On a indiqué aussi (**857** à **869**) la relation de la théorie à la pratique dans un grand nombre de problèmes qui au premier abord peuvent paraître de pure fantaisie.

L'élève avant de tenter la solution d'un problème, voudra bien lire le

texte des articles (**852** à **856**) (**871** à **873**) et il profitera aussi sans doute, espérons le, de la lecture de la note de ce dernier article, pour éviter le ridicule que Thorpe a encouru en faisant graver sur l'acier la preuve vivante de sa monstrueuse ignorance, pour l'afficher ensuite aux yeux du public tout entier dans les vitrines du Bureau des Patentes.

Pour les "plans" et "solides," nous en avons agi comme pour les lignes et surfaces dont nous avons fondu les propositions de la manière qu'on a fait voir. La preuve que nous donnons de la prop. 4 du 3ème. livre est analogue à celle dont on se sert d'ordinaire pour démontrer qu'un parallélogramme équivaut à un rectangle de mêmes base et hauteur, et l'on ne saurait, croyons nous, y objecter, puisque cette manière de traiter le sujet a certainement l'avantage d'être fort claire et précise et de s'adapter aux intelligences les plus limitées.

Aux considérations relatives aux solides purement élémentaires, tels que le prisme, le cône droit, le cylindre droit, etc., nous avons ajouté des règles pour les volumes et surfaces des cônes et cylindres obliques, et irréguliers, et des troncs et onglets de ces solides, etc., sans oublier les solides de révolution avec leur application pratique au toisé des voûtes, dômes, etc.

A la Trigonométrie, tant sphérique que rectiligne, on a fait subir des modifications correspondantes à celles qu'on a opérées sur les Eléments de la géométrie, et s'aidant de Saury, l'on a initié l'élève à l'étude des logarithmes d'une manière, croyons nous, à lui en faire apprécier l'utilité et aimer l'usage. Nous nous sommes étendu plus que d'ordinaire sur les affections des côtés et des angles du triangle sphérique, sujet qui nous paraissait n'avoir pas été traité d'une manière à le rendre clair pour qui veut s'occuper de cette étude.

Parsemés dans le texte, l'on rencontrera de nombreux exemples du calcul à faire pour résoudre les divers problèmes qui ont trait à cette partie de l'ouvrage, tant par nombres naturels que par logarithmes, et plusieurs tableaux (voir la table des matières) qui font voir d'un coup d'œil l'ensemble des opérations à faire pour conduire au résultat désiré.

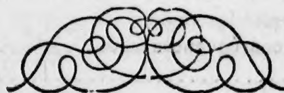
La dernière partie (livre VII) de l'ouvrage est à elle seule un traité complet de toisé théorique et pratique, avec des exemples en grand nombre applicables aux arts et métiers, des règles faciles pour le jaugeage d'un tonneau ou autre vaisseau de forme quelconque, pour le mesurage des bois en grume et des plançons à faux bois ; aussi, quelques considérations sur les poids spécifiques et sur l'usage qu'on peut en faire

pour déterminer les volumes exacts des corps irréguliers, leurs poids par leurs volumes, et les ingrédients divers des corps composés.

Signalons ici à l'attention du Géomètre "l'expression ou règle générale" que nous donnons, page 662, pour déterminer le volume d'un solide élémentaire quelconque, et exprimons l'espoir que cettte seule proposition qui en embrasse tant d'autres, qui réduit pour ainsi dire à une seule et même règle toutes les règles ordinaires si variées qu'elles le soient, pour arriver au volume des divers solides dont il s'agit ici, et qui est par là même facile à retenir et difficile à oublier, sera suffisante pour qu'on ne nous accuse pas d'offrir au public un ouvrage inutile.

Viennent enfin les tables ordinaires de logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques, avec un choix de quelques autres tables dont certaines ont trait à la solution des problèmes de ce traité et les autres d'une très grande utilité pratique pour abréger (voir page 102 des tables) le travail dans bien des cas.

Faisons remarquer en terminant cette préface qu'on s'est constamment étudié à faire dépendre la solution de tout problème du plus petit nombre possible de principes élémentaires, afin que l'élève les puisse retenir constamment dans sa mémoire et au besoin les mettre à profit. Le lecteur aura compris qu'on s'est prévalu dans la rédaction de cet ouvrage des œuvres de Playfair et de Sauri. Avouons aussi que Legendre et Davies nous ont été d'un puissant secours, et rendons hommage au beau talent de notre jeune élève, René Steckel à qui nous devons le théorème (**502**), le théorème (**589**) et par suite la solution du problème (**591**), la solution d'une foule des problèmes (pages 251 à 323) qui ont trait au premier livre de ce traité et notamment les problèmes (**717**), (**741**), (**744**), (**760**), (**763**) et (**844**), avec beaucoup de suggestions utiles dont nous n'avons pas été lent à profiter.



DIVISION GÉNÉRALE DU SUJET.

LIVRE I.

Géométrie des lignes et des surfaces.

LIVRE II.

Des plans et angles solides.

LIVRE III.

Des solides.

LIVRE IV.

Géométrie sphérique.

LIVRE V.

Trigonométrie rectiligne.

LIVRE VI.

Trigonométrie sphérique.

LIVRE VII

Toisé des surfaces et des volumes.

TABLES.

REMARQUE.

Il y a encore plusieurs tables qui sont d'un grande utilité dans la solution d'une foule de problèmes, mais qu'on ne saurait donner ici, sans ajouter trop aux dimensions de cet ouvrage : telles sont les tables où l'on trouve d'un coup d'œil ou par simple inspection et sans la nécessité d'aucun calcul : le diamètre d'un cercle dont on connaît la circonférence, ou la circonférence d'un cercle dont on a le diamètre ; la surface d'un cercle dont la circonférence ou le diamètre nous est connu ; le côté d'un carré égal en surface à un cercle donné ; le carré ou le cube d'un nombre donné, ou la racine carrée ou cubique de tel nombre ; etc., etc. D'ailleurs, ces tables se trouvent partout et on se les procure au besoin à peu de frais.

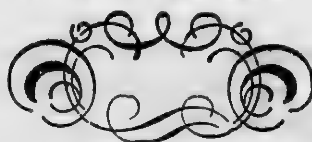


TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS CET OUVRAGE.

LIVRE I.

ÉLEMENTS DE GÉOMÉTRIE.

PRINCIPES.

EXPLICATION DES TERMES ET SIGNES.

PROPOSITIONS.

ET CONSÉQUENCES QUI EN DÉCOULENT.

PROBLÈMES DIVERS SE RAPPORTANT AUX PROPOSITIONS DU PREMIER LIVRE.

LEMME, PAGE 177.

PAGE 232. **APPLICATION**
DES PROPOSITIONS PRÉCÉDENTES
A LA SOLUTION
DE QUELQUES **PROBLÈMES.**
(673) à 850)

relevés des côtés maritines, etc. (715) Les données sont les droites AB, BC, CD, avec les angles ABC, BCD; pour établir à l'aide des angles AEF, AEB et DFE, DFC, la position des points E, F. (716) Trouver par construction graphique la position des points E, F du dernier problème. (717) Quatre points sont situés en ligne droite; on connaît la distance du premier au second et celle du troisième au quatrième; on a de plus les trois angles sous-tendus en un cinquième point par les lignes menées de ce point aux quatre autres points: on demande à fixer à l'aide de ces données, la position du cinquième point et à trouver la distance du second au troisième. (718) On a le périmètre d'un triangle et le rapport entre les côtés; trouver les côtés. (719) Trouver les côtés d'un triangle dont on a le périmètre et les angles. (720) Etant donné le rapport entre les trois angles d'un triangle, trouver les angles. (721) Dans un triangle, soit à trouver les côtés lorsqu'on on connaît la surface, un angle, et le rapport entre la base et la hauteur, ou la somme des base et hauteur, ou leur différence. (722) Déterminer les côtés et les angles d'un triangle ou d'un parallélogramme dont on a la surface, avec la somme et le rectangle ou produit de deux côtés adjacents. (723) Etant donnés, dans un triangle, la surface, la somme de deux côtés et l'angle inclus: trouver les côtés. (724) Construire un triangle dont on a la surface, la base et la somme des deux autres côtés. (725) Décrire un cercle qui soit tangent à un cercle donné et qui passe par deux points donnés. (726) Le même problème, lorsque les cercles se touchent intérieurement. (727) Construire un triangle dont on a la base, la surface et l'angle vertical. (728) On a, dans un triangle, les trois angles et les trois distances de ces angles à un point intérieur, pour trouver les côtés. Autre solution du même problème. (729) Construire un triangle dont on a la base, l'angle vertical, et la bissectrice de l'angle vertical. (730) Dans un triangle, on a les segments de la base, et la somme des deux autres côtés, pour trouver ces côtés. (731) On a la surface et les côtés d'un triangle isocèle pour trouver la base. (732) On a la surface d'un triangle rectangle et la somme de ses côtés, pour trouver l'hypoténuse. (733) Dans un triangle, étant données les trois bissectrices des côtés opposés, trouver les côtés. (734) Ayant la différence entre les côtés d'un triangle, sa base et la différence des angles à la base; construire le triangle. (735) Dans un triangle rectangle, on a un côté et la différence entre l'hypoténuse et la somme des autres côtés, pour trouver le reste. (736) Dans un triangle, on a l'angle vertical, la différence entre les segments de la base et la différence entre les côtés; trouver le reste. (737) On a, dans un triangle, l'angle vertical et les bissectrices des côtés qui le comprennent; construire le triangle. (738) Dans un triangle étant données la hauteur ou perpendiculaire, la bissectrice de l'angle vertical et la bissectrice de la base; trouver les côtés. (739) Dans un triangle, on a la base, l'angle vertical et le rectangle des côtés; trouver le reste. (740) Trouver les côtés d'un triangle dont on a le rapport et les segments de la base formés par la perpendiculaire

pour trouver les côtés. **(764)** Mener une ligne, la plus courte possible, qui avec deux autres lignes indéfinies se rencontrant sous un angle donné, renferme une surface donnée.—Plus une figure est régulière, plus son périmètre est petit en raison de sa surface. **(765)** Mener par un point donné, une ligne qui avec deux autres lignes indéfinies se rencontrant sous un angle donné, renferme la moindre surface possible. **(766)** On a les diagonales d'un parallélogramme et leur inclinaison, pour en déterminer la surface. **(767)** On a les diagonales d'un quadrilatère et leur inclinaison, pour en déterminer la surface. **(768)** Etant données les positions relatives de deux points et d'une ligne, mener par ces points une circonférence de cercle qui soit tangente à cette ligne. **(769)** Faire passer par un point donné un arc de cercle qui soit tangent à une ligne en un point donné. **(770)** Par un point donné, décrire un cercle qui touche à un cercle donné, en un point donné. **(771)** Mener par un point donné un arc de cercle qui se raccorde avec un arc donné. **(772)** Relier par une courbe les extrémités de deux lignes parallèles de longueurs inégales. **(773)** Mener à un cercle une tangente qui fasse avec une ligne dont on connaît la position, un angle donné. **(774)** Mener à un cercle donné, une ligne qui lui soit tangente et qui coupe sur un autre cercle donné un segment voulu. **(775)** Mener à deux cercles donnés, une tangente du même côté ou de côtés opposés. **(776)** Par deux points donnés, faire passer un cercle qui bissecte une circonférence donnée. **(777)** Par un point donné hors d'un cercle, mener une sécante qui enlève au cercle un arc donné. **(778)** Sur le diamètre prolongé d'un cercle, trouver un point tel que la somme des tangentes menées de ce point au cercle soit égale au diam. ainsi prolongé. **(779)** Trouver sur une ligne un point tel que deux lignes menées de ce point à deux autres points donnés, comprennent un angle droit. **(780)** Décrire un cercle qui soit tangent à un cercle donné et à une ligne en un point donné de cette ligne. **(781)** Relier ou raccorder par une courbe les extrémités de deux lignes droites données en position. **(782)** Avec un rayon donné, décrire un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés. **(783)** Par un point donné, faire passer un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés. **(784)** Par un point donné, décrire un cercle qui touche à un cercle et à une ligne. **(785)** On a la corde et la flèche d'un arc, pour en trouver le rayon, l'angle au centre, et la longueur. —Avec l'angle et la longueur, trouver le rayon. **(786)** Trouver sur une ligne donnée, un point tel que de ce point l'on puisse mener à deux autres points donnés, des lignes égales. **(787)** D'un point donné, mener une ligne qui retranche de deux autres lignes se rencontrant sous un angle quelconque, des parties égales. **(788)** Mener d'un point donné à une ligne, une droite qui soit bissectée par une seconde ligne rencontrant la première sous un angle donné. **(789)** Mener de deux points donnés à une ligne, deux droites qui rencontrent cette ligne sous des angles égaux.—Mener entre deux points une ligne qui soit la plus courte possible et qui doive rencontrer en

l'hypoténuse. (**814**) Trouver la bissectrice de l'angle droit d'un triangle inscrit dans un cercle. (**815**) Inscrire dans un cercle une ligne qui soit parallèle et égale à une ligne donnée. (**816**) De trois centres donnés décrire des cercles qui se touchent mutuellement. (**817**) Deux cercles se touchent extérieurement : il est à décrire un troisième cercle qui touche aux deux autres, et à l'un d'eux en un point donné. (**818**) On a dans un triangle, un côté, l'angle compris par ce côté et le plus petit des deux autres, et la différence entre ces deux autres côtés, pour compléter la figure. (**819**) On a les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle pour trouver les angles. (**820**) Dans un triangle inscrit dans un cercle, on a la base, la somme des deux autres côtés et la bissectrice de l'angle vertical prolongée jusqu'à la circonférence, pour construire la figure. (**821**) Déterminer sur une ligne, un point tel que ses distances de deux autres points donnés sur cette ligne soient proportionnelles à ses distances des extrémités. (**822**) Dans un triangle rectangle, on a la différence entre l'hypoténuse et chacun des côtés, pour trouver le reste. (**823**) Dans un triangle rectangle, on a un côté et la différence entre la somme des côtés et l'hypoténuse, pour compléter la construction. (**824**) On a dans un triangle, le rectangle des côtés, le rectangle de la base et de la bissectrice de l'angle vertical, et le rectangle des segments de la base : trouver les côtés. (**825**) Mener de deux points donnés à une ligne, deux droites se rencontrant sous le plus grand angle possible. (**826**) Trouver sur une ligne, un point tel que la différence des lignes menées de deux autres points donnés au premier point, soit un minimum. (**827**) Trouver dans un quadrilatère, un point tel que la somme des lignes menées de ce point aux quatre angles de la figure, soit un minimum. (**828**) Trouver un point tel que la somme de ses distances de trois points donnés soit un minimum. (**829**) Déterminer un triangle rectangle dont on a l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit. (**830**) Dans un triangle rectangle on a les bissectrices des côtés pour former le triangle. (**831**) Faire un triangle rectangle dont on a l'hypoténuse et le côté du carré inscrit. (**832**) Le même prob. quand le carré inscrit a un sommet ou angle sur l'hypoténuse. (**833**) Déterminer un triangle rectangle dont on a le rayon du cercle inscrit et le côté du carré inscrit avec un sommet sur l'hypoténuse. (**834**) On donne l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence des lignes menées des angles aigus au centre du cercle inscrit : construire le triangle. (**835**) Faire un rectangle dont on a la diagonale et le périmètre. (**836**) Faire un triangle dont on connaît la base, la hauteur et la différence entre les côtés. (**837**) Soient donnés la base, la perpendiculaire et le rectangle des côtés d'un triangle, pour le construire. (**838**) Ayant dans un triangle, deux côtés et la bissectrice de la base : déterminer la base. (**839**) On a dans un triangle, les côtés qui comprennent l'angle vertical et la bissectrice de cet angle, pour trouver le reste. (**840**) Déterminer un triangle dont on a la base, la somme des deux côtés et la bissectrice de la base,

PAGE 324.

PAGE 333.

LIVRE II.

DES PLANS ET ANGLES SOLIDES.

DÉFINITIONS ET CONSÉQUENCES.

PAGE 415.

PROBLÈMES.

PAGE 421.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

(Lisez la note, page 427).

Du tétraèdre.

(1127) Sa construction. **(1128)** Trouver le rayon de la sphère inscrite et circonscrite. **(1129)** Sa surface, son volume.

De l'exaèdre.

(1130) Sa construction, rayon de la sphère inscrite et circonscrite, sa surface, son volume.

L'octaèdre.

(1131) Sa construction, rayon de la sphère inscrite et circonscrite, sa surface, son volume.

Le dodécaèdre.

(1132) Son volume, le rayon de la sphère inscrite. **(1133)** Sa construction, autre construction. Etablir sur la surface d'une sphère donnée les points nécessaires à la construction du solide.

L'icosaèdre.

(1134) Sa construction, rayon de la sphère inscrite, sa surface, son volume. **(1135)** Rayon de la sphère circonscrite de ce polyèdre et du dernier.

PAGE 427.

DE QUELQUES SOLIDES DE RÉVOLUTION ET AUTRES.

(1136) Déterminer les volumes près et les surfaces de ces solides, sans recourir à l'étude du "calcul différentiel et intégral" ou même des sections coniques. Difficulté de se rendre compte de la nature ou espèce du solide à estimer. **(1137)** Le conoïde, sa décomposition en troncs de cônes et calotte, sa surface, son volume. **(1138)** Le fuseau, sa décomposition, sa surface, son volume. Le sphéroïde aplati, allongé : sa décomposition, etc. **(1140)** Déterminer la surface et le volume d'un onglet quelconque de cône ou de pyramide. De la nature des surfaces développées du cône, de l'onglet ou tronc de cône, du cylindre, etc. Des surfaces à simple et à double courbure. **(1411)** Volume d'un tronc quelconque de pyramide ou de cône. **(1142)** Déterminer le volume près d'un onglet de conoïde, de sphère ou de sphéroïde. **(1143)** Surface ou volume d'un corps ou d'un tronc de corps quelconque. La tonne ou futaille, les cuves et chaudières, le dôme, la voûte, l'intersection de deux voûtes, l'intersection d'une voûte et d'un dôme, voûtes circulaires et spirales. **(1144)** Définition de l'anneau cylindrique, son volume, sa surface. L'anneau circulaire, sa surface. **(1145)** Surface d'un tronc ou partie d'anneau circulaire, surface et volume d'un tronc d'anneau cylindrique.

PAGE 470.

Construction des tables trigonométriques.

PAGE 475.

Des logarithmes.

PAGE 631.

DEUXIÈME PARTIE.

Toisé des corps ou solides.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INDEX

DES

TABLES.

REMARQUES.

REM. I. On aurait dû dire à l'endroit des "logarithmes" que pour ce qui est du **calcul des caracteristiques negatives :**

1° **L'addition des caracteristiques negatives,** *se fait en prenant leur somme.* Ainsi : $\bar{2}$ ajouté à $\bar{3}$ donne $\bar{5}$; de même $\bar{2}.371654$ ajouté à $\bar{3}.783415$ donne $\bar{4}.155069$, puisque l'unité retenue sur la somme des parties décimales des deux logarithmes, diminue d'autant la somme des caractéristiques négatives, comme on va le voir.

2° **L'addition d'une caracteristique positive avec une negative,** *se fait en prenant leur différence et en donnant à cette différence le signe de la plus grande.* Ainsi : $6+\bar{2}=4$, 5 et $\bar{2}$ donnent 3, $\bar{5}$ et 2 font $\bar{3}$, $\bar{2}+1=\bar{1}$; de même, la somme de 5.346854 et $\bar{3}.268542$ est 2.615396 ; la somme de 6.387465 et $\bar{2}.924563$ est 5.312028, car l'unité retenue

sur la somme des décimales des deux logarithmes, affecte d'autant la somme de leurs exposants ou caractéristiques.

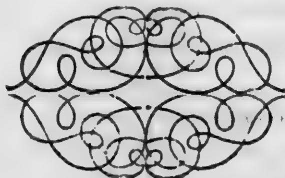
3° **Pour soustraire un exposant negatif :** *changez en le signe de — en + et ajoutez le par les règles précédentes.* Ainsi : $2 - \bar{3} = 5$; $\bar{5}$ soustrait de $\bar{2}$ donne 5 et $\bar{2}$, c.-à-d. 3 ; $\bar{5} - \bar{3} = 3 + \bar{5} = \bar{2}$; de même, 3.246854 soustrait de 2.684765 laisse 5.437911 ; mais $\bar{5}$.765462 soustrait de $\bar{2}$.346853 laisse 2.581391, car dans ce cas pour soustraire la première décimale 7 il faut emprunter 1 de $\bar{2}$, ce qui réduit $\bar{2}$ à $\bar{3}$; alors $\bar{3}$ et 5 donnent 2. Si l'on soustrait $\bar{3}$.785631 de $\bar{5}$.684325, le résultat est $\bar{3}$. etc., car $\bar{5} - 1 = \bar{6}$ et $\bar{3}$ ôté de $\bar{6}$, il reste $\bar{3}$.

4° **Pour multiplier un logarithme avec un exposant negatif :** *multipliez la partie décimale ou fractionnaire par les règles ordinaires, multipliez alors l'exposant négatif, ce qui donnera un produit négatif auquel vous ajouterez (par la règle 2°) les entiers, s'il y en a, que vous aurez retenus sur la partie décimale.* Ainsi : $\bar{2} \times 5 = \overline{10}$ et s'il y a à ajouter par exemple 2 de retenue, le résultat est $\bar{8}$; de même, $\bar{2}$,368546 $\times 2 = \bar{4}$.737092, et $\bar{3}$.7856473 $\times 6 = \overline{14}$.7138838.

5° **Pour diviser un logarithme a caracteristique negative :** *si la caractéristique est divisible par le diviseur, écrivez le quotient avec un signe négatif et divisez la partie décimale par les règles ordinaires ; mais si l'exposant négatif n'est pas divisible par le diviseur, ajoutez lui tel nombre négatif qui le rendra divisible, et écrivez en même temps à la gauche de la partie décimale du logarithme un nombre entier et positif égal ; divisez alors séparément l'exposant négatif ainsi augmenté et l'autre partie du logarithme, et le premier quotient pris négativement sera la caractéristique de la partie fractionnaire du quotient.* Ainsi : $\bar{6}$ divisé par $3 = \bar{2}$; mais pour diviser $\overline{10}$ par 3, ajoutez $\bar{2}$ pour avoir $\overline{12}$ et 2, le premier nombre $\overline{12} \div 3$ donne $\bar{4}$ et le dernier donne $\frac{2}{3}$; donc le quotient est $\bar{4}$ et $\frac{2}{3}$; de même, $\bar{6}$.324684 divisé par 3, donne $\bar{2}$.108228 ; mais $\overline{14}$.326847 $\div 9 = (\overline{18} + 4.326847) \div 9 = 2.4807608$. En ajoutant $\bar{4}$ et 4 au log. du dernier exemple on n'en altère aucunement la valeur, puisque la somme de $\bar{4}$ et 4 est 0.

REM. II. La table des **cordes** (page 88) offre entre autres usages qu'on peut en faire, le moyen le plus exact de décrire ou de faire un angle d'un nombre donné de degrés et minutes, et même (par une simple règle de proportion) de secondes, etc. Cette table, avec celle des arcs de cercle qui la précède, permet aussi de comparer et de calculer les longueurs respectives des côtés d'un triangle sphérique considéré comme rectiligne ou d'un triangle rectiligne considéré comme sphérique.

REM. III. La table des **Diviseurs et Multiplicateurs Réciproques** est très utile, en ce que à son aide l'on peut de suite remplacer un diviseur par un multiplicateur, ou en d'autres termes, changer une division en une multiplication qui produise le même quotient ou résultat ; ou, si l'on veut, une multiplication en une division qui donne le même produit. Soit par exemple à diviser 53739173 par 250, le réciproque du diviseur 250 est le multiplicateur .004, et en effet c'est la même chose de multiplier le nombre donné par .004, ou de le diviser par 250, tandisque le calcul à faire est bien plus simple et plus court dans le premier cas que dans le second, puisqu'il suffit de multiplier par 4 et de retrancher dans le produit trois chiffres pour décimales. Soit encore à diviser par 885 un nombre entier quelconque suivi de décimales, le réciproque de 885 est .001129944 ou .00113 à très près, on multipliera donc par .00113 ou ce qui est la même chose, par 113 pour séparer ensuite autant de décimales qu'il y en a tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur. Si dans le dernier exemple, le diviseur était 8850 ou 88500, etc., il est clair que le multiplicateur réciproque serait alors .000113 ou .0000113 etc., suivant le cas ; et si le diviseur était au contraire 88.5, 8.85, .885, .0885, .00885, etc., le multiplicateur correspant deviendrait .0113, .113, 1.13, 11.3 ou 113, etc, suivant le cas. Si le diviseur excède 1000, on le trouvera néanmoins asses souvent ou à très près dans la colonne des réciproques, ainsi pour 1032, l'on prendra 1031992 qui lui est égal à très près et dont le multiplicateur correspondant est 969, c.-à-d. 9.69 puisque le réciproque est 1032 au lieu de .001032. Si le diviseur donné était 1383, son réciproque serait à très près 7.23, un diviseur 13830 donnerait pour multiplicateur .723 à très près, et ainsi de suite.



TABLEAU

Des propositions lesquelles, dans le premier livre de cet ouvrage, correspondent aux propositions des six premiers livres de l'*Euclide de Playfair*.

Eucl. LIV. I. Prop.	De ce traité. Artic.
1	223
2	220
3	221
4	237
5	229, 231
6	248, 249
7	227
8	239
9	240, 241
10	244
11	245
12	246, 247
13	132, 134
14	135
15	138, 139, 140
16	251
17	252
18, 19	267
20	161
21	268
22	222
23	242
24, 25	269
26	238, 260, 265
27	154
28	154, 150
29	153, 148, 152, 254, 149

Eucl. LIV. I. Prop.	De ce traité. Artic.
30	143
31	253
32	251, 250, 255, 256, 258 à 264
33, 34	270 à 277
35	284
36	285
37, 38	286
39	295
40	296
41	289
42	290, 291
43	297
44	298, 299
45	301 à 303
46	278
47	305 ou 532, 308, 310, 311
48	319
A	313 à 318
B	312
C	151
D	259
E	266
F	321

Eucl. LIV. I. Prop.	De ce traité. Artc.
G	292, 293
H	306, 307
I	309
K	300, 304
LIV. 2. Prop.	
1	353
2	355
3	357
4	359, 361
5	369, 370
6	378
7	362, 364, 365
8	382, 383, 215
9	385
10	387
11	381 ou 582
12	391
13	389
14	376
A	393
B	394, 283
LIV. 3. Prop.	
1	411, 412

Eucl. LIV. 3. Prop.	De ce traité. Artc.
3	408, 406, 410
4	453
5	501
6	474
7	454
8	459
9	456
10	228 ou 419
11, 12	475, 476
13	472
14, 15	461 à 465
16	466 à 471
17	491, 488, 493, 581
18	466
19	473
20	440, 441
21	443
22	446 à 448
25	413
26, 27	399, 449
28, 29	403
30	415, 416
31	444, 445
32	487

Eucl. LIV. 3. Prop.	De ce traité. Art.
33	450
34	490
35	502
36	504 ou 579, 503 ou 575, 493 ou 506, 494
37	507
A	188, 401, 402
B	418
C	495 à 500
D	399, 403 à 407
E	477 à 483
F	488 ou 489
LIV. 4.	
LEM.	615 à 622
Prop.	
1	225
2	628

Eucl. LIV. 4. Prop.	De ce traité. Art.
3	632
4	630
5	420 à 422
6	636, 638
7	637
8	633
9	635
10	639, 640
11	641
12, 13, 14	642
15	644
16	649 à 653
LIV. 5. Prop.	
1	46
4	105
A	93
B	61
C	60
7	82, 83
9	72
11	75
12	102
15	73
16	94
17, 19	97
18	95
D	98
24	97
F	81

Eucl. LIV. 6. Prop.	De ce traité. Art.
1	342, 344
2	518, 519
3	541, 542
A	543, 544
4	520
5	522
6	523
7	528
8	529 à 531
9	515
10	514
11	517
12	516
13	534
14	545, 546
15	547
16	573 ou 86, 88
17	580 ou 87, 89
18	551
19	552, 563
20	548, 554, 563
21	209
22	561
23	585, 332 à 338, 341, 344

Eucl. LIV. 6. Prof.	De ce traité. Art.
24	587
25	568
26	588
27	372
28	373, 374 ou 535
29	380
30	582 ou 381
31	560
32	524
33	423, 449, 429
B	600
C	601
D	604
E	605
F	606, 607
G	611
H	612, 613
K	614
L	376
M	584 ou 375
N	535 ou 373
O	538
P	288
Q	569
R	751, 752
S	753
T, U	759
W	754
X	759
Y	755

ERRATA.

Corrigez tout d'abord avec la plume, celles d'entre les fautes suivantes qui peuvent altérer le sens du texte.

(**41** et **42**). Pour "prisme", lisez "parallépipède."—(**93, 94, 95**). Pour (**88**), lisez (**86**).—(**230**) 5ème. ligne; pour *r*, lisez *n*.—(**233**) Biffez (**218**).—(**286**) Pour CK, lisez GK.—(**357**) Dernière ligne; pour l'autre partie, lisez la première ou la susdite partie.—(**497**) Pour CA (avant dernière ligne), lisez DA.—(**509**) Seconde ligne; pour une, lisez deux.—(**510**) Pour à, lisez sous; 5ème. ligne. — Page 198, ligne 11; pour $\frac{(AEF + CFH)^2}{2}$, lisez $\left(\frac{AEF + CFH}{2}\right)^2$—(**604**) Menez la ligne CD qui manque dans la fig.—(**671**) Pour 𝔭, lisez π.—(**699**) Pour trapèze, lisez quadrilatère.—(**741**) Avant dernière ligne; pour BD ED, lisez BD : ED.—Page 279, ligne 6; pour BA′, lisez A′L, BL.—(**814**) Menez la ligne BC qui manque dans la fig.—(**1014**) Pour mesurement, lisez mesurage. (**1025**) Menez la figure *hi* qui manque dans la fig.—(**1041**) Pour son côté, lisez la moitié de son côté ou de.—Page 389, ligne 1ère; pour sa hauteur, lisez le tiers de sa hauteur.—(**1087**) 3ème. ligne; pour leur sommet, lisez leurs sommets.—Page 413, dernière ligne; pour B × H ou BH, lisez B × $\frac{1}{3}$ H ou $\frac{1}{3}$ BH.—(**1132**) 10ème. ligne; pour *bm*, lisez *lm*.—(**1136**) 7ème. ligne, après sections coniques, lisez et du calcul différentiel et intégral.—(**1144**) 10ème. ligne; pour *c*D lisez CD.—(**1216**) Dernière ligne; pour de cet arc, lisez de la moitié de cet arc.—(**1269**) 4ème. ligne; pour plus part, lisez plupart.—Page 482, 10ème. ligne; pour $\frac{1}{51}$, lisez $\frac{1}{10}$.—Page 507, 25ème. ligne; pour : AB, lisez :: AB.—(**1346**) Au centre de l'arc ACA′, lisez P.—Page 455 et ailleurs; pour "dégré" lisez "degré"; et quelques autres fautes d'impression.

d'entre les
ns du texte.

94, **95**). Pour
) Biffez (**218**).
utre partie, lisez
dernière ligne),
9) Pour à, lisez
+ CFH)², lisez
2
s la fig.—(**671**)

-(**741**) Avant
e 6 ; pour BA',
dans la fig.—
la figure *hi* qui
de son côté ou
sa hauteur.—
-Page 413, der-
1132) 10ème.
tions coniques,
gne ; pour *c*D
a moitié de cet
ge 482, 10ème.
lisez :: AB.—
ailleurs ; pour
sion.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE.

PRINCIPES

ET

EXPLICATION DES TERMES ET SIGNES.

(Voyez la Note au bas de la Page).

(1) La **Géométrie** est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

(2) L'**Etendue** peut se considérer séparément ou conjointement sous les trois rapports de **longueur**, **largeur**, et **hauteur** ou **profondeur**.

(3) Il y a en géométrie plusieurs termes généraux et principes; savoir: Définitions, Propositions, Axiomes, Demandes, Théorèmes, Problèmes, Lemmes, Scolies, Corollaires, Démonstrations directes ou indirectes, positives ou négatives,

N. B—En commençant l'Etude de ce traité, les seules connaissances que nous supposons au lecteur sont les quatre premières règles d'Arithmétique : l'**Addition**, la **Soustraction**, la **Multiplication** et la **Division**, simples et composées, ainsi que les **fractions ordinaires** et **décimales** et l'**extraction des racines carrée et cubique**.

Solutions, Hypothèses, Méthodes, Analyse, Synthèse, Racines, Puissances, Produits, Quotients, Sommes, Différences, etc.

(4) Procédons maintenant à indiquer le sens exact dans lequel on doit toujours employer et entendre chacune de ces expressions.

(5) Une **Définition** est l'explication d'un terme ou mot quelconque dans une science, indiquant le sens dans lequel ce mot ou terme est employé. L'on définit aussi une chose quelconque en énonçant tout ce qui est essentiel à l'existence de cette chose.

Toute définition doit être claire et exprimée en termes dont la signification soit parfaitement comprise.

(6) **Proposition** est le nom général sous lequel on désigne un problème, théorème, axiome, lemme, etc.

(7) Un **Axiome** est un théorème dont la vérité est évidente par elle-même, et qui n'exige par conséquent aucune démonstration particulière. C'est une proposition telle, que chacun l'admet ou est prêt à l'admettre dès qu'elle est émise ou énoncée.

Ainsi, il est tellement évident que "deux quantités qui sont chacune égale à une troisième quantité sont égales entre elles," que cet énoncé n'exige aucune démonstration et en conséquence on lui donne le nom d'axiome.

(8) Une **Demande** est un problème d'une solution si facile et évidente, que nul ne peut hésiter à l'admettre.

Ce terme vient de ce qu'en énonçant des problèmes de cette espèce, on "demande" au lecteur de les considérer comme étant d'une solution trop évidente pour nécessiter une démonstration.

(9) Un **Théorème** est une proposition dans laquelle on énonce une propriété dont il faut démontrer la vérité.

Ainsi, quand on dit que "la somme des trois angles d'un triangle rectiligne est égale à deux angles droits;" cet

énoncé est un théorème dont on n'est pas prêt à admettre la vérité sans qu'elle soit d'abord prouvée ou démontrée.

(10) Un **Lemme** est une proposition préparatoire qui précède quelquefois une proposition principale pour en faciliter la démonstration ou la rendre plus succincte.

(11) Un **Scolie** est une remarque, observation ou commentaire que l'on fait sur une ou plusieurs propositions précédentes.

(12) Un **Corollaire** est une conséquence ou vérité qui découle immédiatement d'une ou de plusieurs propositions que l'on vient de démontrer.

(13) On appelle **Démonstration** la réunion des divers arguments et preuves nécessaires pour rendre évidente la vérité d'une proposition.

Elle est **Directe** ou **Positive** lorsqu'elle finit par prouver d'une manière directe et certaine la proposition dont il s'agit, et en cela, plus satisfaisante à l'esprit que la démonstration **Indirecte** ou **Négative** qui établit la vérité d'une proposition en montrant qu'une absurdité s'en suivrait si la proposition était fausse.

On désigne quelquefois cette dernière sous le nom de **Réduction à l'absurde**, parce qu'elle démontre l'absurdité et la fausseté de toutes suppositions contraires à celles contenues dans la proposition.

(14) On peut aussi dire quelquefois d'une proposition que la démonstration ou **preuve** en est **oculaire**, c'est-à-dire oculairement évidente ou évidente à l'œil, lorsque la vérité de ce qu'on énonce dans la proposition est évidente par la seule inspection de la figure.

Ainsi, lorsqu'on dit, comme au par. (215), que "le carré décrit sur une ligne est égal à neuf fois le carré décrit sur le tiers de cette ligne ;" c'est que, comme on le verra, la figure indique immédiatement cette propriété et qu'il suffit d'y jeter les yeux pour s'en convaincre.

(15) Un **Problème** est une proposition, ou une question proposée qui demande une solution, c.-à-d. la recherche d'une quantité inconnue, la construction d'une figure, etc.

Si l'on demande, par exemple, à diviser (*) un angle en deux parties égales, ou à mener une ligne perpendiculaire à une autre ligne, etc.; voilà des problèmes ou questions à résoudre.

(16) La **Solution** d'un problème est la détermination ou l'accomplissement de ce qui est demandé par le problème. Elle est **Numérique** lorsque la réponse est donnée en chiffres; **Géométrique**, si la réponse est donnée par les principes de la géométrie, et **Mécanique** lorsqu'on l'obtient par des essais.

(17) Une **Hypothèse** est une supposition que l'on fait dans le but de fonder sur cette supposition le raisonnement ou la démonstration d'une proposition.

Ainsi, lorsque dans un triangle, par exemple, les angles seulement sont donnés pour en déduire le rapport entre les côtés, ce rapport, comme on le verra, pourra s'obtenir en supposant à un des côtés une valeur quelconque afin d'en déduire par le calcul ou autrement la valeur correspondante des côtés inconnus, et de là le rapport entre eux.

De même, pour résoudre un problème, il est souvent nécessaire de supposer le problème tout ou en partie résolu, afin d'en obtenir par analyse ou décomposition les éléments nécessaires à sa solution.

(18) La **Méthode** est l'art de disposer une série d'arguments d'après un ordre particulier, pour découvrir la vérité ou la fausseté d'une proposition, ou pour la démontrer à d'autres après en avoir fait la découverte. Toute méthode régulière est ou analytique ou synthétique.

(19) L'**Analyse** ou la **Méthode Analytique** est l'art ou le mode de trouver la vérité d'une proposition, en supposant

(*) L'on fera usage dans la suite du verbe "bissecter" pour éviter le trop fréquent emploi des mots "diviser en deux parties égales."

d'abord la chose faite, et en raisonnant ensuite pas à pas jusqu'à ce que l'on arrive à quelque vérité connue. Cette méthode s'appelle aussi celle de l'**Invention** ou de la **Résolution.**

(20) La **Synthèse** ou **Méthode Synthétique** est l'art de rechercher une vérité, en posant d'abord des principes et éléments connus, et en poursuivant jusqu'à conclusion les conséquences découlant de ces principes. Cette méthode s'appelle aussi celle de la **Composition** et est celle dont on se sert ordinairement en géométrie.

(21) N'oublions pas que le résultat de l'addition est une **Somme** ; celui de la soustraction, une **Différence** ; celui d'une multiplication, un **Produit** ; et celui d'une division, un **Quotient** ; et ne confondons jamais ces quatre expressions.

(22) Rappelons-nous que **la soustraction est le contraire de l'addition,** puisque si par la première de ces opérations l'on diminue une quantité, on l'augmente par la seconde, et réciproquement ; mais rappelons-nous surtout quo **la division est le contraire de la multiplication,** et qu'on défait par la première ce qu'on fait par la dernière.

Ainsi, il est évident que si, comme on le démontrera par la suite (333), la surface d'un rectangle, par exemple, s'obtient en multipliant sa base par sa hauteur ; cette même surface divisée par la base du rectangle donnera sa hauteur, et divisée par la hauteur, donnera sa base.

En effet, si la base était représentée par le nombre 10 et la hauteur par 5, on aurait pour surface du rectangle (d'après la dernière hypothèse) 10 multiplié par 5, ce qui fait 50 ; or il est clair que ce produit 50 divisé par 5, la hauteur, donne 10, la base, et que 50 divisé par 10, la base, donne 5, la hauteur.

(23) On désigne sous le nom de **Facteurs** les quantités séparées qui servent à former un produit : tels sont dans la multiplication le **Multiplicateur** et le **Multiplicande**.

Dans la division, l'on appelle **Termes** le **Diviseur** et le **Dividende**.

(24) Le mot **Quantité**, dont on fait un fréquent usage dans ce traité, voudra toujours dire quantité d'une espèce quelconque, soit numérique, linéaire, superficielle, cubique ou angulaire; car il s'agira, ou d'un nombre, ou d'une ligne, ou d'une surface, ou d'un solide, ou enfin d'un angle; et quand on parlera d'ajouter, de soustraire, de multiplier et de diviser ces quantités ou d'en extraire les racines, ces diverses opérations devront toujours s'entendre du nombre d'unité de mesure (48) de ces quantités, lesquelles seront invariablement de la même espèce que les quantités elles-mêmes.

Ainsi, quand la quantité dont il s'agit sera un nombre son **unité de mesure** sera évidemment **numérique**; cette unité sera **linéaire**, s'il s'agit d'une ligne; **superficielle**, s'il s'agit d'une surface; **cubique**, s'il s'agit d'un solide; et **angulaire**, s'il s'agit d'un angle.

(25) Deux **Quantités** sont dites **de même espèce** lorsque la plus petite peut être multipliée de manière à excéder la plus grande. Une ligne, par exemple, qui d'après la définition qu'on en donne (**107**), n'a d'étendue que dans le sens de la longueur, n'est pas de même espèce qu'une surface (**114**), qui a, en même temps, de l'étendue dans le sens de la largeur; car on ne saurait multiplier une ligne de manière à en obtenir ou former une surface.

Pour une raison analogue, les surfaces ne sont pas de même espèce que les solides (**119**) qui ont de l'étendue tant en épaisseur qu'en longueur et largeur; et pour ce qui est des quantités angulaires, elles diffèrent évidemment de toutes les autres.

(26) Le signe = (ou deux lignes parallèles) est celui de l'égalité, et placé entre deux quantités quelconques, il indique que ces quantités sont égales; ainsi, A=B indique que la quantité représentée par la lettre A est égale à celle représentée par la lettre B, et on lit A **égale** B ou A **égal à** B.

On donne le nom d'**équation** à l'expression A=B et à toute autre expression de cette forme, où certaines quantités d'un côté sont reliées par le signe = à certaines autres quantités de l'autre côté. Ainsi A+B=C—D est une équation dont les quantités A+B et C—D sont les **côtés** ou **membres**, et A, B, C, D, les **termes**.

(**27**) On se sert de l'expression A>B pour signifier que A est **plus grand** que B. Dans le cas contraire l'ouverture du signe est tournée en sens opposé; ainsi, A<B indique que A est **plus petit** que B.

(**28**) Le signe de l'addition est une croix perpendiculaire ou à plomb; ainsi, A+B ou A **plus** B indique la somme de A et de B.

(**29**) La soustraction s'indique par une simple ligne, comme A—B, qui s'énonce A **moins** B et indique la différence qui reste après avoir soustrait B de A.

De même, A—B+C ou A+C—B indique qu'il faut ajouter ensemble A et C et de leur somme retrancher B.

(**30**) La multiplication s'indique par une croix oblique, par l'interposition d'un point, ou simplement par la juxtaposition des quantités ou facteurs; ainsi, A×B, A.B ou AB veut dire que la quantité A doit être **multipliée** par celle B. On doit se garder d'employer l'expression AB pour indiquer le produit de ces deux quantités, lorsqu'il y a danger de confondre cette expression avec celle de la ligne AB.

On ne peut indiquer la multiplication de nombres ou de quantités représentées par des chiffres, par la simple juxtaposition de ces nombres; ce qui est évident, puisque s'il s'agissait des nombres 2 et 5, par exemple, on aurait en les écrivant l'un à côté de l'autre, 25; tandis que leur produit ne donnerait que 10. Il faut de toute nécessité dans ce cas employer la croix oblique ou le point entre les facteurs, et éviter même l'emploi de ce dernier, lorsqu'il y a danger de confondre cette expression avec celle indiquant un nombre

entier et une décimale, pour séparer lesquels, on se sert souvent du point.

(31) L'expression A÷B ou $\frac{A}{B}$, dans laquelle l'une des deux quantités est placée au-dessus de l'autre en forme de fraction, indique la division de A par B ou le rapport (58) de A à B, et s'énonce **A divisée par B** ou **A sur B**. Si A=4, par exemple, et B=2, l'on aura évidemment $\frac{A}{B}=\frac{4}{2}=2$; or 2 est le quotient, et comme ce quotient indique le nombre de fois que B est contenue en A, il indique de même le rapport entre ces quantités, qui est celui de 1 à 2 ou de 2 à 4. Il est à peine nécessaire de dire que toutes autres valeurs numériques que l'on assignerait aux quantités A et B, donneraient (59) des résultats analogues.

Il est évident que la division des quantités représentées par des lettres ne pouvant s'effectuer qu'en réduisant ces quantités à leurs valeurs numériques ou en chiffres, il faut regarder l'expression $\frac{A}{B}$ comme le quotient de la division indiquée; de même que A×B, A.B ou AB représente le produit ou résultat de la multiplication indiquée.

(32) Lorsque des quantités sont renfermées dans une parenthèse ou surmontées d'une ligne, on doit regarder la somme de ces quantités comme n'en formant qu'une eu égard à d'autres termes; ainsi, l'expression A× (B+C—D) ou $A.\overline{B+C-D}$ représente le produit de A par la quantité B+C—D, après qu'on a fait l'opération indiquée par l'ensemble de ces trois dernières lettres. De même $\overline{A+B}\div\overline{A-B+C}$ indique que la quantité A+B doit être divisée par la quantité A—B+C.

(33) Le **Coefficient** d'une quantité est le nombre qui le précède immédiatement; ainsi, 2AB signifie que l'on prend deux fois la ligne AB ou le produit AB; de même que $\frac{1}{2}$AB indique la moitié de cette ligne ou de ce produit.

Ce coefficient s'exprime aussi quelquefois par une petite

lettre placée près de celle qui indique la quantité ; ainsi, nAB indique qu'on doit prendre la ligne AB un nombre de fois désigné par la lettre n. De même m (A+B) indique m fois la somme de A et B, et n (A—B), n fois leur différence.

Il est clair, d'après ce qui a déjà été dit, que $(m+n)$ A, $(m-n)$ A, mn A, et $\frac{m}{n}$A, signifient qu'il faut premièrement prendre A un nombre de fois égal à la somme de m et n, puis égal à la différence entre m et n, ensuite égal au produit de ces deux lettres et enfin égal à leur quotient.

Lorsqu'une quantité n'est précédée d'aucun coefficient ce dernier est toujours considéré égal à l'unité.

(34) **La Première Puissance** d'une quantité est cette quantité elle-même ; ainsi la première puissance de A est A ou A^1, le petit chiffre 1 placé à droite de la quantité et un peu au-dessus étant appelé l'**Exposant** de la quantité.

(35) Le **Carré** ou la **Seconde Puissance** d'une quantité est le résultat de la multiplication de cette quantité par elle-même ; ainsi le carré de 10 est 100, parce que $10\times10=100$ et s'écrit 10^2, comme celui de A s'écrit A^2. L'expression $A+B^2$ désigne la somme de A et de B^2, tandis que celle $(A+B)^2$ indique le carré de la quantité A+B, ce qui est bien différent, et montre l'importance de faire attention à la parenthèse qui réunit les deux quantités A et B et n'en forme qu'une, eu égard à l'exposant 2.

(36) Le **Cube** ou la **Troisième Puissance** d'une quantité est le résultat de la multiplication de cette quantité par elle-même, et de ce premier produit de nouveau sar cette quantité. Ainsi 1000 est le cube de 10, car $10\times10=100$ et $100\times10=1000$. Le cube de 10 s'écrit 10^3 comme celui de A s'écrit A^3 et celui de A.B, $\overline{A.B}^3$ ou $(A.B)^3$.

(37) **La Racine Carrée** ou simplement la **Racine** d'une quantité est celle qui multipliée par elle-même produit cette quantité ; ainsi 10 est la racine carrée de 100, parce que $10\times10=100$. Cette racine s'indique par le signe radical $\sqrt{}$, avec ou sans le chiffre 2 placé entre les branches du radical ;

ainsi, $\sqrt[2]{5}$ ou simplement $\sqrt{5}$ indique la racine carrée de 5 ou le nombre qui multiplié par lui-même donne 5 pour produit. De même $\sqrt{A+B}$ et $\sqrt{A\times B}$ indiquent, la première la racine carrée de la somme de A et B, la seconde celle du produit de ces deux quantités.

(38) **La Racine Cubique** d'une quantité est celle qui étant multipliée par elle-même, et le résultat de nouveau par cette racine, produit cette quantité; ainsi, 10 est la racine cubique de 1000, puisque 1000 est le résultat de la multiplication de la racine 10 d'abord par elle-même, et du premier produit 100 encore par 10. Cette racine s'indique $\sqrt[3]{1000}$, comme celle de A s'écrit $\sqrt[3]{A}$ et celle de A+B, $\sqrt[3]{A+B}$; tandis que $\sqrt[3]{A}+B$ indique au contraire la somme de B et de la racine cubique de A. De même $\sqrt[3]{A\times B\times C}$ désigne la racine cubique du produit continu (41) des trois quantités A, B, C.

(39) On indique encore les racines par des exposants fractionnaires; ainsi $A^{\frac{1}{3}}$ est la même chose que $\sqrt[3]{A}$, chacune de ces expressions signifiant la racine cubique de la quantité A, et $(A\times B)^{\frac{1}{2}}$ indique, comme $\sqrt{A\times B}$, la racine carrée du produit de A par B.

(40) Rien n'empêchera, comme on le verra par la suite, de considérer le **carré** ou le **cube fait sur une ligne** comme le **carré** ou le **cube de cette ligne**; et semblablement, on pourra considérer comme **racine d'un carré ou d'un cube géométrique** la ligne sur laquelle ce carré ou ce cube est fait, c.-à-d. le côté de ce carré ou de ce cube.

(41) On entend par **Produit Continu** d'une ou de plusieurs quantités, le résultat provenant de la multiplication de cette quantité par elle-même, s'il n'y en a qu'une, et du produit de nouveau par cette même quantité, et ainsi de suite; ou, des deux premières quantités l'une par l'autre, quand il y en a plusieurs, et de leur produit par la troisième quantité, et ainsi de suite.

Le cube d'un nombre est donc un produit continu de ce nombre; et si l'on prouve, comme on le fera par la suite

que la solidité d'un prisme, par exemple, s'obtient en multipliant sa largeur par sa longueur pour obtenir d'abord la surface de la base, et cette surface ensuite par la hauteur ou épaisseur du prisme pour en déduire le nombre d'unités de mesure cubique qu'il contient ; il sera vrai de dire de ce prisme que sa solidité est égale au produit continu de sa largeur, longueur et hauteur.

(42) S'il s'agissait d'un **Quotient Continu**, l'on prendrait ces mots dans un sens analogue. En effet, prenant encore le cas du prisme, il est clair que si, d'après l'hypothèse faite dans le dernier par., on divisait sa solidité par sa hauteur, on reviendrait à la surface de sa base ou au produit de sa largeur et longueur. Ce premier résultat ou quotient divisé par la longueur du prisme donnerait enfin pour quotient continu sa largeur, ou si l'on divisait ce premier résultat par la largeur du prisme on aurait sa longeur.

Tout ceci est clair, car s'il est vrai qu'on arrive à la solidité du prisme par le produit continu de ses trois dimensions ou éléments, l'on reviendra de même à ces éléments par la division qui décompose ou défait ce que fait la multiplication (22).

(43) On entend par **Multiple** d'une quantité le produit de cette quantité par un nombre quelconque plus grand que l'unité ; ainsi, 10 est un multiple de la quantité 5 par un nombre 2 ou de 2 par 5. Le double, le triple, etc., d'une quantité sont donc autant de multiples différents de cette quantité ; tels sont 2A, 3A, nA, etc., ou mB, nB, rB, etc.

(44) **Sous-multiple, Fraction** ou **Partie** d'une quantité est le résultat de la multiplication de cette quantité par un nombre quelconque plus petit que l'unité, ou ce qui revient au même, c'est le résultat de la division de cette quantité par un nombre quelconque plus grand que l'unité. Ainsi, 10 multiplié par $\frac{1}{2}$ ou divisé par 2 donne pour sous-multiple le nombre 5, et $\frac{1}{2}$A, $\frac{1}{3}$A, $\frac{1}{4}$A, etc., ou $\frac{1}{m}$B, $\frac{1}{n}$B, $\frac{1}{r}$B, etc., sont

autant de parties, fractions ou sous-multiples différents des quantités A et B.

(45) Les **Multiples** ou **Sous-multiples Egaux** d'une ou de plusieurs quantités sont évidemment les produits ou quotients de ces quantités par un même nombre ; par exemple, 2A, 2B sont des multiples égaux de quantités A et B, et si les quantités elles-mêmes sont égales, leurs multiples égaux le sont aussi ; de même $\frac{1}{3}$A, $\frac{1}{3}$B sont des parties égales ou sous-multiples égaux des quantités A, B et sont évidemment égaux ou inégaux suivant que les quantités A, B dont ils font partie sont égales ou inégales.

(46) Il suit clairement du dernier par. que si deux quantités quelconques A, B sont ensemble égales à une troisième quantité C, la somme des multiples ou sous-multiples égaux des deux premières est égale au multiple ou au sous-multiple ou partie correspondante de la troisième. Si, par exemple, la somme de A et B est égale à C, il est évident que la somme des doubles, triples, ou multiples quelconques des deux premières quantités est égale au double, triple, ou au multiple correspondant de la troisième ; et que la somme des moitiés, tiers, ou parties quelconques de A et de B est égale à la moitié, tiers, ou partie correspondante de C.

(47) Le rapport (31), ou (58) la relation entre deux ou plusieurs quantités de même espèce peut s'exprimer en nombres soit exactement soit approximativement ; et dans ce dernier cas on peut porter l'approximation à un degré tel qu'elle diffère du rapport exact d'nne quantité moindre que la plus petite quantité assignable.

(48) Par exemple, de deux quantités de même espèce, on peut en concevoir une divisée en un nombre quelconque de parties égales, et prenant pour **unité de mesure** une de ces parties, on peut exprimer cette quantité ou son étendue par le nombre d'unités qu'elle contient. Si maintenant l'autre quantité contient un nombre exact quelconque de ces unités, les deux **Quantités** sont appelées **Commensurables**, c.-à-d. ayant une mesure commune.

Ainsi, 10 et 15 sont commensurables, soit que l'on prenne 5 ou 1 pour unité de mesure; chacune de ces quantités divisant exactement les deux nombres. D'ailleurs tout nombre entier est divisible par l'unité, et sous ce point de vue, deux ou plusieurs nombres entiers quelconques peuvent toujours être réputés commensurables.

(**49**) S'il s'agissait des fractions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ dont on n'aperçoit pas au premier abord la commensurabilité, l'on aurait en les réduisant au même dénominateur $\frac{5}{15}$ et $\frac{3}{15}$; ce qui prouve que chacune de ces fractions est divisible par $\frac{1}{15}$ et que leur rapport est celui de 5 à 3, c.-à-d. $\frac{5}{3}$ (**31**). De même, si la base d'un rectangle (**166**) était $4\frac{1}{3}$ et sa hauteur $3\frac{1}{4}$, il est clair que prenant pour unité de mesure $\frac{1}{12}$, on obtiendrait en nombres entiers le rapport exact de ces deux dimensions; or $4\frac{1}{3}=\frac{52}{12}$ et $3\frac{1}{4}=\frac{39}{12}$, ce qui donne pour rapport entre ces quantités 52 à 39.

Dans le cas d'un solide (**119**) dont la longueur serait $\frac{1}{2}$, la largeur $\frac{7}{8}$ et la hauteur $2\frac{1}{16}$, réduisant le tout en 16ièmes, on aurait le rapport des côtés de ce solide l'un à l'autre comme 24 à 14 à 33. L'unité de mesure dans ce dernier cas serait donc $\frac{1}{16}$, et si les côtés du solide étaient exprimés en pieds, leur unité de mesure commune serait évidemment $\frac{1}{16}$ de pied. Si au contraire les côtés étaient exprimés en pouces ou en lignes, l'unité de mesure contenue un nombre exact de fois dans chacun de ces côtés serait $\frac{1}{16}$ de pouce ou $\frac{1}{16}$ de ligne et ainsi de suite.

(**50**) Il est donc évident que si l'on ne pent d'abord trouver une unité de mesure qui puisse diviser exactement deux ou plusieurs quantités quelconques de même espèce, on parviendra néanmoins le plus souvent à opérer cette division au moyen d'une unité de mesure de plus en plus petite; mais s'il n'y a aucune unité de mesure assignable qui soit contenue un nombre exact de fois dans chacune des quantités à diviser, ces **Quantités** sont alors appelées **Incommensurables.**

Le côté et la diagonale d'un carré offrent un exemple de

cette incommensurabilité, puisque, comme on le verra (398), il n'est pas possible de trouver une unité de mesure, si petite qu'elle soit, capable de diviser exactement ces deux quantités.

(**51**) Cependant, comme nous l'avons déjà dit (**47**), on peut porter l'approximation à un degré tel que le rapport trouvé diffère du rapport exact d'une quantité moindre qu'aucune quantité assignable. En effet, si l'on demandait à exprimer en décimales le rapport de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{3}$, on écrirait $\frac{2}{10}$ à $\frac{3}{10}$ ou 0.2 à 0.3; mais $\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}$; donc le rapport tel que ci-dessus exprimé diffère du rapport réel, de la trentième partie de l'unité prise pour mesure.

Maintenant posons $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{3}$ comme $\frac{20}{100}$ à $\frac{33}{100}$ ou comme 0.20 à 0.33 ou enfin, ce qui est la même chose, comme 20 à 33, et l'approximation se trouve portée à $\frac{1}{300}$ près; car $\frac{1}{3}$ est évidemment égal à $\frac{33\frac{1}{3}}{100}$; or le tiers de un centième qu'on néglige équivaut à $\frac{1}{300}$; donc le rapport des deux quantités données, tel qu'exprimé par 20 à 33 est encore fautif, mais d'une quantité dix fois moindre que le rapport indiqué par 2 à 3. Ajoutant aux décimales un troisième chiffre, on obtient $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{3}$ comme $\frac{200}{1000}$ à $\frac{333}{1000}$ ou comme 200 à 333, et cette troisième expression ne diffère du rapport réel que de la fraction $\frac{1}{3000}$, c.-à.d. de la trois millième partie de l'unité de mesure contenue dans les nombres 200 et 333, termes du rapport.

Il est clair qu'en continuant ainsi à ajouter des chiffres à la droite des deux décimales, (ce qui se fait, ne l'oublions pas, en ajoutant aux numérateurs des fractions ordinaires, des zéros, et en continuant à diviser par les dénominateurs) on porterait l'approximation à $\frac{1}{30.000}$ près, puis à $\frac{1}{300.000}$, enfin à $\frac{1}{3.000.000}$ près, et ainsi de suite; l'erreur ou la différence entre le rapport réel et le rapport approximatif diminuant toujours dans une proportion décuple pour chaque chiffre additionnel des deux nombres décimaux.

(**52**) Pour le cas cité dans l'avant dernier par., c.-à-d. celui du côté et de la diagonale d'un carré, cette diagonale, comme

on aura occasion de le démontrer plus tard (**310**), est égale à la racine carrée du nombre d'unités de mesure contenues dans la somme des carrés de deux des côtés de la figure, ou ce qui est la même chose, de deux fois le carré d'un de ses côtés. Cela posé, il n'y aura qu'à extraire cette racine à 2, 3, 4, 5, 6 ou à un plus grand nombre de décimales près, pour obtenir le rapport voulu à $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1.000}$, $\frac{1}{10\,000}$, $\frac{1}{100.000}$ ou enfin à $\frac{1}{1.000.000}$ près et même au-delà si c'est requis ; ce rapport étant approximativement celui de 1.4142136 à $\frac{1}{10.000.000}$ près.

(**53**) Nous trouverons (**672**) un autre cas d'incommensurabilité dans le diamètre et la circonférence d'un cercle, dont nous traiterons ci-après ; mais qu'il suffise ici d'observer que la quadrature du cercle ou ce qui revient au même, le rapport du diamètre à la circonférence est déjà connu à un degré d'approximation ou d'exactitude bien au-delà de tout ce qui peut jamais être nécessaire à l'homme non seulement dans le calcul des dimensions du globe qu'il habite ou des distances planétaires ; mais encore de celles des astres les plus éloignés que peut découvrir l'astronome à l'aide des plus puissants télescopes, ou de ceux même qu'il pourrait découvrir avec des instruments d'optique mille fois plus puissants que ceux qu'il possède déjà.

Cette approximatton du rapport du diamètre à la circonférence a déjà été portée à plus de six cents chiffres décimaux ; et l'on verra de combien ce rapport doit se rapprocher du rapport réel et comme il importe peu d'arriver à ce rapport, par le fait que des 600 chiffres décimaux dont nous venons de parler, il snffit d'en faire entrer 10 en compte, pour, du diamètre de la terre supposé connu, déduire la circonférence à un pouce près.

Treize décimales donneraient cette même circonférence à l'épaisseur d'un cheveu près, en supposant que cette épaisseur soit la millième partie d'un pouce ; et il suffirait de 17 décimales pour éviter une erreur de la millième partie d'un pouce dans les 200 millions de lieues contenues dans la lon-

gueur de la circonférence ou orbite de la terre autour du soleil.

Remarque.—Ce que nous venons de dire dans les trois derniers paragraphes, ne peut manquer de convaincre le lecteur de la possibilité d'obtenir et d'exprimer en nombres, dans tous les cas possibles et avec toute l'exactitude désirable, le rapport entre deux ou plusieurs quantités quelconques de même espèce.

(**54**) On rendra quelquefois par le signe ∴ (trois points disposés en forme de triangle) l'expression **c'est pourquoi, donc, de là il suit,** et d'autres expressions analogues qui sont d'un fréquent usage dans les démonstrations géométriques.

(**55**) Les **nombres entre parenthèses** renvoient aux paragraphes qui contiennent l'explication ou la preuve de l'énoncé qu'on fait.

(**56**) Par les mots point, ligne, triangle, etc., employés sans qualification, il faudra toujours entendre un point quelconque, une ligne quelconque, un triangle quelconque, etc.

Ainsi, quand on demandera à partager une figure par une ligne passant par un point intérieur, il s'agira d'un point situé à un entroit quelconque dans cette figure ; et quand on aura démontré que la somme des trois angles d'nn triangle rectiligne vaut deux angles droits, cette propriété s'entendra également de tous les triangles rectilignes qu'il soit possible de concevoir.

(**57**) Enfin, pour abréger, on écrira souvent hyp. pour hypothèse, sco. pour scolie, cor. pour corollaire, prob. pour problème, théor. pour théorème, ext. pour extérieur, int. pour intérieur, alt. pour alterne, ax. pour axiôme, prop. pour proposition, ligne ou droite pour ligne droite, courbe pour ligne courbe, fig. pour figure, rect. pour rectiligne, constr. pour construction, parallélogr. pour parallélogramme, etc.

L'expression **donc, etc.**, se rencontre souvent après la démonstration d'un théorème ou d'un énoncé quelconque, la répétition de l'énonciation faite étant toujours sous-entendue.

Par exemple, il est énoncé (322) que deux angles A, B sont égaux si les côtés de l'un sont perpendiculaires à ceux de l'autre. L'on procède ensuite à la preuve de cet énoncé, montrant qu'en réalité A=B comme on l'a dit. Puis on ajoute "donc, etc.," ce qui équivaut à dire "donc deux angles sont égaux si les côtés de l'un sont perpendiculaires à ceux de l'autre."

RAPPORTS ET PROPORTIONS.

(58) On appelle **Rapport** (31) ou **Raison** la relation qu'il y a entre deux ou plusieurs quantités de même espèce (25). Ainsi deux lignes ou surfaces égales ont entre elles le **rapport de l'égalité** et si l'une d'elles est moitié ou double de l'autre, le rapport entre elles est alors de ½ à 1 ou de 2 à 1.

(59) Le rapport entre deux quantités A, B, est évidemment le même que celui entre les nombres d'unités de mesure qui expriment ou que contiennent ces quantités ; car si A=4 et B=2, il est clair que la relation entre A et B est la même que celle entre 4 et 2.

En général, au lieu d'employer comme on le fait ordinairement, des lettres *m*, *n*, *q*, *r*, etc., pour servir de représentants numériques aux quantités A, B, C, D, etc., l'on fera usage des nombres ou chiffres 1, 2, 3, 4, etc., à cause de la plus grande facilité avec laquelle ces nombres se prêtent au raisonnement mental ou aux opérations de l'esprit souvent nécessaires pour arriver à des résultats plus frappants et évidents, et par là même plus satisfaisants que ceux que l'on obtient d'ordinaire au moyen des lettres ; mais à la condition toutefois que ces chiffres 1, 2, 3, 4, etc., représenteront comme les lettres *m*, *n*, *q*, *r*, etc., qu'ils remplacent, toutes autres valeurs numériques ayant entre elles le même rapport que ces lettres.

(60) Si A, B, C, D sont **quatre quantités** telles que le rapport de A à B soit le même que celui de C à D, ou ce qu'

est la même chose, que la seconde soit le même multiple ou sous-multiple de la première que la quatrième de la troisième, ces quantités sont dites **proportionnelles** et donnent $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

En effet, on a déjà vu (31) que $\frac{A}{B}$ ou le quotient de A divisé par B indique le rapport entre ces deux quantités ; mais le rapport de C à D est par hypothèse égal à celui de A à B, donc $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. D'ailleurs, soit A=4, B=2, C=6, D=3, on aura 4 à 2 comme 6 à 3, or $\frac{4}{2}=2$ et $\frac{6}{3}=2$, donc $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ et toutes autres valeurs numériques proportionnelles que l'on assignerait aux quantités A, B, C, D, donnerait évidemment des résultats semblables (59).

(**61**) Réciproquement, si $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, on aura A à B comme C à D ; car si deux paires de quantités ayant l'une à l'autre le même rapport, donnent par division des quotients égaux (**60**), de même deux paires de quantités à quotients égaux seront proportionnelles.

En effet, puisque par hypothèse $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, soit A=4, B=2, l'on aura $\frac{A}{B}=\frac{4}{2}=2$; mais $\frac{C}{D}=\frac{A}{B}$, donc $\frac{C}{D}=2$; donc, quelle que soit la valeur numérique que l'on assigne à la quantité C, celle D ne pourra avoir que la moitié de cette même valeur pour produire un quotient $\frac{C}{D}$ égal à celui $\frac{A}{B}$; car si D était plus que moitié de C, il ne serait pas contenu 2 fois dans C, c.-à-d. le quotient $\frac{C}{D}$ serait moindre que 2, et si D était $<\frac{1}{2}$ C, la division donnerait un quotient plus grand, et toutes autres valeurs numériques qu'on assignerait aux quantités A, B, C, donneraient évidemment des résultats semblables (59); donc, quel que soit le rapport de A à B, si celui de C à D lui est égal, on aura A à B comme C à D.

(62) Pour indiquer que le rapport de A à B est égal à celui de C à D, on écrit A : B : : C : D ou A : B = C : D ; ce qui s'énonce **A à B comme C à D.** Cette égalité de deux rapports constitue ce qu'on appelle une proportion.

(63) Les quantités que l'on compare sont appelées **Termes** de la proportion. Au premier, A, et dernier D, on donne le nom d'**Extrêmes** et au second B et troisième C, celui de **Moyens.**

(64) Des quatre quantités proportionnelles, la première et la troisième sont appelés **Antécédents** et la seconde et dernière **Conséquents** ; et la dernière est dite **Quatrième proprotionnelle aux trois autres prises par ordre.**

Rien n'empêche cependant de considérer comme quatrième proportionnelle, l'un quelconque des quatre termes de la proportion. Si par exemple A : B :: C : D, l'on pourra regarder A comme étant quatrième proportionnelle relativement aux trois autres quantités B, C, D, de même que B le serait par rapport à A, C, D, ou C par rapport à A, B, D.

(65) **Trois quantités** A, B, C sont **proportionnelles** quand le rapport de la première à la seconde est le même que celui de la seconde à la troisième. Dans ce cas la seconde est appelée **Moyenne Proportionnelle** entre les deux autres, et la dernière **Troisième Proportionnelle** aux deux autres.

En effet soit A à B comme B à C, l'on aura (60) $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$, comme dans le cas de quatre quantités proportionnelles, ce qui (61) donne A : B :: B : C.

(66) **Deux quantités** sont **réciproquement proportionnelles,** lorsqu'une d'elles augmente dans le même rapport que l'autre diminue. Dans ce cas l'une d'elles est toujours égale à une quantité constante divisée par l'autre, et leur produit est constant.

En effet soient A, B, les deux quantités et $A\times B$ leur produit $=100$; si l'on fait $A=10$, il est clair que B sera aussi $=10$, puisque $100\div10=10$ ou que $10\times10=100$. Si l'on fait

A=20 on aura B=5; car 20×5=100, et ainsi de suite. D'ailleurs, il est clair que B étant le quotient de A.B par A ou de 100 par A, A.B ou 100 est aussi le produit de B par A, et puisque ce produit est constant, il faut qu'une des deux quantités augmente à mesure que l'autre diminue; car, si pendant qu'on augmente le diviseur le quotient restait constant ou augmentait aussi, il est évident que le produit du diviseur par le quotient donnerait une quantité plus grande que 100 qui par hyp. est égale à la quantité constante. Toutes autres valeurs numériques que l'on assignerait à A, B, donneraient évidemment des résultats semblables.

L'inverse de ce qui vient d'être énoncé est également vrai ; c.-à-d. si le produit de deux quantités est constant, ou si l'une de ces quantités est toujours égale à une quantité constante divisée par l'autre, ces deux quantités seront réciproquement proportionnelles.

(67) A part la signification du mot **Réciproquemnet,** telle que donnée dans le dernier par., dans l'expression " quantités réciproquement proportionnelles," ce mot signifiera ordinairement que si une proposition est vraie, l'inverse de cette proposition est aussi vrai. Par exemple, lorsqu'on dit " les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux et réciproquement ;" le mot réciproquement ainsi employé signifie que l'inverse de cet énoncé est également vrai, c.-à-d. que " lorsque les angles à la base d'un triangle sont égaux ce triangle est isocèle."

REMARQUE.

Les propositions de la Géométrie, comme de toute autre science exacte, sont des vérités générales et comme telles doivent s'énoncer en termes généraux et sans l'usage de figures particulières.

Cependant, à dessein de fixer l'œil et de faciliter à l'esprit la faculté de l'abstraction que la Géométrie a surtout pour

but de fortifier, les termes généraux qui servent à l'énonciation de ces vérités sont imprimés en caractère plus noir et de manière à fournir dans chaque cas un sens complet, indépendamment du reste du texte de la proposition.

Pour rendre ce traité aussi concis que possible, on a cru devoir dans chaque cas intercaler dans le texte de l'énonciation les lettres nécessaires pour renvoyer de suite aux figures employées dans la démonstration de l'énoncè. On évite de cette manière la nécessité d'une double énonciation comme celle d'Euclide et de beaucoup d'autres auteurs, puisqu'en lisant d'abord le texte avec l'omission des lettres et autres mots intercalés, l'on obtient une énonciation abstraite ou générale ; tandis que cette même énonciation devient concrète ou particulière, en faisant entrer en compte les lettres et mots intercalés.

Ainsi, prenant pour exemple l'énoncé de la prop. VIII qui est comme suit, "**les côtés** AB, CD et AC, BD, **et les angles** C, B et A, D **opposés d'un parallélogramme** AD **sont égaux et la diagonale** CB **bissecte le parallélogramme, c.-à-d. le partage en deux triangles égaux** ABC, DBC ;" cet énoncé sera concret ou particulier, c.-à-d. s'appliquera à la figure dans le texte en lisant les lettres de renvoi ; mais deviendra abstrait ou général en omettant ces lettres comme ci-dessous. "**Les côtés et les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux et la diagonale bissecte le parallélogramme, c.-à-d. le partage en deux triangles égaux,**" et comme tel s'entendra de tout autre parallélogr. qu'on ponrrait concevoir, c.-à-d. d'un parallélogr. quelconque.

De même, au Corollaire 4 de la proposition suivante, les parties du texte qui sont en caractère noir suffisent seules pour attirer l'attention sur le problème proposé, celui de "**faire un parallélogramme égal à un triangle donné et ayant un angle égal à un angle donné,**" et comme dans le dernier cas, cet énoncé devient concret, lorsqu'en le lisant on fait entrer en compte les lettres de renvoi qui s'y rencontrent.

AXIOMES.

(68) **Les quantités qui sont égales à une même quantité ou à des quantités égales sont égales entre elles.**

(69) **Les quantités qui sont moitiés ou doubles d'une même quantité ou de quantités égales sont égales entre elles, et :**

(70) **Cor.** En général (45) **les quantités qui sont des multiples ou sous-multiples égaux quelconques d'une même quantité ou de quantités égales sont égales entre elles.**

(71) **Sco.** Etre égal à une quantité, double ou moitié de cette quantité ou un multiple ou sous-multiple quelconque de cette quantité, n'est autre chose que d'avoir à cette quantité un certain rapport (58), soit celui de l'égalité ou celui de 2 à 1, ou de $\frac{1}{2}$ à 1, ou, etc. Si deux quantités, par exemple, sont chacune les $\frac{2}{3}$ d'une autre quantité, elles ont à cette quantité le même rapport, c.-à-d. celui de 2 à 3 ; et en général : si deux quantités sont chacune le même multiple ou sous-multiple quelconque d'une autre quantité elles ont à cette quantité le même rapport ; donc :

(72) **Les quantités qui ont le même rapport à une autre quantité sont égales entre elles, et celles auxquelles la même quantité a le même rapport sont égales entre elles.**

(73) **Si deux ou plusieurs quantités ont l'une à l'autre un rapport donné, les multiples ou sous-multiples égaux de ces quantités auront aussi entre eux le même rapport.**

Si deux quantités A, B, par exemple, ont l'une à l'autre le rapport de 1 à 2 ou de 2 à 3, les doubles, triples, etc., de ces quantités, ainsi que leurs moitiés, tiers, etc., auront l'un à l'autre le même rapport de 1 à 2 ou de 2 à 3, ce qui est clair.

(74) Sco. Les rapports entre deux ou plusieurs quantités ne sont autre chose que des nombres (59), et les nombres égaux à un même nombre sont égaux entre eux (68, **Ax.**); donc :

(75) **Les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux.** Si A : B :: C : D et E : F :: C : D, l'on aura par cet axiome A : B :: E : F, ce qui est évident; car si le rapport de C à D est celui de 2 à 3 ou tout autre, chacun des autres rapports sera aussi celui de 2 à 3 ou le même que celui de C à D et ces rapports seront égaux.

(76) **Si à des quantités égales, on ajoute des quantités égales, les touts seront égaux; et si on leur ajoute des quantités inégales, les touts seront inégaux.**

(77) **Si de quantités égales, on soustrait des quantités égales ou inégales, les restes seront égaux ou inégaux suivant le cas.**

(78) **Si l'on multiplie des quantités égales par des quantités égales, ou inégales, les produits seront égaux ou inégaux suivant le cas**; car, multiplier une quantité, n'est autre chose qu'ajouter cette quantité à elle-même un certain nombre de fois, ce qui réduit cet ax. à celui du paragraphe (76).

(79) **Si l'on divise des quantités égales par des quantités égales ou inégales, les quotients seront égaux ou inégaux suivant le cas**; car, diviser une qnantité, n'est autre chose que soustraire de cette quantité une autre quantité un certain nombre de fois, ce qui indique l'analogie de cet ax. à celui du paragraphe (77).

(80) Sco. Puisque (59) les rapports entre quantités ne sont autre chose que des nombres, ou peuvent toujours s'exprimer en nombres (47); un rapport composé d'autres rapports est un nombre composé d'autres nombres; mais par les quatre derniers axiomes, les opérations faites sur des quantités égales donnent pour résultats des quantités égales ou inégales, suivant que les termes et facteurs sont égaux ou inégaux, et les nombres sont des quantités (24); donc :

(81) **Les rapports qui sont composés des mêmes rapports sont égaux entre eux.** Par exemple, si l'on a A à B à C comme D à E à F, on aura par cet axiome A : C :: D : F, ou le rapport de A à C qui est composé de ceux de A à B et de B à C est égal à celui de D à F qui est composé de ceux de D à E et de E à F. Si A, B, C=2, 4, 8 et D, E, F=3, 6, 12, on aura 2 : 8 :: 6 : 12, puisque 2 est le quart de 8 comme 3 est le quart de 12, et toutes autres valeurs numériques proportionnelles que l'on assignerait aux quantités A, B, C et D, E, F, donneraient des résultats semblables ; donc, etc.

Si les rapports à comparer étaient composés chacun de plus de deux rapports, leur égalité serait non moins évidente.

(82) **Les quantités égales ont à la même quantité le même rapport** ; c.-à-d., si deux quantités sont égales et que l'une d'elles ait à une troisième quantité un certain rapport, l'autre aura à cette troisième quantité le même rapport (71) ; ce qui est clair.

(83) Réciproquement, **Si une quantité est à une seconde quantité dans un certain rapport, elle aura le même rapport à toute autre quantité égale à la seconde.**

(84) **Le tout est égal à la somme de ses parties.**

Cor. Le tout est plus grand que l'une quelconque de ses parties.

(85) **Les grandeurs qui coincident l'une avec l'autre, c'est-à-dire qui remplissent exactement le même espace sont égales entre elles.**

THÉORÈME I.

(86) **Quand quatre quantités** A, B, C, D **sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.**

En effet, puisque A, B, C, D sont quatre quantités quelconques de même espèce, et que (59) le rapport entre ces quantités est le même que celui entre les nombres d'unités

de mesure qui les composent ; soient 4, 2, 6, 3 leurs représentants numériques ; on aura 4 : 2 :: 6 : 3, et (60) $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$; mais le premier terme $4=2\times\frac{6}{3}$ ou $4\times3=2\times6$; c.-à-d. le produit du premier terme par le dernier est égal à celui du second terme par le troisième, et toutes autres valeurs numériques proportionnelles de A, B, C, D donneraient le même résultat ; donc, etc.

(87) **Cor. S'il n'y a que trois quantités proportionnelles A, B, C, telles que A : B :: B : C (65), on aura le produit des extrêmes égal au carré du moyen** ; car $A\times C=B\times B=B^2$.

THÉOR. II.

(88) **Si le produit de deux quantités A, D, est égal à celui de deux autres quantités B, C, deux de ces quantités sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyens.**

En effet, s'il était possible que dans ce cas le rapport de A à B ne fut pas le même que celui de C à D, il arriverait aussi dans ce même cas que quatre quantités non proportionnelles A, B, C, D donneraient le produit des extrêmes égal à celui des moyens. Soient 4, 2, 6, 2 les représentants numériques de ces quantités, l'on aura $4\times2=8$, produit des extrêmes, et $6\times2=12$, produit des moyens. Or le produit des extrêmes est dans ce cas plus petit que celui des moyens.

En second lieu, soit D=4 ; on aura pour A, B, C, D, les valeurs 4, 2, 6, 4, ou $4\times4=16$, produit des extrêmes, contre $2\times6=12$, produit des moyens ; et dans ce second cas le produit des extrêmes est encore inégal à celui des moyens, étant plus grand que ce produit.

Mais 2, 4 sont des valeurs numériques quelconques assignées à la quantité D, ayant à C, la première un rapport plus petit et la seconde un rapport plus grand que le rapport de B à A, et ni l'une ni l'autre de ces valeurs n'a pu donner le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

Il est donc de rigueur que les quatre quantités soient pro-

portionnelles pour que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, et réciproquement si le produit des extrêmes est égale à celui des moyens les quatre quantités sont proportionnelles; donc, etc.

(89) Cor. **Si le produit de deux quantités est égal au carré d'une autre quantité, cette dernière est moyenne proportionnelle entre les deux premières.**

(90) **Sco. 1. PROB.** Il suit du dernier théorème que pour **trouver une quatrième proportionnelle** D **à trois quantités données** A, B, C, il n'y a qu'à faire (24) le produit des moyens B, C, et diviser ce produit par l'extrême connu A, pour avoir le quatrième terme D. Si le terme inconnu est un des moyens, on le trouvera également en divisant par l'autre moyen le produit des extrêmes.

En effet, soient 4, 2, 6, les représentants numériques (59) de A, B, C; l'on aura $D=\frac{B\times C}{A}=\frac{2\times 6}{4}=3$; or $4:2::6:3$, puisque $3\times 4=2\times 6$ (88) ou que d'ailleurs 3 est moitié de 6 comme 2 est moitié de 4; et toutes autres valeurs numériques de A, B, C, prouveraient de même la solution du problême.

(91) **Sco. 2. PROB.** Puisque, si l'on a $A:B::B:C$ (87), $A\times C=B\times B=B^2$, il est clair que **pour trouver une moyenne proportionnelle à deux quantités données,** il faut faire le produit de ces deux quantités et extraire la racine (37) carrée de ce produit.

(92) **Sco. 3. PROB. Trouver une troisième proportionnelle à deux quantités données** A, B, se fera évidemment en carrant le terme moyen, c.-à-d. (35) en le multipliant par lui-même et en divisant ce produit par l'extrême connu. Soit $A=8$, $B=4$, on aura $B\times B$ ou $B^2=4\times 4$ ou $4^2=16$, et $16\div 8=2$ qui est la troisième proportionnelle cherchée; mais $8:4::4:2$ puisque chacun des antécédents est double de son conséquent respectif, et toutes autres valeurs numériques assignables à A, B, donneraient le même résultat.

THÉOR. III.

(93) **Si quatre quantités quelconques A, B, C, D sont proportionnelles, elles le sont encore par Inversion ou Invertendo ;** c'est-à-dire en prenant antécédents pour conséquents et conséquents pour antécédents.

La Proportion A : B :: C : D donnera donc par inversion B : A :: D : C. Soit A=4, B=2, C=6, D=3, on aura (59) 2 : 4 :: 3 : 6, ce qui est clair puisque 2 est moitié de 4 comme 3 est moitié de 6. D'ailleurs, 2×6=4×3 (88) et toutes autres valeurs numériques proportionnelles que l'on supposerait aux quantités sous considération donneraient le même résultat ; donc, etc.

THÉOR. IV.

(94) **Quatre quantités proportionnelles, le sont encore alternando ;** c.-à-d., si A : B :: C : D, on aura en prenant ces quantités **alternativement** A : C :: B : D.

En effet, si comme auparavant A=4, B=2, C=6, D=3, on aura A=4 : C=6 :: B=2 : D=3, ou 4 : 6 :: 2 : 3 puisque 4 sont les $\frac{2}{3}$ de 6 et 2 les $\frac{2}{3}$ de 3 ; d'ailleurs, on a toujours (88) 4×3=6×2 ou A×D=B×C et tous autres représentants numériques proportionnels des quantités A, B, C, D, donneraient évidemment le même résultat ; donc, etc.

THÉOR. V.

(95) **Quatre quantités proportionnelles le sont encore par Composition ou Componendo,** ce qui signifie que si A : B :: C : D, on aura A+B : B :: C+D : D, ou la somme des deux premiers termes est au second terme, comme la somme des deux derniers termes est au quatrième terme.

En effet, supposant toujours à A, B, C, D, les mêmes valeurs numériques 4, 2, 6, 3, on aura pour l'expression

A+B : B :: C+D : D, celle 4+2 : 2 :: 6+3 : 3 ; mais 4+2=6 et 6+3=9 et 6 : 2 :: 9 : 3, ce qui est encore évident puisque 2 est le tiers de 6 et 3 le tiers de 9, ou que (88) 6×3=2×9 ; et tous autres représentants numériques proportionnels de A, B, C, D donneraient le même résultat ; donc, etc.

THÉOR. VI.

(96) **Quatre quantités proportionnelles, le sont encore par Division ou Dividendo** ; c.-à-d. si A : B :: C : D, on aura par ce théorème A—B : B :: C—D : D, ou la différence entre le premier antécédent et son conséquent est à ce conséquent comme la différence entre le second antécédent et son conséquent est à ce conséquent.

En effet, prenant encore 4, 2, 6, 3 pour représentants numériques des quatre quantités dont il s'agit, on remplacera l'expression A—B : B :: C—D : D, par celle 4—2 : 2 :: 6—3 : 3 ou par 2 : 2 :: 3 : 3, puisque 4—2=2 et 6—3=3, ce qui donne toujours le produit des extrêmes 2×3 égal à celui des moyens et prouve (88) que les quantités sont proportionnelles ; car tous autres représentants numériques proportionnels des quantités dont il s'agit donneraient le même résultat ; donc, etc.

(97) **Sco.** On vient de voir par les deux derniers théorèmes que si l'on augmente ou si l'on diminue les antécédents de quatre proportionnelles, de quantités égales aux conséquents, ces antécédents ainsi augmentés ou diminués seront encore proportionnels aux conséquents ; mais augmenter ou diminuer les antécédents d'une proportion, de quantités égales aux conséquents, n'est autre chose qu'augmenter ou diminuer ces antécédents de quantités ayant entre elles le rapport des conséquents, et les multiples ou sous-multiples quelconques de ces conséquents ont entre eux le même rapport que les conséquents eux-mêmes (73) ; donc :

Cor. 1. **En général si l'on augmente ou si l'on diminue les antécédents d'une proportion, de quantités propor-**

tionnelles aux conséquents, les conséquents seront encore proportionnels aux quantités résultantes.

Cor. 2. **Si l'on augmente ou si l'on diminue les conséquents d'une proportion de quantités proportionnelles aux antécédents, les antécédents seront encore proportionnels aux quantités résultantes**; car, alternando, l'énoncé deviendrait le même que celui du dernier cor.

THÉOR. VII.

(98) **Quatre quantités proportionnelles le sont aussi par conversion ou convertendo**; c'est-à-dire en comparant le premier antécédent avec la différence entre cet antécédent et son conséquent, et le second antécédent avec la différence entre cet antécédent et son conséquent.

De cette manière A : B :: C : D donnera A : A—B :: C : C —D, ou 4 : 2 :: 6 : 3 s'écrira 4 : 4—2 :: 6 : 6—3 ; mais 4—2=2, et 6—3=3, et 4 : 2 :: 6 : 3 puisque comme toujours 4×3=2×6, et que toutes autres valeurs numériques proportionnelles que l'on pourrait assigner à A, B, C, D, donneraient le même résultat ; donc, etc.

THÉOR. VIII.

(99) **Si dans deux séries de quantités proportionnelles, les antécédents sont les mêmes, les conséquents seront proportionnels.**

Soient A : B :: C : D et 4 : 2 :: 6 : 3 leurs représentants numériques ; soient aussi A : E :: C : F et 4 : 8 :: 6 : 12 leurs représentants numériques ; il est à démontrer que B : D :: E : F ou que 2 : 3 :: 8 : 12.

En effet le produit des extrêmes 2×12=24 est égal à celui des moyens 3×8=24 (86) et d'ailleurs on voit que 2 sont les deux tiers de 3 de même que 8 sont les $\frac{2}{3}$ de 12 et tous autres représentants numériques proportionnels des quantités A, B, C, etc., donneraient le même résultat ; donc, etc.

(100) Sco. On prouverait aussi les antécédents proportionnels si les conséquents étaient les mêmes.

(101) Cor. Si dans deux séries de quantités proportionnelles il y avait un antécédent et un conséquent de la première respectivement égaux à un antécédent et conséquent de la seconde, les autres termes seraient proportionnels ; car, alternando, c'est-à-dire (94) en faisant le premier terme au troisième comme le second au quatrième dans chacune des séries, l'énonciation deviendrait la même que celle de ce théor. et se démontrerait de la même manière.

THÉOR. IX.

(102) Si l'on a un nombre indéfini de quantités proportionnelles ; l'un quelconque des antécédents sera à son conséquent comme la somme de tous les antécédents à celle de tous les conséquents.

Soit A : B :: C : D :: E : F etc., on aura d'après ce théor. A : B :: A+C+E : B+D+F. Puisque A : B :: C : D, on a (86) A×D=B×C et puisque A : B :: E : F (**75, Ax.**), on a A×F=B×E ; ajoutons à ces produits ceux A×B=B×A et l'on a A.B+A.D+A.F=B.A+B.C+B.E, c'est-à-dire A×(B+D+F)=B×(A+C+E) ; donc (88) A : B :: A+C+E : B+D+F ; donc, etc.

THÉOR. X.

(103) S'il y a deux séries de quantités proportionnelles ; les produits des termes correspondants seront proportionnels.

Soit A : B :: C : D et E : F :: G : H, on aura A×E : B×F :: C×G : D×H ; car, puisque A×D=B×C et E×H=F×G l'on a A×D×E×H=B×C×F×G ou A×E,×D×H=B×F,×C×G ; or, si les produits de deux paires de quantités sont égaux ces quantités sont proportionnelles (88) ; donc A×E : B×F :: C×G : D×H.

D'ailleurs, si les représentants numériques des deux proportions sont respectivement 4, 2, 6, 3 et 3, 4, 6, 8, on devra avoir par ce théor. $4 \times 3 : 2 \times 4 :: 6 \times 6 : 3 \times 8$ ou $12 : 8 :: 36 : 24$; or $12 \times 24 = 8 \times 36$, et tous autres représentants numériques proportionnels des quantités A, B, C, etc., donneraient le même résultat; donc, etc.

Autrement. Puisque $A : B :: C : D$, on a $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et puisque $E : F :: G : H$, on a $\frac{E}{F} = \frac{G}{H}$; mais si l'on multiplie des quantités égales par des quantités égales, les produits seront égaux (78, **Ax.**); donc $\frac{A}{B} \times \frac{E}{F} = \frac{C}{D} \times \frac{G}{H}$ ou $\frac{A \times E}{B \times F} = \frac{C \times G}{D \times H}$; d'où l'on tire, comme auparavant, $A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H$.

(104) Cor. 1. Il est clair que si l'on remplace E, F, G, H dans ce théor. par A, B, C, D, on aura $A \times A : B \times B :: C \times C : D \times D$ ou $A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$, et si $A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$ est l'une des séries données et $A : B :: C : D$ l'autre série, il est de même évident que l'on aura $A^3 : B^3 :: C^3 : D^3$; c'est-à-dire : **si quatre quantités sont proportionnelles, leurs carrés et cubes seront aussi proportionnels.**

. On peut de la même manière démontrer que **les puissances ou racines égales quelconques de quantités proportionnelles sont proportionnelles.**

(105) Cor. 2. Les termes F, F, G, H du second rapport du théor. pouvant se remplacer par ceux $E : F :: E : F$, on aura $A \times E : B \times F :: C \times E : D \times F$; ou, ce qui revient au même, **si de quatre quantités proportionnelles on prend des multiples ou sous-multiples égaux quelconques des deux antécédents, et des multiples ou sous-multiples égaux quelconques des deux conséquents; les autres quantités résultantes seront proportionnelles.**

DÉFINITIONS

ET

CONSÉQUENCES QUI EN RÉSULTENT.

---

(106) **Déf.** Un **point** n'a aucune étendue, et doit être considéré seulement sous le rapport de sa position.

(107) **Déf.** Une **ligne** n'a d'étendue que dans le sens de la longueur ; elle n'a donc ni largeur ni épaisseur. Pour s'en former une idée, sa **longueur** peut être considérée comme composée d'un nombre infini de points posés les uns à la suite des autres ; et l'on entendra toujours par ce mot, longueur, le nombre d'unités de mesure linéaire qui composent cette longueur (**24**).

Cor. Les extrêmités d'une ligne sont des points; ces derniers n'ont par conséquent ni longueur, ni largeur, ni épaisseur. **Deux lignes déterminent encore un point à l'endroit de leur intersection.**

(108) **Déf.** Une **ligne droite** AB A————————B est celle dont tous les points sont dans la même direction ; et est aussi, évidemment, **la plus courte distance entre deux points** quelconques. En d'autres termes, une ligne droite indique le plus court chemin pour aller d'un point à un autre. Un fil tendu en donne une bonne idée.

(109) **Cor. 1.** La **direction** de deux points quelconques est celle de la ligne droite qui les unit. **Il suffit** donc de **connaître deux points dans une ligne droite pour déterminer sa direction.**

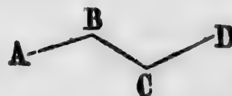
(110) **Cor. 2. Deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace.** Elles ne peuvent pas non plus coincider en partie sans coincider entièrement.

(111) **Cor. 3. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite.**

(112) **Déf.** Une **ligne courbe** CFD est telle que la direction de deux points consécutifs quelconques C, E, est différente de celle de deux autres points consécutifs quelconques E, F, si éloignés ou rapprochés que soient ces points. On peut encore la définir, celle dont tous les points s'éloignent de plus en plus, mais infiniment peu à chaque instant, d'une ligne droite.



(113) **Déf.** Une **ligne brisée** est celle A B C D, composée de lignes droites; et toute ligne qui n'est pas une ligne droite, ou composée de lignes droites, est une ligne courbe.



(114) **Déf.** Une **superficie** ou **surface** n'a d'étendue qu'en longeur et en largeur, et n'a point d'épaisseur. Les limites d'une surface sont évidemment des lignes. Les surfaces déterminent encore des lignes à l'endroit de leurs intersections.

Quoiqu'une ligne n'ait aucune largeur (107), rien n'empêche que pour se former l'idée d'une surface, on ne la suppose composée d'un nombre infini de lignes posées les unes à côté des autres; tout de même qu'on peut considérer une ligne comme composée de points consécutifs.

(115) **Déf.** Un **plan** ou une **surface plane** est celle dans laquelle, prenant deux points quelconques, la ligne droite qui les unit est entièrement dans ce plan. Le dessus ou surface d'une table peut en donner une idée.

(116) **Déf.** Toute surface qui n'est pas plane ou composée de surfaces planes est une **surface courbe.**

(117) **Déf.** Une **figure plane** est un espace renfermé de

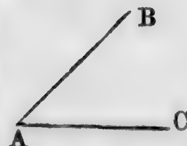
tous côtés par des lignes droites ou courbes situées dans un même plan; et l'ensemble des lignes limitrophes s'appelle **périmètre.**

(118) **Déf.** Le mot **aire, surface** ou **superficie** indique la quantité d'espace superficiel, ou d'unités de mesure de même espèce (24) (48) contenues dans une figure, sans égard à la nature de la figure ou des lignes qui en forment le périmètre.

(119) **Déf.** Un **corps** ou **solide** a de l'étendue tant en longueur qu'en largeur et hauteur ou épaisseur. Quoiqu'une surface n'ait aucune épaisseur (114), rien n'empêche pour se former l'idée d'un solide, de le considérer comme composé d'un nombre infini de surfaces superposées les unes aux autres. Les limites d'un solide sont des surfaces; de même que celles des surfaces sont des lignes; et les extrémités des lignes, des points.

(120) **Déf.** Le mot **solidité** indique la quantité d'espace cubique, ou d'unités de mesure (24) de même espèce contenues dans un solide; sans égard à la nature de la figure, ou des surfaces qui terminent ou contiennent le solide, ou qui en forment les côtés.

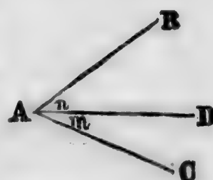
(121) **Déf.** **Un angle rectiligne** B A C est **l'écartement de deux lignes droites** AB, AC, qui se rencontrent en un point A qu'on appelle **sommet** de l'angle.



(122) **Cor. 1. La valeur ou grandeur d'un angle dépend donc du plus ou moins d'écartement des deux lignes droites qui forment cet angle**; c.-à-d., du plus ou moins **d'inclinaison**, l'un à l'autre, des deux **côtés** qui comprennent l'angle.

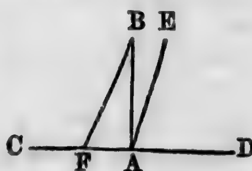
(123) **Cor. 2. Deux angles sont égaux ou inégaux suivant que l'inclinaison des deux côtés de l'un est égale ou inégale à celle des deux côtés de l'autre**; et réciproquement, **si deux angles sont égaux ou inégaux, l'inclinaison des deux côtés de l'un est égale ou inégale à celle des deux côtés de l'autre.**

(124) **Sco. La valeur ou grandeur d'un angle ne dépend** donc **aucunement de la longueur de ses côtés**; puisqu'on pourrait prolonger indéfiniment ces côtés sans altérer leur écartement; c.-à-d., **sans** changer l'inclinaison relative de ces côtés.



(125) **Rem.** Un angle BAC, quand il est seul, peut s'énoncer par une seule lettre A placée à son sommet; mais dans le cas de deux ou plusieurs **angles contigus** m, n, il est évidemment nécessaire de désigner chacun de ces angles par trois lettres B A D, D A C, dont l'une placée au sommet de l'angle, et les deux autres en un point quelconque des côtés qui comprennent ces angles; ayant soin toutefois en les exprimant, de placer entre les deux autres lettres celle qui est située au sommet de l'angle.

(126) **Rem.** En parlant d'un angle quelconque BAD, on ne considère aucunement la surface ou superficie partiellement renfermée par les côtés de l'angle; mais seulement le degré d'inclinaison des deux côtés de l'angle, l'un à l'autre.

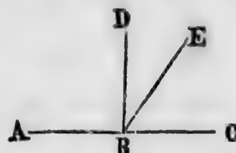


(127) **Déf.** Une **ligne** AB est dite **perpendiculaire** à une autre ligne CD, lorsque la première rencontre la seconde sans pencher ou incliner plus d'un côté que de l'autre. Les deux angles BAC, BAD, ainsi formés, prennent le nom d'**angles droits**, et sont évidemment **égaux l'un à l'autre** (123).

(128) **Cor.** Comme AB, pour former avec CD des angles droits ne doit pencher (127) ni d'un côté ni de l'autre; et que toute autre ligne EA, BF différente de celle AB, et n'ayant avec cette ligne qu'un point commun A, B, est évidemment inclinée à CD; il s'en suit que **par un point donné A sur une ligne droite** CD **ou par un point** B **hors de cette ligne, on ne peut mener qu'une seule ligne** BA **qui soit perpendiculaire à la première.**

(129) **Déf.** Deux angles sont appelés **de même affection**, lorsqu'ils sont tous deux plus grands ou plus petits qu'un angle droit.

(130) **Déf.** Un **angle** EBA, plus grand qu'un angle droit, est dit **obtus ;** et celui EBC, plus petit qu'un angle droit, est dit **aigu.** L'angle EBC qui manque à celui EBA, pour former deux angles droits, se nomme **supplément** de cet angle ; et celui EBD qui manque à EBC, pour former un angle droit, se nomme **complément** de ce dernier.



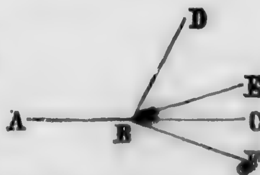
(131) **Déf.** On nomme **angles de suite** ou **angles supplémentaires,** les angles contigus EBC, EBA formés du même côté d'une ligne AC par une autre ligne EB qui rencontre la première.

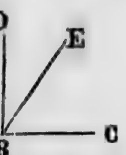
(132) **Cor. I. Les angles supplémentaires sont, ou deux angles droits, ou égaux, pris ensemble, à deux angles droits.**

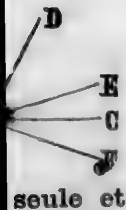
(133) **Sco. I.** Si la **ligne** qui rencontre l'autre lui est perpendiculaire comme BD, les deux angles sont droits (127) ; mais si elle est **oblique** comme EB, il est évident qu'un EBA, des deux angles est d'autant plus grand qu'un angle droit, que l'autre, EBC, est plus petit qu'un angle droit ; et que la somme des deux vaut deux angles droits.

(134) Cor. 2. **La somme de tous les angles ABD, DBE, EBC formés autour d'un même point B et du même côté d'une ligne droite AC, vaut deux angles droits ;** puisque cette somme est égale à celle des angles supplémentaires ABE, CBE (132).

(135) **Cor. 3. Si en un point B dans une ligne droite BD deux autres lignes AB, CB, font les angles contigus ABD, CBD droits, ou égaux pris ensemble à deux angles droits ; ces deux lignes AB, CB ne forment qu'une seule et même ligne droite AC.**



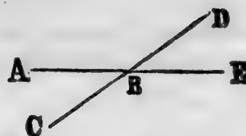




En effet, si ABC n'est pas une ligne droite, elle sera brisée comme celle ABE ou ABF, et formera avec BD deux angles ABD, EBD ou ABD, FBD qui pris ensemble seront plus petits ou plus grands que deux angles droits ; puisque dans le premier cas il manque aux angles ABD, EBD, celui EBC pour former deux angles droits, et que dans l'autre cas, la somme ABD, FBB des deux angles est plus grande que deux angles droits, de la quantité FBC ; la ligne ABC n'est donc pas brisée ; c.-à-d. qu'elle est droite.

(136) **Sco. 2.** On tire encore du dernier cor. comme de la troisième déf. (110), que deux lignes droites ne peuvent coincider en partie sans coincider entièrement.

(137) **Déf.** On nomme **opposés au sommet** ou simplement **opposés** les angles ABC, DBE ou ABD, CBE, formés par deux lignes droites AE, CD, qui s'intersectent en un point B.

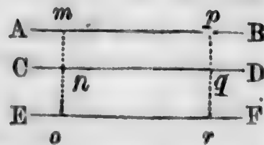


(138) **Cor. 1. Les angles opposés au sommet sont égaux,** puisque les lignes droites CD, AE font que l'inclinaison de DB sur BE est la même que celle de BC sur BA (123).

(139) **Cor. 2.** Il suit du dernier cor. et du par. (132) que **si deux lignes droites se coupent, les angles qu'elles forment au point de leur intersection valent ensemble quatre angles droits.**

(140) **Cor. 3.** Il est clair aussi (134) que **tous les angles faits par un nombre quelconque de lignes droites se rencontrant en un seul point valent ensemble quatre angles droits.**

(141) **Déf.** On doit entendre par **lignes parallèles,** deux ou plusieurs lignes AB, CD, EF situées dans un même plan, partout à la même distance l'une de l'autre, et qui par conséquent étant prolongées à l'infini ne se rencontreraient jamais.



(142) **Sco. I.** On appelle **distance entre deux parallèles** AB, CD ou AB, EF, la perpendiculaire *m n* ou *m o*, menée d'une de ces lignes à l'autre.

(143) **Cor. I.** Si AB est parallèle à CD, la distance *m n* =*pq* par la déf., et si EF est parallèle à CD, *no*=*qr* ; mais, si (**76 Ax.**) à des quantités égales on ajoute des quantités égales les sommes seront égales ; donc *mo*=*pr* ; c.-à-d. que **deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.**

(144) **Sco. 2. D'ailleurs,** la vérité de cette conséquence, comme de toutes celles tirées des défs. contenues dans ce traité, résulte d'une manière tellement évidente de ces défs. mêmes, qu'on peut les regarder comme autant d'axiomes.

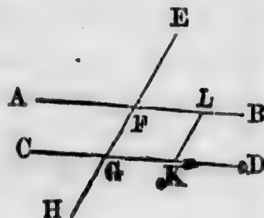
En effet, nous définissons lignes parallèles celles qui sont partout à distances égales l'une de l'autre ; et dire que deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, n'est autre chose qu'avouer que si à des quantités égales on ajoute des quantités égales les touts sont égaux ; vérité que chacun est prêt à admettre sans démonstration, et que nous avons en conséquence mise au nombre des axiomes.

(145) **Cor. 2. Deux lignes qui s'intersectent ou ne sont pas parallèles l'une à l'autre ne peuvent être toutes deux parallèles à la même ligne droite.**

(146) **Sco. 3.** Rien n'empêche de considérer les parties AB, BD ou AC, BD d'une seule et même ligne droite AD comme autant de parallèles situées à une distance infiniment petite l'une de l'autre ; ou ce qui revient au même, **on peut considérer comme parallèles deux ou plusieurs lignes disposées de manière à former partie d'une seule et même ligne droite.**

A — B — C — D

(147) **Déf.** On appelle **correspondants** les **angles** EFB, EGD, ou HFB, HGD tournés dans le même sens, et formés par deux lignes parallèles AB, CD intersectées par une troisième ligne EH.



(148) Cor. 1. **Les angles correspondants sont égaux ;** car, les lignes AB, CD étant parallèles, la direction de chacune d'elles est la même par rapport à la ligne EH. En d'autres mots, EH est également inclinée sur AB et CD et fait par conséquent avec chacune de ces lignes des angles égaux (123).

(149) Cor. 2. Si EFB est un angle droit, EGD sera aussi un angle droit ; donc **toute ligne perpendiculaire à l'une de deux parallèles est aussi perpendiculaire à l'autre, et toute ligne faisant avec l'une de deux parallèles un angle quelconque fera avec l'autre parallèle un angle égal au premier.**

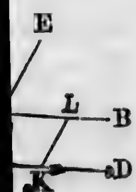
(150) Cor. 3. **Deux lignes perpendiculaires à une troisième ligne sont parallèles l'une à l'autre. Elles sont encore parallèles si elles font avec la troisième ligne des angles égaux quelconques.**

(151) Cor. 4. Si LK est parallèle à EH, on aura l'angle LKD égal à son correspondant EGD (148) ; mais EGD est égal à son correspondant EFB ; donc **deux angles sont égaux si leurs côtés sont parallèles et si ces angles sont tournés, soit du même côté de l'espace,** comme ceux EFL, LKD, **ou dans une direction opposée au sommet,** comme ceux FLK, EFL ou CGH, EFL.

(152) Cor. 5. **Deux angles valent ensemble deux angles droits, si leurs côtés sont parallèles l'un à l'autre et que ces angles soient adjacents,** comme ceux DGF, BFG ou encore comme ceux LKG, FGK ; ce qui est clair, puisque LKD=FGK, son correspondant, et que les angles de suite LKD, LKG valent ensemble deux angles droits (132). On donne à ces **angles** le nom d'**intérieurs** ou **internes.**

(153) Cor. 6. **Les angles** AFG, DGF formés de chaque côté de la ligne EH, par les parallèles AB, CD, et auxquels on donne le nom d'**alternes, sont égaux.**

Ceci est évident, car AB et CD étant parallèles ; l'incli-



naison de la droite FG qui les rencontre est la même pour chacune d'elles.

(154) Cor. 7. Réciproquement, **si une ligne EH qui coupe ou qui rencontre deux autres lignes droites, fait avec ces lignes, les angles correspondants ou alternes égaux, ou les angles internes supplémentaires**; c.-à-d. égaux pris ensemble à deux angles droits ; **ces deux autres lignes seront parallèles.**

Tout ceci est clair et suit immédiatement des défs. ; car si les deux lignes n'étaient pas parallèles, leur inclinaison sur la droite EH serait inégale, et les angles qui par hyp. sont égaux, seraient en même temps inégaux, ce qui est absurde ; donc, etc.

(155) Cor. 8. Par un même point F on ne peut mener qu'une seule ligne droite AB qui soit parallèle à une autre ligne CD.

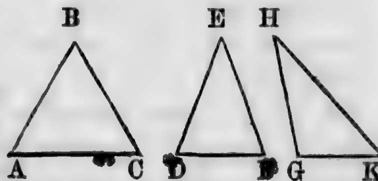
(156) Déf. Les **figures rectilignes** sont celles qui sont terminées par des lignes droites.

(157) Déf. Les **figures trilatérales** ou les **trilatères** sont celles qui sont terminées par trois lignes droites; on les désigne sous le nom de **triangles** ou **trigones.**

(158) Déf. Les **quadrilatères** sont celles qui sont terminées par quatres lignes droites ; tel est le carré ou tétragone.

(159) Déf. On donne en général le nom de **polygones** aux figures rectilignes terminées par plus de quatre côtés ; tels sont le pentagone, l'hexagone, etc; mais rien n'empêche de désigner sous le même nom les triangles qui sont des polygones de trois côtés et les quadrilatères qui en ont quatre.

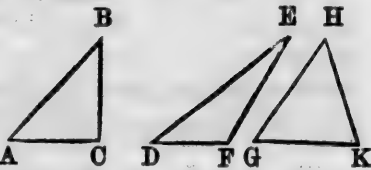
(160) Déf. Parmi les **triangles**, on nomme **équilatéral**, celui ABC dont les trois côtés sont égaux; **isocèle**, celui DEF qui n'a que deux côtés égaux ; et **scalène**, celui GHK dont les trois côtés sont inégaux.



(161) Sco. **Dans tout triangle la somme de deux côtés quelconques HG, GK est plus grande que le troisième côté HK**; car (108) la ligne droite HK est la plus courte distance entre les points H, K; et toute autre distance HG+GK est évidemment plus grande que HK.

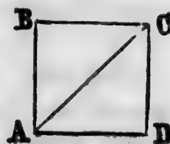
(162) Cor. Il suit de là que **la différence entre deux côtés quelconques d'un triangle est moindre que le troisième côté**; car, puisque $\overline{HG+GK} > HK$, si de HK on retranche GK, il restera une quantité moindre que HG; c.-à-d., $\overline{HK-GK} < HG$, ou $\overline{HK-HG} < GK$.

(163) **Déf.** Considérant les **triangles** par rapport à leurs angles; on appelle **rectangle**, celui ACB qui a un angle droit C; **obtusangle**, celui DFE qui a un angle obtus F; et **acutangle**, celui GHK dont les trois angles sont aigus.



(164) **Déf.** Dans un triangle rectangle, on appelle **hypoténuse** le côté AB opposé à l'angle droit.

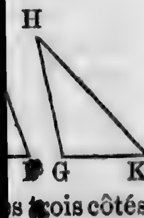
(165) **Déf.** Parmi les figures à quatre côtés ou quadrilatères, le **carré** ou **tétragone** est celle ABCD dont tous les côtés sont égaux et tous les angles droits. La ligne AC qui joint deux quelconques des angles opposés est appelée **diagonale**.

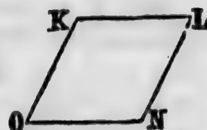


(166) **Déf.** Le **rectangle** est celle EFGH dont tous les angles sont droits; mais dont les côtés ne sont pas tous égaux.



(167) Sco. Il suit de cette déf. et du par. (150) que **les côtés opposés d'un carré et d'un rectangle sont parallèles deux à deux.** De plus, **les côtés opposés d'un rectangle sont égaux**; car (142) EF, HG sont les distances égales entre les parallèles EH, FG; et FG, EH sont les distances égales entre les parallèles EF, HG; puisque les côtés du rectangle sont perpendiculaires l'un à l'autre.





(168) **Déf.** Un **rhombe** ou **losange** NOKL est un quadrilatère dont tous les côtés sont égaux, mais dont les angles ne sont pas droits.



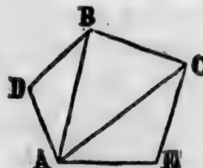
(169) **Déf.** Un **parallélogramme** PQRS est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

(170) **Cor. La somme de deux quelconques des angles adjacents d'un parallélogramme vaut deux angles droits**; puisque (152) deux lignes parallèles PQ, SR qui rencontrent une troisième ligne PS ou QR font les angles adjacents égaux ensemble à deux angles droits.

(171) **Sco. Le carré et le rectangle sont aussi des parallélogrammes** (167 et 169).

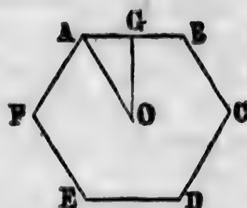


(172) **Déf.** On donne le nom de **trapèze** à un quadrilatère A.C dont deux côtés seulement AB, DC sont parallèles.



(173) **Déf.** En général, on appelle **diagonale** et quelquefois **diamètre d'une figure quelconque,** la ligne qui joint deux de ses angles non adjacents. Telle est dans le parallélogramme PR la ligne SQ, et dans le polygone DE, les lignes AB, AC.

(174) **Déf.** Parmi les polygones, on nomme **pentagone**, celui de cinq côtés; **hexagone**, celui de six côtés; **heptagone**, celui de sept côtés; **octogone**, celui de huit côtés; **ennéagone** ou **nonagone**, neuf côtés; **décagone**, dix côtés; **quindécagone** ou **pentédécagone**, quinze côtés; et ainsi de suite.

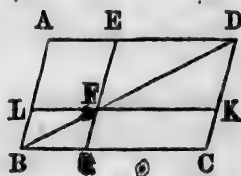


(175) **Déf.** Un **polygone équilatéral** est celui dont tous les côtés sont égaux ; **équiangle,** celui dont tous les angles sont égaux ; et **régulier,** celui ABCDEF dont tous les angles A, B, C, etc., sont égaux et tous les côtés AB, BC, etc., aussi égaux.

Dans les polygones réguliers, on appelle **rayon droit,** la perpendiculaire OG menée du centre O du polygone à l'un quelconque AB de ses côtés; et **rayon oblique, la** ligne OA menée du même point O à l'un quelconque A des angles du polygone.

Le **centre d'un polygone régulier,** comme on le verra plus tard, est un point également éloigné des côtés et angles du polygone.

(176) **Déf.** Deux **polygones** sont **mutuellement équilatéraux** lorsqu'ils ont leurs côtés égaux l'un à l'autre et placés dans le même ordre, c.-à-d., lorsque en suivant leurs périmètres dans la même direction, le premier côté de l'un est égal au premier côté de l'autre ; le second côté du premier, au second côté de l'autre : et ainsi de suite. L'expression **mutuellement équiangles** a une signification correspondante, eu égard aux angles. Dans les deux cas les **côtés** ou **angles** égaux ou correspondants sont appelés **homologues.**



(177) **Déf.** Dans tout parallélogramme AC, on désigne sous le nom de **gnomon,** la figure AGK composée du parallélogr. LG et de ses compléments AF, FC, ou celle AKG composée du parallélogr. EK et des compléments AF, FC.

(178) **Déf.** On dit que les **parallélogrammes** EK, LG sont **autour du diamètre** BD ; et l'on appelle **compléments,** les parties AF, FC qui manquent à EK, LG, pour compléter le parallélogr. AC.



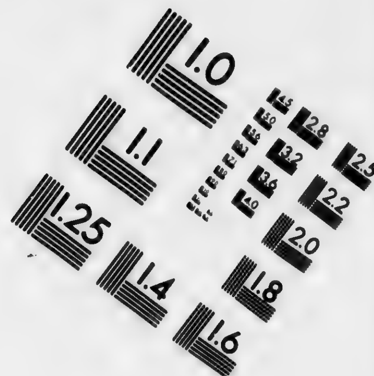
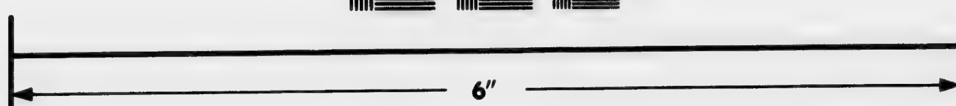
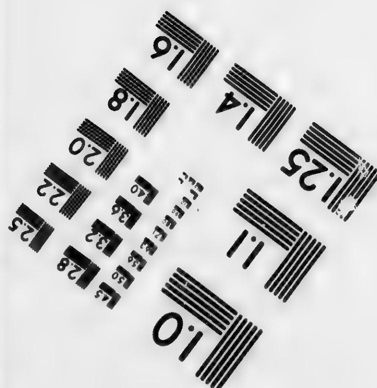
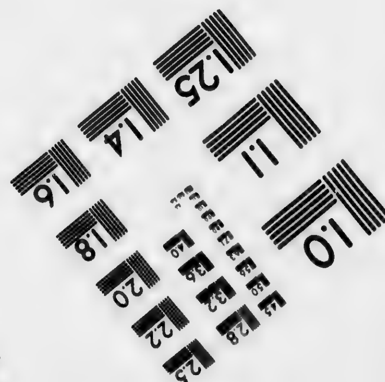


IMAGE EVALUATION TEST TARGET (MT-3)

1.0 1.1 1.25 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.5 2.8 3.2 3.6 4.0

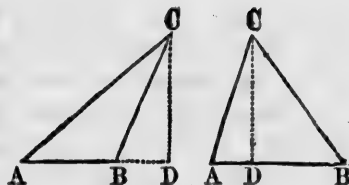




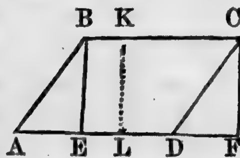



2.8
2.5
3.2
2.2
3.6
2.0
1.8
1.6


1.1
1.0



(179) Déf. **La hauteur d'un triangle** ABC est la ligne CD menée perpendiculairement de son **sommet** C à sa **base** AB prolongée s'il le faut.

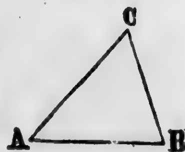


(180) Déf. **La hauteur d'un parallélogramme** ABCD est la ligne KL ou BE menée perpendiculairement entre deux de ses côtés parallèles ; ou la perpendiculaire CF comprise entre un côté BC et l'autre côté AD prolongé.

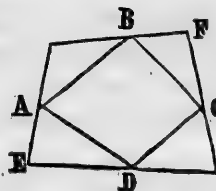
Il est evident que dans un rectangle BEFC, le côté BE ou CF peut être considéré comme sa hauteur, tout aussi bien qu'une perpendiculaire quelconque KL menée entre deux de ses côtés parallèles.

(181) Sco. Lorsqu'on dit que la hauteur du parallélogr. AC ou BF est KL ou BE ou CF, c'est que ces longueurs sont égales ; puisque par la déf. des lignes parallèles BC, AF, la distance entre ces lignes est égale à la perpendiculaire menée d'une de ces lignes à l'autre, et que cette distance est partout égale (**142**).

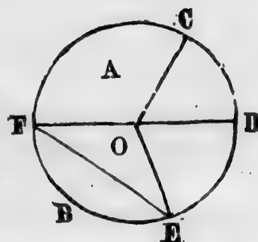
(182) Déf. On nomme ordinairement **base d'un triangle** ou **d'un parallélogramme,** le côté sur lequel la figure est censée reposer ; mais il est évident que rien n'empêche de considérer comme base d'une fig. l'un quelconque de ses côtés.



(183) Déf. Dans un triangle quelconque ABC, les **angles** A et B sont dits **adjacents au côté** AB, et le **côté** AB **adjacent aux angles** B, A. **L'angle** C compris par les côtés adjacents, AC, BC, est appelé **inclus** ; et AC, CB sont les **côtés qui le comprennent.** On donne aussi quelquefois le nom de **vertical** ou **angle au sommet** à l'angle C opposé à la base AB.



(184) **Déf.** Une **figure rectiligne** ABCD est dite **inscrite** dans une autre fig. rect. EF, lorsque tous les angles ou points angulaires de la première sont situés sur les côtés de la seconde; et réciproquement, la fig. EF est **circonscrite** à celle BD, si les côtés de la première passent par les angles du second.



(185) **Déf.** Un **cercle** A est une fig. plane terminée par une ligne courbe CDEF, qu'on appelle **circonférence**; et telle que toutes lignes droites OC, OE, OF menées à la circonférence, d'un certain point intérieur O, qu'on appelle **centre**, sont égales l'une à l'autre.

(186) **Sco.** Il faut se garder de confondre le mot "cercle" qui est une fig. plane, avec celui "circonférence" qui n'est qu'une ligne.

(187) **Déf.** Le **diamètre d'un cercle** est une ligne FD menée par le centre O et terminée de part et d'autre à la circonférence.

(188) **Cor. Le diamètre** FD **est la plus grande ligne droite que l'on puisse mener dans un cercle,** étant égale à la somme des distances OF, OD du centre à la circonférence; **et il partage le cercle en deux parties égales** appellées **demi-cercles**; car si l'on suppose que la partie FCD du cercle tourne autour de la base commune FD jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur la partie FED, les deux **courbes** DCF, DEF coincideront; si non, il y aurait des points dans l'une plus ou moins éloignés du centre: ce qui est contre la déf. du cercle, puisque les lignes OC, OE, etc., qui mesurent les distances de ces points sont égales, et que par suite **tous les points de la circonférence sont également éloignés du centre.**

(189) Déf. Les lignes OD, OE, etc., menées du centre à la circonférence se nomment **rayons** ; et par la def. du cercle, **tous rayons d'un même cercle sont égaux.** De plus il est clair que **le diamètre est double du rayon.**

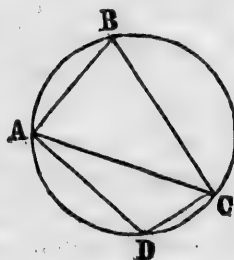
(190) Déf. Un **arc de cercle** est une partie quelconque FBE de la circonférence, et la droite EF qui en joint les extrémités est appelée **corde.** Il est clair aussi, d'après cette déf. que EF peut encore être considérée comme corde de l'arc FCE, plus grand qu'une demi-circonférence.

(191) Déf. Un **segment de cercle** est la surface ou partie de cercle FEB comprise entre un arc et sa corde. La partie FEC est aussi, par la déf., un segment de cercle ; le premier étant plus petit et le second plus grand qu'un demi-cercle.

(192) Déf. Un **secteur** DOE est la surface comprise entre l'arc DE et les rayons DO, EO menés aux extrémités de l'arc. D'après la déf., la partie EDCFO du cercle est aussi un secteur; le premier étant plus petit et l'autre plus grand qu'un demi-cercle.

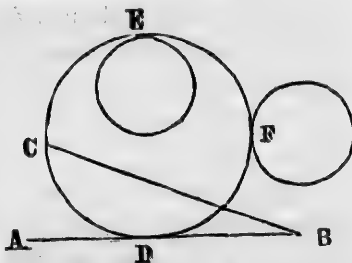
(193) Déf. Une **ligne droite** EF est dite **inscrite dans un cercle,** lorsque ses extrémités sont dans la circonférence.

(194) Déf. Un **angle inscrit** ou un **angle à la circonférence,** est celui qui a son sommet à la circonférence et qui est formé par deux cordes; tel est l'angle ABC ou BCD. Comme CBA est un segment de cercle, on pourra aussi désigner l'angle B appuyé sur la base AC de ce segment, **l'angle dans le segment** CBA; et l'angle D, celui dans le segment CDA.



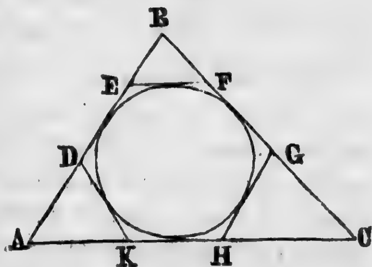
(195) **Déf.** Un **triangle inscrit** est celui qui, comme ACB ou ACD, a ses trois sommets ou points angulaires dans la circonférence ; et en général une **figure inscrite** est celle, quelconque, ABCD qui a ses angles sur la conférence ; et la **circonférence** est dite **circonscrite** à la figure.

(196. **Déf.** Une ligne AB qui touche un cercle sans le pénétrer ou le couper est appelée **tangente** ; et l'on appelle **point de contact** le point D où la ligne touche le cercle. **Deux cercles** se touchent ou sont **tangents** soit intérieurement en E, soit extérieurement en F, lorsqu'ils se rencontrent sans se pénétrer ; E et F étant appelés comme auparavant points de contact.

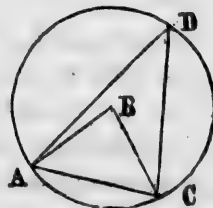


(197) **Déf.** On nomme **sécante** une ligne BC située partie au dedans et partie au dehors d'un cercle.

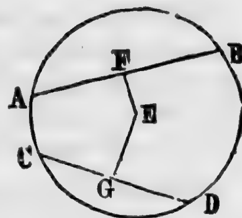
(198) **Déf.** Un **triangle** ABC, ou un autre **polygone quelconque** DEFGHK est dit **circonscrit** à un cercle, lorsque chaque côté de la fig. **touche** le cercle ; et réciproquement, un **cercle** est **inscrit dans une figure rectiligne quelconque,** lorsque la circonférence du cercle est tangente à chaque côté de la fig.



(199) **Déf.** Un **angle au centre** est celui B formé par deux rayons AB, BC. On dit aussi l'**angle appuyé sur** l'arc AC, ou **sous-tendu par** la corde ou l'arc AC, que cet angle soit au centre B ou à la circonférence D.

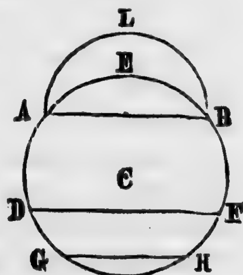


(200) **Déf.** La **distance d'une corde CD au centre d'un cercle,** est la perpendiculaire EG menée du centre sur cette corde.



(201) **Cor.** Deux **cordes** CD, AB sont **également éloignées du centre,** lorsque les perpendiculaires EG, EF sont égales; et la corde AB sur laquelle tombe la plus petite perpendiculaire EF, est moins éloignée du centre que la corde CD.

(202) **Déf.** Une **zone de cercle** est la partie ABFD ou DGHF d'un cercle comprise entre deux cordes parallèles AB, DF ou GH, DF. On la dit **centrale,** AF, lorsqu'elle comprend le centre C du cercle; et **latérale,** DH, lorsque les cordes qui la comprennent sont toutes deux du même côté du centre. La surface AEBL comprise entre deux arcs de cercle AEB, ALB, est appelée **lunule.**



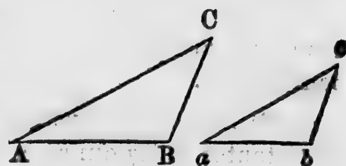
(203) **Déf.** Il faut entendre par **figures égales,** celles qui sont égales en toutes choses; ainsi, deux figures seront égales si tous les angles et côtés de l'une sont égaux aux angles et côtés correspondants de l'autre; car si l'on superposait ces figures l'une à l'autre, il est clair que les côtés et angles de l'une tomberaient sur les côtés et angles correspondants de l'autre, et que ces figures se confondraient; c.-à-d., couvriraient ou rempliraient exactement le même espace, et seraient en conséquence égales (**85 Ax**).

Pour que deux **cercles** soient **égaux,** il suffit évidemment que leurs rayons soient égaux; car, par superposition, il est clair que faisant coincider les centres des deux cercles, leurs circonférences tomberaient l'une sur l'autre, à cause des distances égales du centre commun aux circonférences de chacun des cercles.

(204) **Déf.** Les **figures équivalentes** sont celles de même aire ou superficie; un triangle, par exemple, sera équivalent à un parallélogramme, si le contenu superficiel de l'un est égal à celui de l'autre, ou s'ils contiennent tous deux un même nombre d'unités de mesure.

De même, parmi les solides, une pyramide, par exemple, sera équivalente à un prisme ou autre solide, si le contenu cubique de l'un est égal à celui de l'autre, ou s'ils contiennent chacun un nombre égal d'unités de mesure; ces unités de mesure étant toujours de même espèce que les quantités à mesurer ou à estimer, comme nous l'avons déjà vu au par. (**24**); c.-à-d., superficielles, quand il s'agit de surfaces, et cubiques quand il s'agit de solides.

Remarquons ici que lorsque dans la suite il s'agira de figures équivalentes, et que dans les démonstrations ou solutions des propositions, l'on fera usage du mot égal ou du signe =, ce sera dans le double but d'éviter le trop fréquent emploi du mot équivalent, et de tirer plus directement des axiomes les conclusions dont on aura besoin. Il est clair alors que le mot égal et le signe = ainsi employés signifieront chacun, **égal en surface.**



(205) **Déf.** Les **triangles semblables** sont ceux qui ont les trois angles de l'un égaux aux trois angles de l'autre. Ainsi le triangle *abc* est semblable à celui ABC parce qu'ils ont les angles *a*=A, *b*=B, *c*=C.

On appelle homologues les angles égaux A, *a*; B, *b*; C, *c* et les côtés AB, *ab*; AC, *ac*; BC, *bc* opposés aux angles égaux, ou qui comprennent les angles égaux.

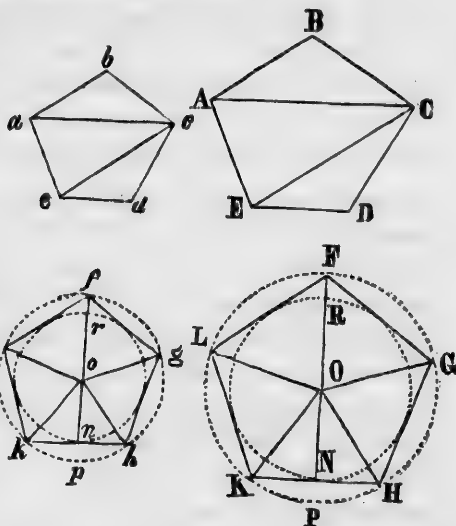
(206) **Sco. Si deux triangles semblables sont disposés de manière à ce que leurs angles homologues soient tournés du même côté de l'espace, et qu'un côté de l'un**

soit parallèle à un côté de l'autre ; les autres côtés du premier seront parallèles aux autres côtés du second.

La même chose est vraie si un côté d'un des triangles est sur la même ligne droite que le côté correspondant de l'autre (**146**).

La vérité de ces énoncés résulte directement des définitions de lignes parallèles et angles correspondants ; puisque tout ce qu'on pourrait supposer contraire à ce qui est énoncé dans cette sco. serait contraire à ces défs.

(**207**) **Déf.** Les **figures semblales** de plus de trois côtés sont celles BD, *bd* ou FH, *fh* qui sont composés d'un même nombre de triangles semblables ABC, *abc* ou FOG, *fog* situés d'une manière correspondante dans chaque figure.



Rem. L'on verra plus tard ce qu'il faut entendre par **solides semblables.**

(**208**) **Sco. 1.** En général, on appellera **lignes homologues** toutes celles qui se correspondent dans les figures semblables. Ainsi, dans deux triangles semblables KOH, *koh*, les hauteurs (**179**) ON, *on*, et bases (**182**) KH, *kh* seront regardées comme lignes homologues, tout aussi bien que les côtés de ces figures (**205**); et dans les figures semblables BD, *bd*, de plus de trois côtés, les diagonales ou diamètres correspondants AC, *ac* et EC, *ec* porteront aussi le nom d'homologues, de même que les côtés correspondants AB, *ab* et BC, *bc*, etc., de ces figures.

Dans les cercles, les lignes homologues seront évidem-

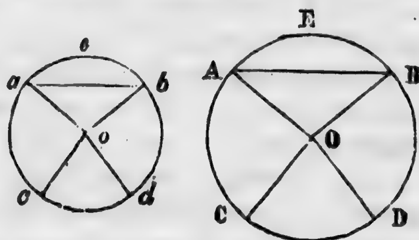
ment les diamètres, les rayons, et les cordes qui sous-tendent des angles égaux ou des arcs égaux.

Dans les polygones réguliers et semblables FH, *fh*, on appellera lignes homologues, les rayons droits ON, *on*, et obliques OK, *ok*; les diamètres NR, *nr* des cercles inscrits et ceux PF, *pf* des cercles circonscrits, ainsi que les rayons de ces mêmes cercles.

(209) **Sco. 2.** Il est clair que **deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles**; puisque c'est l'égalité des angles qui, d'après la déf. les rend semblables; et que (68 **Ax.**) deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

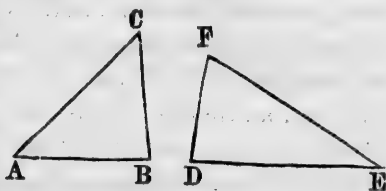
(210) **Sco. 3.** D'après la déf. des **figures égales** (203), ces figures **sont toujours semblables**; tandis que les **figures semblables peuvent être très inégales.**

(211) **Déf.** Dans deux cercles différents, on appelle **arcs, secteurs** et **segments semblables,** ceux qui correspondent à des angles égaux au centre.



Par exemple, si l'angle *cod*=COD, l'arc *cd* est semblable à l'arc CD; le secteur *dco* à celui DCO; et si l'angle *aob*= AOB, le segment *eba* sera semblable à celui EBA.

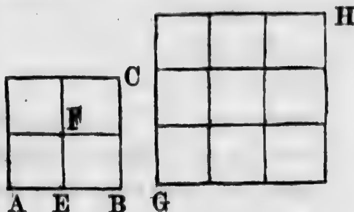
(212) **Déf. Deux côtés d'une figure** sont dites **réciproquement proportionnels à deux côtés d'une autre figure** lorsque un des côtés de la première est à un des côtés de la seconde, comme l'autre côté de la seconde à l'autre côte de la première; c.-à-d., AC, CB sont réciproquement proportionnels à DF, FE, si AC : DF : : EF : BC ou si DF : BC : : AC : EF.



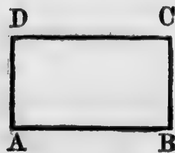
(213) **Déf.** On dit qu'une **ligne droite** est **coupée en moyenne et extrême raison**, lorsque le tout est au plus grand segment, comme le plus grand segment au plus petit.

(214) **Déf.** En geométrie, le **produit de deux lignes** veut dire la même chose que leur **rectangle**; et l'on fait usage de cette expression en arithmétique et en algèbre, où elle sert à désigner le produit de deux quantités ou nombres inégaux; le mot **carré** servant à désigner le produit d'une quantité multipliée par elle-même (35 et 40).

(215) **Sco.** Les carrés arithmétiques de 1, 2, 3, etc., sont 1, 4, 9, etc. De même aussi il est clair que **le carré AC décrit sur le double AB d'une ligne AE est égal à quatre fois le carré AF décrit sur cette ligne AE; et que celui GH, décrit sur le triple d'une ligne, est égal à neuf fois le carré décrit sur cette ligne.** Il n'est pas moins évident que **le carré décrit sur la moitié d'une ligne est égal au quart du carré décrit sur cette ligne; et celui décrit sur le tiers d'une ligne, à la neuvième partie du carré décrit sur cette ligne.**



(216) **Déf.** Tout parallélogramme rectangulaire ou **rectangle** est dit **contenu** par deux quelconques des lignes ou côtés qui comprennent l'un des angles droits. Ainsi le parallélogr. rectangulaire AC est appelé le rectangle contenu par AD, DC ou par AD, AB, etc. Pour abréger, au lieu de dire le rectangle contenu par AD et DC, on dira simplement le rectangle AD.DC, mettant un point entre les deux côtés du rectangle.



DEMANDES

OU

PROBLÈMES DONT LA SOLUTION EST ÉVIDENTE. (8)

---

(217) D'un point quelconque on peut mener une ligne droite à un autre point quelconque.

(218) Une ligne droite peut être prolongée à une distance quelconque en ligne droite.

(219) On peut décrire un cercle d'un point quelconque, pris comme centre, à une distance quelconque de ce centre, c'est-à-dire, avec un rayon (189) quelconque.

(220) D'un point donné l'on peut mener une droite égale à une droite donnée.

(221) De la plus grande de deux lignes droites, on peut retrancher une partie égale à la plus petite.

———ooooo———

PROPOSITIONS

ET

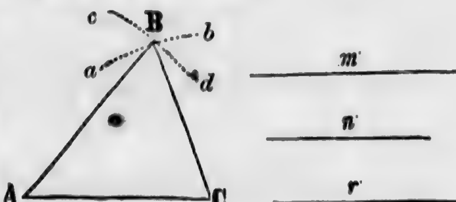
CONSÉQUENCES QUI EN DÉCOULENT.

PROP. I. PROBLÈME.

---

(222) Faire un triangle ABC dont les côtés soient égaux à trois lignes droites données, *m*, *n*, *r* ; pourvu

toujours (161) que la somme de deux quelconques de ces lignes soit plus grande que la troisième.



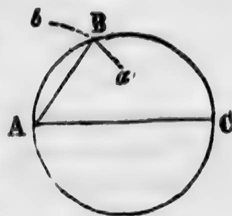
Prenant pour base AC, une quelconque *r* des trois lignes données; des extrémités A, C de cette base, comme centres, avec des rayons respectivement égaux aux deux autres lignes *m*, *n*, décrivant les arcs *cd*, *ab*; et menant du point d'intersection B des deux arcs, aux extrémités de la base, les lignes BA, BC; le problème sera résolu.

En effet, tous les rayons d'un même cercle ou arc de cercle étant égaux (189), et BA étant un des rayons de l'arc *cd*, on aura le côté AB du triangle égal à la ligne *m* qui a servi de rayon à cet arc; pour la même raison, le côté CB est égal à la ligne *n* qui a servi de rayon à l'arc *ab*; et le troisième côté AC étant par hypothèse égal à la ligne *r*, les trois côtés du triangle ABC sont égaux respectivement aux trois lignes données *m*, *n*, *r*.

Il est clair que si le côté AC, par exemple, était plus grand que la somme de AB et CB, ou ce qui est la même chose, si la ligne donnée *r* était plus grande que la somme de *m* et *n*, le problème serait impossible, puisque dans ce cas les arcs *ab cd*, ne s'intersecteraient pas; mais la solution sera toujours possible lorsque la somme de deux quelconques des côtés sera plus grande que le troisième côté.

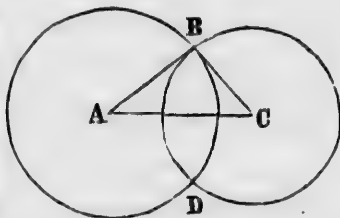
(223) **Sco. 1. Si les trois lignes données sont égales, le triangle sera équilatéral.**

(224) **Sco. 2. Si deux seulement des lignes sont égales, le triangle sera isocèle.**



(225) **Sco. 3. PROB.** Il suit de cette prop. que pour **inscrire dans un cercle donné ACB une ligne AB égale à une ligne donnée, mais (138) n'excédant pas en longueur le diamètre AC du cercle** ; il n'y a qu'à prendre sur la circonférence donnée un point quelconque A, et de ce point comme centre, avec un rayon AB, égal à la ligne donnée, décrire un arc *ab* qui coupera le cercle en un point B, duquel menant BA, cette dernière sera égale à la ligne donnée et inscrite dans le cercle.

(226) **Sco. 4. PROB.** Les trois côtés d'un triangle n'étant que trois lignes droites, il est évident que cette proposition équivaut à celle de **faire un triangle dont les côtés soient égaux à ceux d'un autre triangle.**

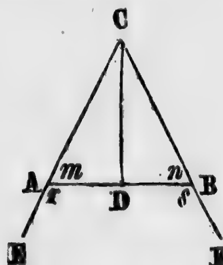


(227) **Cor. 1.** Puisque le sommet B du triangle ABC, se trouve à l'intersection des cercles décrits des points A, C, comme centres, avec les rayons AB, CB ; et que du même côté de la ligne AC, il ne peut évidemment y avoir qu'une seule intersection et par conséquent un seul sommet ; il est de là évident que **sur la même base AC et du même côté de cette base, on ne peut avec deux côtés donnés AB, CB, former qu'un seul triangle ABC.**

(228) **Cor. 2.** Les cercles décrits des points A, C, avec les rayons AB, CB, ont deux intersections, l'une B d'un côté de la ligne AC qui joint les centres des deux cercles, et l'autre D du côté opposé de cette ligne ; et ils ne peuvent en avoir plus de deux ; d'où il suit que **deux cercles ne peuvent se couper en plus de deux points différents, dont un de chaque côté de la ligne qui joint les centres des deux cercles.**

PROP. II. THÉOR.

(229) **Les angles *m*, *n*, à la base d'un triangle isocèle ACB sont égaux et ceux *r*, *s*, formés par la base AB et les côtés égaux CA, CB prolongés sont aussi égaux.**



Supposons que l'angle C, au sommet du triangle, soit bissecté; c.-à-d. (15) divisé en deux parties égales par la ligne CD; ce qui donnera l'angle ACD égal à BCD; et que le triangle BCD tourne autour de la ligne CD de manière à se reposer sur le triangle ACD; il est évident que le côté BC tombera sur son égal AC, et le point B sur le point A. De plus, le point B tombant sur A, le côté DB tombera sur DA, à cause du point D commun à ces deux côtés, et que (111) d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule et même ligne droite. Les côtés des deux triangles tombant l'un sur l'autre, donneront l'angle $m=n$; c.-à-d., un des angles *m* à la base égal à l'autre *n*.

(230) Les angles *r*, *s*, ou BAE, ABF, de l'autre côté de la base, sont égaux, parce que BF, formant partie de la droite BC, tombe sur AE qui forme partie de la droite AC.

D'ailleurs, les angles *m* et *r* pris ensemble valent deux angles droits, et ceux *r*, *s* pris ensemble valent aussi deux angles droits (132); et si des quantités égales $m + r$, $n + s$, on retranche les quantités égales *m*, *n*, les restes *r*, *s*, seront égaux (77 **Ax.**) ; donc, etc.

(231) **Cor. 1.** De là, **tout triangle équilatéral est aussi équiangle.**

(232) **Cor. 2.** De là encore, **la ligne CD qui bissecte l'angle C au sommet d'un triangle isocèle, bissecte aussi la base ou le côté opposé à cet angle.**

(233) **Cor. 3.** Puisque BD tombe sur AD, les angles BDC, ADC formés par la bissectrice CD sont égaux; et il suit de ce théor. que **la ligne qui bissecte l'angle au sommet d'un triangle isocèle est perpendiculaire à la base (218).**

(234) **Cor. 4. La ligne qui bissecte l'un quelconque des angles d'un triangle équilatéral, bissecte aussi le côté opposé à cet angle et lui est perpendiculaire.**

(235) **Cor. 5.** Il suit encore du théor. qu'**une ligne menée du sommet d'un triangle isocèle, perpendiculaire à la base, bissecte la base.**

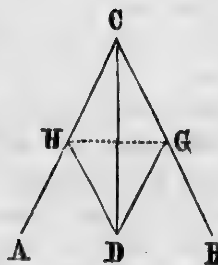
(236) **Cor. 6.** Il suit de même que **dans un triangle isocèle, la ligne qui joint le sommet au point milieu de la base, bissecte l'angle opposé à la base et est perpendiculaire à cette base.**

(237) **Cor. 7.** Puisque les triangles BCD, ACD, considérés séparément, ont deux côtés CB, CD et l'angle inclus DCB de l'un égaux aux côté CA, CD et à l'angle correspondant DCA de l'autre; il s'en suit que **si deux triangles ont deux côtés et l'angle inclus de l'un, respectivement égaux à deux côtés et à l'angle inclus de l'autre; ces deux triangles sont égaux en toutes choses.**

(238) **Cor. 8. Si deux triangles** BCD, ACD, considérés séparément, **ont un côté** CD **et les angles adjacents** DCB, CDB, **de l'un respectivement égaux au côté correspondant** DC **et aux angles adjacents** DCA, CDA **de l'autre; ces deux triangles sont égaux en toutes choses**; car la même superposition des deux triangles fera tomber le côté CB sur CA et celui DB sur DA, à cause des angles égaux en D et C. Le point B tombera donc nécessairement sur A et fera BC=AC, DB=DA et l'angle DAC=DBC; donc, etc.

(239) **Cor. 9. Si deux triangles** (voyez la fig. sur la page suivante,) DGC, DHC, considérés séparément, **ont les trois côtés de l'un respectivement égaux aux trois côtés de l'autre; ces deux triangles sont égaux en toutes choses.**

En effet, faisant coincider les deux triangles, comme dans la fig. par un de leurs côtés égaux DC, et menant HG, le triangle HCG sera isocèle, à cause des côtés égaux HC, GC,



et l'angle CGH à la base sera par ce théor. égal à l'angle CHG. Mais à cause de DG=DH par hyp., le triangle GDH sera aussi isocèle et donnera l'angle HGD à la base = GHD, et puisque si à des quantités égales on ajoute des quantités égales les touts seront égaux (76 **Ax.**), on aura la somme des deux angles en H égale à celle des deux angles en G ; c.-à-d., l'angle CHD sera égal à celui CGD.

En faisant successivement coincider les autres côtés égaux CG, CH et DG, DH, l'on prouverait de même que les autres angles sont respectivement égaux l'un à l'autre ; donc, etc.

(240) Sco. 1. PROB. Il suit du dernier cor. que pour **bissecter un angle quelconqne** ACB, il n'y a qu'à prendre sur les côtés indéfinis qui contiennent cet angle, des longueurs égales CH, CG, joindre HG, sur HG faire un triangle équilatéral ou isocèle (**222**) HDG et joindre CD qui résoudra le prob.

Car, les trois côtés CD, CG et DG du triangle DCG seront par cette construction égaux aux trois côtés CD, CH et DH du triangle DCH, ce qui (**239**) rend leurs angles égaux et fait que l'angle DCG=DCH ; c.-à-d. que l'angle HCG ou ACB est bissecté par la ligne CD.

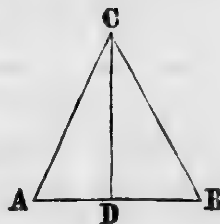
(241) Sco. 2. PROB. En répétant l'opération, chacune des moitiés DCE, DCF pourrait être divisée en deux parties égales ; de là il est évident que par des divisions successives **un angle donné peut être partagé en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales.**

(242) Sco. 3. PROB. Il suit encore de ce théor. que pour **faire** en un point donné C sur une ligne CD **un angle** ACD **égal à un angle donné** BCD ; après avoir pris sur les côtés indéfinis de l'angle donné des longueurs quelconques CD, CG, et avoir joint DG, il n'y a qu'à prendre sur CD une longueur égale à celle que l'on a prise sur le côté corres-

pondant CD de l'angle donné, et sur CD, avec des longueurs égales à CG, DG, faire le triangle DCH qui sera égal au triangle DCG (226) et donnera l'angle voulu ACD égal à l'angle donné BCD.

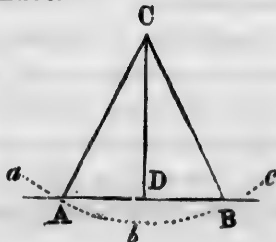
(243) **Sco. 4. PROB.** On tire aisément du dernier cor. la manière de **faire un triangle DCH lorsque deux côtés HC, DC et l'angle inclus HCD en sont donnés**; puisque, sur un, CD, des côtés donnés, il n'y a qu'à faire d'abord un angle ACD égal à l'angle donné, sur l'autre côté CA de l'angle qu'on vient de faire, porter une longueur CH égale à l'autre côté donné et joindre les extrémités H, D des deux côtés qui comprennent l'angle ainsi fait.

(244) **Sco. 5. PROB.** Puisque (232) la ligne CD qui bissecte l'angle C au sommet d'un triangle isocèle, bissecte en même temps la base ; il s'en suit clairement que pour **bissecter une ligne quelconque AB**, il n'y a qu'à faire sur cette ligne un triangle isocèle ou équilatéral ACB (222) et bissecter (240) l'angle C opposé à la base par la ligne CD qui partagera la ligne donnée en deux parties égales.



(245) **Sco. 6. PROB.** Par le cor. 6 de cette prop., la ligne qui joint le sommet d'un triangle isocèle au point milieu de sa base, est perpendiculaire à cette base; d'où il suit que pour **mener une perpendiculaire CD à une ligne donnée AB, en un point donné D de cette ligne**, il suffit de prendre de chaque côté du point D des distances égales DA, DB, sur AB faire un triangle équilatéral ou isocèle ACB, et mener CD qui sera la perpendiculaire demandée.

(246) **Sco. 7. PROB.** Il suit aussi de cette prop. que pour **mener une perpendiculaire CD à une ligne AB par un point donné C hors de cette ligne**; il faut, avec un rayon quelconque CB plus grand que CD, décrire un arc de



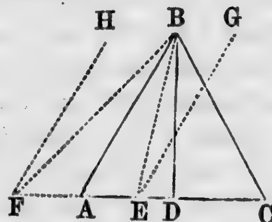
cercle *abc* coupant la ligne indéfinie AB aux points A, B, joindre CA, CB et bissecter l'angle ACB par la ligne CD qui sera la perpendiculaire requise.

En effet, CA, CB étant rayons d'un même cercle, sont égaux, et le triangle ACB est en conséquence isocèle.

(247) **Sco. 8. PROB. Si le point D dans la ligne AB était à l'extrémité de cette ligne, ou si le point C hors de cette ligne était tel que la perpendiculaire dût tomber au delà de la ligne** : il est évident qu'il n'y aurait qu'à prolonger d'abord la ligne et à procéder ensuite comme ci-dessus.

PROP. III. THÉOR.

(248) **Si deux angles BAC, BCA d'un triangle ABC sont égaux, les côtés BC, BA qui sous-tendent ces angles ou qui leur sont opposés, sont aussi égaux.**



Du point B menez BD perpendiculaire à AC (246), ce qui donnera l'angle BCD = BDA. Supposez maintenant que le triangle BDC tourne autour de la ligne BD de manière à s'appliquer sur le triangle BDA; l'angle BDC étant par construction égal à celui BDA, le côté DC tombera sur DA, le point C sur le point A et le côté BC sur le côté BA; car si le point C ne tombe pas sur le point A, il tombera en deçà ou au delà de ce point, soit en E ou F, et la ligne BC tombera en BE ou BF.

Dans chacun de ces cas les lignes BE, BF ont une inclinaison sur AC ou AC prolongée différente de celle de la ligne BA, et les angles BEC, BFC sont en conséquence (123) inégaux à l'angle A; car, ayant mené FH, EG parallèles à AB, on a l'angle BFC plus petit que HFC ou que son égal BAC, et l'angle BEC plus grand que GEC ou que son égal

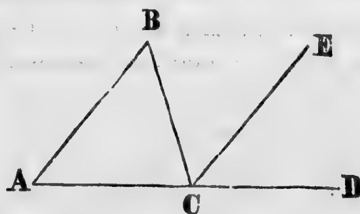
BAC; les angles HFC, GEC étant à cause des parallèles FH, EG, égaux l'un à l'autre et à l'angle BAC.

Mais si tout autre point que A donne un angle inégal à l'angle C, et puisque par hyp. l'angle BAC=BCA; il en résulte que le point C tombera sur A et le côté BC sur le côté BA; et par suite que les côtés BC, BA sont égaux; donc, etc.

(249) **Cor. Tout triangle équiangle est** donc **aussi équilatéral.**

PROP. IV. THÉOR.

(250) **La somme** A+B+C **des trois angles d'un triangle quelconque** ABC **vaut deux angles droits.**



Ayant prolongé AC indéfiniment jusqu'en D, et fait l'angle ECD égal à BAC, la ligne CE sera parallèle au côté AB du triangle (154). Les angles ABC, ECB seront donc alternes et égaux (153), et l'angle ACB qui avec les angles BCE, ECD vaut deux angles droits, formera aussi deux angles droits avec les angles A et B qui leur sont égaux; donc, etc.

(251) **Cor. 1. L'angle extérieur** BCD **d'un triangle quelconque ABC vaut les deux angles intérieurs et opposés A, B du triangle, et est par conséquent plus grand que l'un de ces angles pris séparément.**

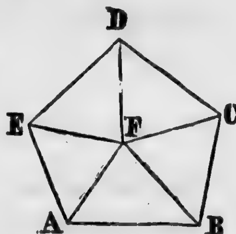
(252) **Cor. 2. La somme de deux angles quelconques d'un triangle vaut moins que deux angles droits.** Il est clair que ceci résulte directement du théor.

(253) **Scc. 1. PROB.** De l'égalité des angles ECD, BAD, il résulte que EC est parallèle à BA et par suite que pour **mener par un point quelconque C une ligne CE parallèle**

à une autre ligne AB, il n'y a qu'à joindre le point donné à la ligne donnée par une ligne quelconque CB ou CA et faire au point C l'angle BCE=CBA ou ECD=BAD suivant le cas.

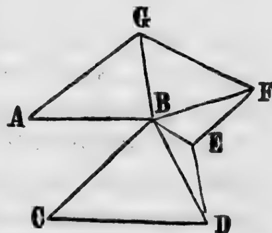
(254) Sco. 2. Il suit du cor. 2, que **si du même côté d'une ligne, deux autres lignes font avec la première des angles dont la somme soit moindre que deux angles droits ; ces deux lignes étant prolongées se rencontreront.**

(255) Cor. 3. **La somme des angles intérieurs d'une figure rectiligne quelconque ABCDE, vaut autant de fois deux angles droits que la figure a de côtés, moins quatre angles droits.**



Prenant dans le polygone convexe AC un point quelconque F, et menant les lignes FA, FB, FC, etc., aux angles de la fig., il est évident que l'on obtient autant de triangles que la fig. a de côtés. Or la somme des angles de chacun de ces triangles vaut deux angles droits ; mais tous les angles autour du point F valent ensemble quatre angles droits (**140**) et ne formant pas partie de ceux A, B, C, etc. de la fig. sont à déduire de la somme des angles du polygone ; donc, etc.

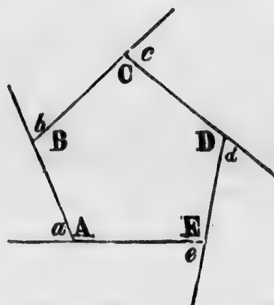
(256) Sco. 3. Cette propriété des figures rectilignes se prouve à peu près de la même manière, en les divisant en triangles par des lignes menées d'un angle à l'autre de la fig.; et c'est quelquefois ce qu'il faut nécessairement faire ; car lorsqu'il s'agit de polygones concaves comme celui ABCDEFG, c.-à-d., à angles rentrants ABC, FED, il peut se rencontrer des cas où il soit impossible de trouver un point intérieur tel que de ce point l'on puisse mener des lignes à tous les angles de la fig.



Dans ce cas, la division indiquée donnera toujours autant de triangles que de côtés, moins deux; et en conséquence **la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone.**

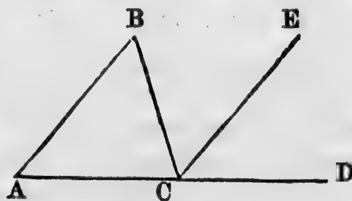
(257) **Sco. 4.** Rien n'empêche de considérer les angles intérieurs B, E, du polygone concave AD comme étant chacun plus grand que deux angles droits.

(258) **Cor. 4. Tous les angles extérieurs** *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, **d'un polygone quelconque dont les côtés sont prolongés dans la même direction, valent ensemble quatre angles droits.**



Puisque chaque angle intérieur A avec son angle extérieur *a* vaut deux angles droits; il suit de là et du cor. 3 de cette prop. que tous les angles intérieurs avec tous les angles extérieurs de la fig. valent ensemble autant de fois deux angles droits que la fig. a de côtés; c.-à-d., par le cor. 3, ces angles valent ensemble tous les angles intérieurs de la fig. plus quatre angles droits; donc tous les angles ext. valent quatre angles droits.

(259) **Sco. 5. PROB. Etant donné deux angles** A, B **d'un triangle quelconque** ABC **ou seulement leur somme** A+B, **trouver le troisième angle** C **du triangle.**



Cet angle se trouvera évidemment en retranchant de deux angles droits la somme des deux angles donnés; et pour celà il n'y a qu'à faire en un point quelconque C de la ligne droite AD l'angle ECD=A et ECB=B ou BCD=A+B, ce qui laissera l'angle BCA égal au troisième angle du triangle.

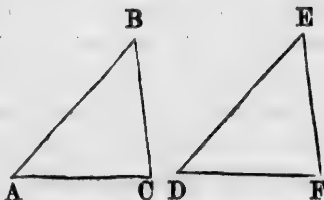
(260) **Cor. 5. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle; les autres angles de ces triangles seront égaux, et les deux triangles seront mutuellement équiangles.**

(261) **Cor. 6. Dans un triangle quelconque il ne peut y avoir qu'un seul angle droit; car s'il y en avait deux, le troisième serait égal à zéro. A plus forte raison un triangle ne peut-il avoir plus qu'un angle obtus.**

(262) **Cor. 7. Dans tout triangle rectangle, la somme des deux angles aigus vaut un angle droit.**

(263) Puisque (249) tout triangle équilatéral est aussi équiangle; chacun de ses angles sera égal au tiers de deux angles droits, ou aux deux tiers $(\frac{2}{3})$ d'un angle droit.

(264) **Sco. 6.** Il suit aussi du cor. 3, que chacun des angles d'un quadrilatère équiangle vaut un angle droit; chacun des angles d'un pentagone équiangle, les $\frac{6}{5}$ d'un angle droit; chacun des angles d'un hexagone équiangle $\frac{4}{3}$ d'un angle droit, et ainsi de suite.



(265) **Sco. 7.** On a vu (238) que si deux triangles ont un côté et les angles adjacents de l'un égaux à un côté et aux angles adjacents de l'autre, ces triangles sont égaux en toutes choses, et l'on vient de voir (260) que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, les autres angles de ces triangles sont égaux; d'où il suit que **si deux triangles ABC, DEF ont deux angles A, B de l'un égaux à deux angles E, D de l'autre, et le côté BC opposé à l'un de ces angles égal au côté correspondant de l'autre triangle; les autres côtés de ces triangles seront aussi respectivement égaux.**

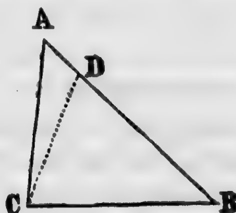
En effet l'angle C est aussi égal à l'angle correspondant F, et en se servant de ces angles égaux, la preuve devient la même que celle du cas cité au commencement de cette sco.; donc, etc.

(266) Sco. 8. PROB. Etant donné deux angles d'un triangle et un côté adjacent aux deux angles ou opposé à l'un d'eux, construire le triangle.

Dans le premier cas, il est clair qu'il n'y a qu'à faire à chaque extrémité du côté donné, un angle égal à l'un des angles donnés, et dans le second cas, retrancher (259) d'abord de deux angles droits la somme des deux angles donnés pour avoir le troisième angle, et procéder ensuite comme dans le premier cas.

PROP. V. THÉOR.

(267) Dans tout triangle ABC le plus grand côté AB est opposé au plus grand angle ACB, et réciproquement le plus grand angle est opposé au plus grand côté.



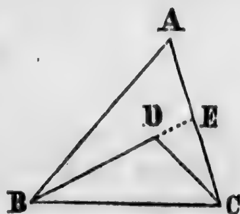
Soit l'angle DCB=ABC, l'on aura DC=DB ; car si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux (248). Donc CD+DA=BD+DA=BA ; mais CD+DA>AC ; parce que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle est plus grande que le troisième côté ; donc aussi BA>AC.

En second lieu, si AB>AC, il est à démontrer que l'angle C est plus grand que l'angle B. D'abord l'angle C n'est pas égal à B ; car cela donnerait (248) AC=AB, ce qui est contre l'hypothèse ; et C ne peut être plus petit que B ; car dans ce cas B serait plus grand que C et le côté AC>AB, ce qui est encore contre l'hyp. ; donc C est plus grand que B ; donc, etc.

En d'autres termes, si pendant que AB est plus grand que AC, l'angle C pouvait être plus petit que B, il arriverait dans ce cas que le plus petit côté AC serait opposé au plus grand angle B, ce qui est absurde, puisque par le théor. c'est le plus grand côté qui est opposé aux plus grand angle.

PROP. VI. THÉOR.

(2[illegible]) Si d'un point intérieur D dans un triangle ABC l'on mène des lignes DB, DC aux extrémités d'un BC des côtés, leur somme sera moindre que celle des deux autres côtés du triangle; mais l'angle BDC inclus par ces lignes sera plus grand que celui compris entre les côtés du triangle.



Prolongez BD jusqu'en E, et parce qu'un côté BE d'un triangle BAE est plus petit que la somme des deux autres côtés BA, AE, la somme de BE et de EC sera moindre que celle de BA et de AC; pour la même raison, dans le triangle DEC, l'on a DC $<\overline{DE+EC}$; donc aussi BD+DC est moindre que BE+EC, et à plus forte raison la somme de BD, DC est-elle plus petite que celle de BA, AC.

Maintenant, l'angle ext. BDC étant egal (251) à la somme des angles intérieurs opposés DEC, DCE, est plus grand que l'un BEC de ces angles pris séparément; pour la même raison l'angle ext. BEC est plus grand que l'angle A, et à fortiori, D est plus grand que A; donc, etc.

PROP. VII. THÉOR.

(269) Si deux triangles ABC, DBC ont deux côtés AB, BC de l'un égaux à deux côtés DB, BC de l'autre, mais l'angle ABC compris par les deux côtés du premier, plus grand que celui DBC compris par les deux côtés de l'autre; la base AC de celui qui a le plus grand angle sera plus grande que la base DC de l'autre; et réciproquement, de deux triangles ABC, DBC ayant les côtés de l'un égaux à ceux de l'autre, mais la base AC de l'un

plus grande que la base DC de l'autre ; l'angle ABC contenu par les côtés de celui qui a la plus grande base, est plus grand que l'angle DBC contenu par les côtés de l'autre.

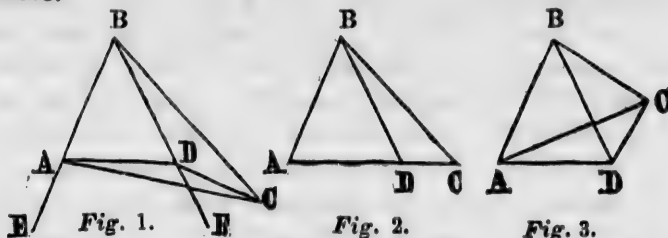


Fig. 1. *Fig.* 2. *Fig.* 3.

Supposons les triangles disposés comme dans la fig., de manière à coincider par un BC de leurs côtés égaux, et de manière aussi que celui qui a le plus petit angle DBC, soit compris dans celui qui a le plus grand angle ABC. Joignons AD, et à cause des côtés égaux AB, DB, le triangle ABD est isocèle.

Si ADC (Fig. 2) **ne forme qu'une seule et même ligne droite,** c.-à-d., si le point D tombe sur le côté AC, il est évident que le plus grand côté AC est opposé au plus grand angle ABC, et réciproquement que le plus grand angle ABC est opposé au plus grand côté AC.

Et si D ne tombe pas sur AC, il tombera soit au-dessus ou au-dessous de cette ligne.

Dans le premier cas, ayant indéfiniment prolongé les côtés égaux BA, BD (Fig 1) jusqu'en E, F, on aura, à cause du triangle isocèle ABD, l'angle EAD=FDA (**229**) ; mais EAD est plus grand que CAD; donc aussi FDA>CAD, et à fortiori CDA>CAD ; or le plus grand côté est opposé au plus grand angle (Prop. V) ; donc AC opposé à l'angle ADC est plus grand que DC opposé à l'angle plus petit CAD ; donc aussi AC base du triangle ABC est plus grande que DC base de DBC.

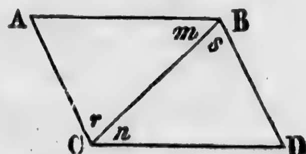
Dans le second cas, le triangle isocèle ABD (Fig. 3) donne encore les angles BAD, BDA à la base égaux; or

BAD>CAD; donc aussi BDA>CAD et à fortiori CDA>CAD; et le plus grand côté étant opposé au plus grand angle, on a AC>CD.

Réciproquement, si AC>DC, l'angle ABC sera plus grand que DBC. En effet, si ABC n'est pas plus grand que DBC, il est ou égal à DBC ou plus petit; mais il ne peut être égal à DBC, car alors la base DC serait égale à celle AC, puisque (237) si deux triangles ont deux côtés et l'angle inclus de l'un égaux à deux côtés et à l'angle inclus de l'autre, les bases de ces triangles sont aussi égales; or, par hyp. DC<AC; donc, etc. Et ABC n'est pas non plus moindre que DBC; car alors, par le theor. AC serait plus petit que DC, ce qui est encore contre l'hyp.; donc ABC est plus grand que DBC; donc, etc.

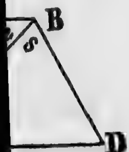
PROP. VIII. THÉOR.

(270) **Les côtés AB, CD et AC, BD et les angles C, B et A, D opposés d'un parallélogramme AD sont égaux; et la diagonale CB bissecte le parallélogramme, c'est-à-dire, le partage en deux triangles égaux ABC, DBC.**



La ligne CB avec les parallèles AB, CD, fait les angles alternes m, n égaux (153). De même les alternes r, s formés par la droite CB et les parallèles BD, AC, sont aussi égaux; et parce que si deux angles m, r d'un triangle sont égaux aux deux n, s d'un autre triangle, ces triangles ont aussi le troisième angle égal (260), on a l'angle A=D. Ces deux triangles ABC, DBC ont donc tous les angles égaux et un côté CB commun, ce qui les rend égaux en toutes choses (238); donc, AB=CD et AC=BD, et puisque $m=n$ et $r=s$ il s'en suit que $m+s=n+r$, c.-à-d., que B=C: donc, etc.

(271) **Cor. 1. Parallèles entre parallèles sont égales.**



(272) Cor. 2. De là l'exactitude de la définition de lignes parallèles (**141**); car la distance entre deux parallèles est la perpendiculaire qui les unit (**142**) et deux perpendiculaires à une même ligne ou à deux lignes parallèles sont parallèles entre elles; d'où il suit que **deux parallèles sont partout à la même distance l'une de l'autre.**

(273) **Cor. 3.** De là aussi, **la somme de deux angles adjacents** A, C ou A, B **d'un parallélogramme vaut deux angles droits.**

(274) **Cor. 4. Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, les autres côtés seront aussi égaux et parallèles, et le quadrilatère sera un parallélogramme.**

(275) **Cor. 5. Tout quadrilatère dont les côtés opposés sont égaux a ses côtés opposés parallèles et est en conséquence un parallélogramme.**

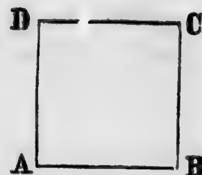
Car, ayant mené la diagonale CB, on aura les triangles ABC, DBC mutuellement équilatères, à cause de AB=CD, AC=BD et CB commun. Les angles *m*, *n* seront donc égaux, ainsi que ceux *r*, *s*; ce qui (**154**) rend parallèles les côtés AB, CD ainsi que ceux AC, BD.

(276) **Cor. 6. Un losange est un parallélogramme**; car il a tous ses côtés égaux (**168 Déf.**) et égaux par conséquent deux à deux, c.-à-d., ses côtés opposés égaux.

(277) **Cor. 7.** Il suit encore que **si les angles opposés d'un quadrilatère sont égaux, les côtés opposés sont aussi égaux et parallèles**; car tous les angles de la fig. étant ensemble égaux à 4 angles droits (**255**), chaque paire d'angles adjacents sera égale à 2 angles droits, ce qui fera (**154**) que les côtés opposés seront parallèles et par conséquent égaux (**271**).

(278) **Sco. 1. PROB.** Puisque si l'un des angles d'un parallélogramme est droit, les autres le sont aussi, nécessairement; il suit que pour **faire un carré AC sur une ligne**

donnée AB, il n'y a qu'à faire à l'une A des extrémités de la ligne donnée un angle droit DAB, sur AD porter une longueur =AB et par les points D, B mener DC, BC respectivement parallèles à AB, AD.

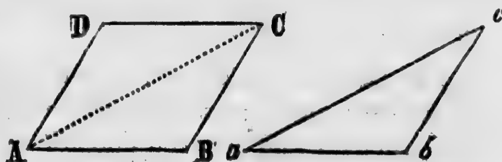


En effet, par le théor., AD, BC étant parallèles, on aura DC=AB, et pour une raison analogue AD=BC; mais AB=AD par constr.; donc, (**68 Ax.**) BC=AB; donc tous les côtés du rectangle AC sont égaux; donc, AC est le carré demandé.

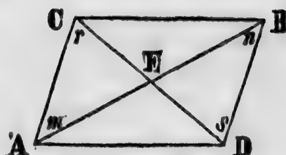
(**279**) **Sco. 2. PROB.** Si au lieu de **faire** AD=AB, l'on faisait ce côté inégal à AB, il est évident que la même construction donnerait **un rectangle.**

(**280**) **Sco. 3. PROB.** Si A était un angle quelconque et que AB, AD fussent respectivement égales à deux lignes données, il est évident que par le même procédé l'on pourrait **construire un parallélogramme** ayant un angle égal à un angle donné et les côtés adjacents égaux à deux lignes données,

(**281**) **Cor. 8.** Puisque par la prop. tout parallélogr. est divisible par sa diagonale en deux triangles égaux; il s'en suit que **tout triangle** *abc* **peut être considéré comme moitié d'un parallélogramme correspondant** BD, **c'est-à-dire ayant ses côtés adjacents** AB, BC **et l'angle compris** B **respectivement égaux aux côtés adjacents** *ab*, *bc* **et à l'angle compris** *b* **du triangle.**



(**282**) **Cor. 9. Si deux parallélogrammes ont un angle de l'un égal à un angle de l'autre, les autres angles des deux parallélogrammes seront respectivement égaux l'un à l'autre.**



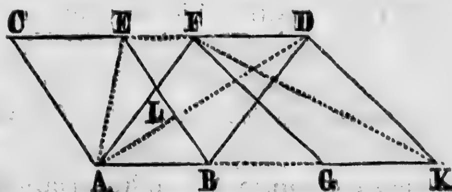
(283) **Cor. 10. Les diagonales AB, CD d'un parallélogramme se bissectent mutuellement.**

En effet, puisque dans les triangles AEC, DEB, les côtés AC, DB sont égaux par la prop., l'angle *m* égal à son alterne *n* et celui *r* à son alterne *s*; il suit (238) que CE=DE et que AE=BE; donc, etc.

On remarquera aussi que lorsque AB est un rhombe ou losange, les quatres côtés AC, CB, BD, AD sont égaux (168). Dans ce cas, l'on aura dans les triangles adjacents ACE, BCE, AC=CB, AE=EB et CE commun; ces deux triangles auront donc tous leurs côtés respectivement égaux et leurs angles homologues aussi égaux; ce qui donnera l'angle CEA=CEB; c.-à-d, que **dans un losange les diagonales se coupent à angles droits.**

PROP. IX. THÉOR.

(284) **Les parallélogrammes** CB, AD **sur même base** AB **et entre mêmes parallèles** AB, CD **sont équivalents,** c.-à-d., **(204) égaux en surface.**



Parce que CB est un parallélogr., on a CE =AB; pour la même raison FD=AB; donc CE=FD (**68 Ax.**) Maintenant EF étant commun à CF et à DE, donne CF=DE. De plus les parallélogrs. CB, AD donnent CA=EB et FA=DB. Les triangles CAF, EBD sont donc égaux (**239**), puisque tous leurs côtés sont égaux, savoir: CF à ED, CA à EB et FA à DB. Enfin, retranchant du trapèze CABD les triangles égaux CAF, EBD, on obtient le reste CB égal (**204**) au reste AD; donc, etc.

Autrement : des triangles égaux CAF, EBD, retranchant la partie commune ELF, il viendra le trapèze CELA égal à celui DFLB (**77 Ax.**) et à ces trapèzes égaux ajoutant le triangle commun ALB, l'on aura, comme auparavant, le parallélogr. CB égal à celui AD.

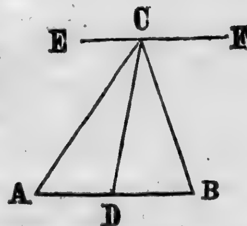
(**285**) **Cor. 1. Les parallélogrammes** CB, FK **sur bases égales** AB, GK **et entre mêmes parallèles** AK, CD **sont équivalents.**

Puisque par hyp. AB=GK, et que FK est un parallélogr., FD=GK ; donc, AB=FD (**68 Ax.**) et ces deux lignes sont parallèles, puisqu'elles forment partie des parallèles CD, AK ; or, on a vu (**274**) que lorsque deux côtés opposés d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, ce quadrilatère est un parallélogr. ; donc, AD est un parallélogr. Considérant maintenant FD comme base des parellélogrs, AD, FK, l'on prouverait comme on vient de le faire par la prop. que FK est égal en surface à AD ; mais par la prop., CB est égal en surface à AD, et deux choses égales à une troisième sont égales entre elles (**68 Ax.**) ; donc, CB est égal en surface, c.-à-d., équivalent à FK.

(**286**) **Cor. 2. Les triangles** EAB, DAB **sur même base** AB **ou** EAB, GFK **sur bases égales** AB, CK **et entre mêmes parallèles** AK, CD **sont équivalents.**

En effet, ces triangles ne sont que les moitiés de parallélogrs. correspondants (**281**) CB, AD ou CB, FK dont on peut prouver par ce théor. l'égalité de surface ; or les moitiés de quantités égales sont égales (**69 Ax.**)

(**287**) **Sco. 1.** Donc, **une ligne** CD **menée du sommet** C **d'un triangle** ABC **au milieu** D **de sa base** AB **bissecte le triangle, c'est-à-dire, le partage en deux triangles équivalents** ACD, BCD.

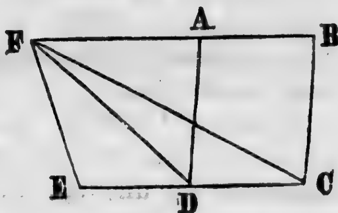


Car ce sont deux triangles sur bases égales AD, DB, et entre même parallèles AB, EF.

(288) **Sco. 2. PROB.** Il suit que pour **partager un triangle en un nombre quelconque de parties équivalentes ou proportionnelles, par des lignes menées du sommet à la base**; il n'y a qu'à partager la base en le nombre requis de parties égales (**513**) ou proportionnelles (**514**) et mener des lignes du sommet aux points de division.

(289) **Cor. 3.** (Fig. du par. 284). **Si un parallélogramme** CB ou FK **et un triangle** ADB **sont sur même base** AB **ou sur bases égales** AB, GK **et entre mêmes parallèles** AK, CD **le parallélogramme est double du triangle.**

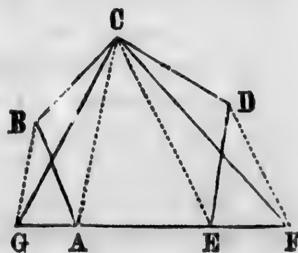
(290) **Sco. 3. PROB.** Il suit du dernier cor. que pour **faire un parallélogramme** ABCD **équivalent à un triangle donné** EFC **et ayant un angle** ADC **égal à un angle donné**; il n'y a qu'à bissecter en D la base EC du triangle (**244**), mener par le sommet F du triangle la ligne FB parallèle à la base, au point D mener DA faisant l'angle ADC égal à l'angle donné et mener CB parallèle à DA.



En effet, la constr. donne DC=DE et le triangle DFC=DFE (**286**); mais (**289**) AC=2DFC; donc AC=EFC double de DFC.

(**291**) **Sco. 4. PROB.** Si l'angle ADC est droit, le parallélogr. est un rectangle équivalent au triangle EFC; donc par la même constr., l'on peut **faire un rectangle équivalent à un triangle donné.**

(292) **Sco. 5. PROB. Trouver un triangle** GCF **équivalent à une figure rectiligne quelconque** ABCDE.



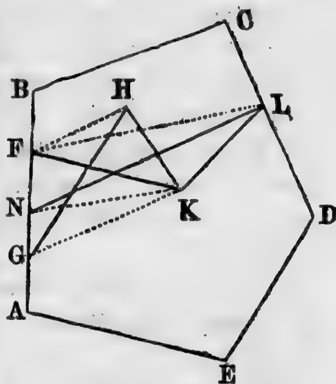
Ayant prolongé indéfiniment l'un AE des côtés du polygone donné, joignez CE, menez DF parallèle à CE et joignez CF; vous

aurez le polygone ABCF équivalent au polygone donné, mais avec un côté de moins.

Les triangles CDE, CFE sur même base CE et entre mêmes parallèles CE DF sont équivalents par cette prop. Or, en retranchant du pol. donné le triangle CDE, pour lui substituer le triangle équivalent, CFE, il est évident qu'on n'en altère en rien la surface.

Procédant de même sur les autres côtés du pol., on finit par le réduire en un triangle équivalent, quelque nombreux que soient les côtés du pol.

(293) Sco. 6. PROB. Il suit des deux dernières scolies **qu'un polygone quelconque peut être réduit à un rectangle équivalent.**

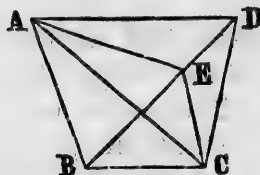


(294) Sco. 7. PROB. La sco. 5, indique clairement que pour **remplacer par une ligne droite NL la ligne brisée GHKL qui partage en deux parties une figure quelconque ABCDE, mais de manière à n'altérer en rien les aires relatives de ces parties**; il n'y a qu'à considérer une des parties comme polygone et procéder ensuite comme ci-dessus.

Par exemple, joignant GK, menant HF parallèle à GK et joignant FK ; on aura remplacé le triangle GHK par celui GFK de même base GK et entre mêmes parallèles FH, GK ; ce qui laissera le pol. CBFKL équivalent à celui CBGHKL, et ayant un côté de moins.

Joignant ensuite FL, menant KN parallèle à FL et tirant NL ; l'on aura substitué au triangle FKL, celui FNL qui lui est égal, étant sur même base FL et entre mêmes parallèles FL, KN ; ce qui réduite nfin la ligne brisée GHKL à la droite NL sans changer les surfaces relatives des polygones adjacents.

Si la ligne brisée GHKL était composée d'un plus grand nombre de parties, l'on continuerait d'une manière analogue la réduction.



(295) Cor. 4. Le réciproque de cette prop. est également vrai ; c.-à-d., **les triangles équivalents BAC, BDC sur même base BC et du même côté de cette base, sont entre parallèles BC, AD.** Car, s'il n'en était pas ainsi, il arriverait que deux triangles sur même base et entre parallèles pourraient être inégaux en surface; or dans tous les cas possibles on prouverait l'égalité de ces surfaces comme on l'a fait dans cette prop. Il n'y aurait donc aucun cas où les lignes étant parallèles et la base la même, les triangles seraient inégaux; et de même il ne pourrait exister de cas où les triangles étant égaux et sur la même base ne seraient pas entre mêmes parallèles.

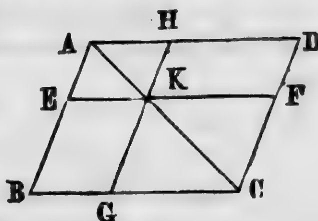
D'ailleurs, si AD n'est pas parallèle à BC que AE soit cette parallèle. La prop. nous donnera BAC=BEC ; mais par hyp. BAC=BDC ; donc aussi BEC=BDC, ce qui est absurde.

(296) Cor. 5. **Les triangles équivalents, sur bases égales placées dans la même ligne droite, et du même côté de ces bases, sont entre parallèles.**

Car, puisque les bases sont égales, les triangles peuvent être superposés de manière à faire coincider les bases égales, et ces bases seront encore sur la même ligne droite; ce qui permettra de faire la même preuve que dans le dernier cas.

PROP. X. THÉOR.

(297) **Les compléments HF, EG des parallélogrammes EH, FG autour du diamètre AC d'un parallélogramme BD sont équivalents l'un à l'autre, ou égaux en surface.**



Parce que BD est un parallélogr. la diagonale AC le partage en deux triangles égaux ABC, ADC (Prop. VIII). De même, AHK=AEK et CFK=CGK; et si des triangles égaux ADC, ABC l'on retranche AHK, AEK et CFK, CGK, qui sont égaux deux à deux, les restes HF, EG seront égaux (77 **Ax.**); donc, etc.

(298) **Sco. 1. PROB.** Il suit de cette prop. que pour **faire sur une ligne donnée HK, un parallélogramme HF équivalent à un triangle donné, et ayant un HKF de ses angles égal à un angle donné**; il faut d'abord faire (290) un parallélogr. EG équivalent au triangle donné, et ayant un angle EKG égal à l'angle donné, et un côté KG sur la même ligne droite que KH.

Prolongeant ensuite BE pour rencontrer DA menée par le point H parallèle à EK ou à BG, menant AKC pour rencontrer BG prolongée en C, menant CD parallèle à GH ou BA et prolongeant AH, EK jusqu'en D, F; on aura enfin HF=EG égal au parallélogr. demandé sur la ligne donnée KH et ayant l'angle HKF égal à son opposé au sommet EKG=l'angle donné.

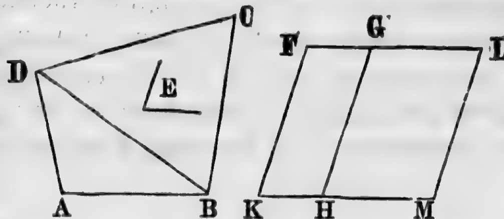
Tout ceci est évident par la constr. de la fig. qui donne les lignes AD, EF, BC parallèles l'une à l'autre et celles AB, HG, DC de même parallèles l'une à l'autre, et forme les parallélogrs. BD, EH, GF et ceux HF, EG, compléments de ces derniers.

(299) **Sco. 2. PROB.** De là, **un triangle peut être converti en un rectangle équivalent ayant un côté d'une longueur donnée**; car si K était un angle droit, le parallélogr. HF serait un rectangle.

(300) **Sco. 3. PROB.** Il est évident aussi que si EG était un rectangle, HF serait aussi un rectangle; d'où il suit qu'un **rectangle étant donné**, pour **faire un rectangle**

équivalent ayant un côté égal à une ligne donnée; il n'y aurait qu'à disposer la ligne donnée en ligne droite avec un côté du rectangle donné et procéder ensuite comme ci-dessus.

(301) **Sco. 4. PROB.** Ayant déjà indiqué (290), la manière de faire un parallélog. FH, égal à un triangle donné ADB et ayant un angle K égal à un angle donné E; et ayant aussi démontré (298) comment faire sur une ligne donnée HG un parallélog. GM égal à un triangle donné DBC et ayant un angle égal à un angle donné E; il est clair que la combinaison de ces deux méthodes fournit celle de **faire un parallélogramme FM équivalent à un quadrilatère donné AC et ayant un angle K égal à un angle donné E.**



Car, après avoir fait FH=ADB, si à la ligne HG on applique le parallélogr. GM=DBC, il est évident que FM sera égal à la fig. entière AC. De plus, FM sera un parallélogr. pourvu que l'angle GHM soit =K=E; puisqu'alors la somme des angles GHK, GHM vaudra, comme celle des angles ints. GHK, FKH, deux angles droits (152), et que la ligne KM sera en conséquence droite (135) et parallèle à FL, pendant que ML sera aussi parallèle à HG ou KF.

(302) **Sco. 5. PROB.** Si la fig. rect. AC contenait plus de deux triangles, on procéderait à ajouter successivement à l'un des côtés ML ou FL du parallélogr. FM, un nouveau parallélogr. égal à un des autres triangles de la fig.; et ainsi de suite jusqu'à la fin; ce qui indique clairement la manière **de faire un parallélogramme équivalent à un polygone ou à une figure rectiligne quelconque.**

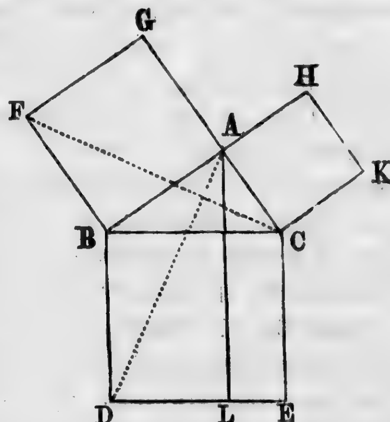
(303) **Sco. 6. PROB.** Si l'on avait à construire le parallélogr. FM sur une ligne donnée KF, on le ferait par la méthode du par. 298, en construisant d'abord sur la ligne

donnée un parallélogr. FH égal au premier triangle de la fig. AC et ayant un angle égal à l'angle donné ; d'où il suit que l'on peut **faire sur une ligne donnée un parallélogramme équivalent à une figure rectiligne donnée quelconque et ayant un angle égal à un angle donné.**

(304) Sco. 7. **PROB.** Il suit encore des scolies 6 et 3 **qu'un polygone peut être converti en un rectangle équivalent ayant un de ses côtés d'une longueur donnée.**

PROP. XI. THÉOR.

(305) **Dans tout triangle rectangle BAC, le carré DC fait sur l'hypoténuse BC est égal à la somme des carrés BG, CH faits sur les autres côtés BA, CA du triangle.**



Joignez FC, DA et menez AL parallèle à BD ou à CE. Parce que BAC, BAG sont des angles droits, GAC est une ligne droite (135) et elle est parallèle à BF (171). Dans les triangles FBC, ABD, les côtés BA, BF sont égaux et BD, BC sont aussi égaux, étant les côtés d'un même carré ; et l'angle FBC de l'un est égal à celui ABD de l'autre ; car chacun de ces angles est composé d'un angle droit ABF, CBD et de l'angle ABC commun aux deux triangles. Les triangles FBC, ABD ayant deux côtés FB, BC et l'angle inclus FBC de l'un respectivement égaux aux deux côtés AB, BD et à l'angle inclus ABD de l'autre, sont en conséquence égaux en surface (237).

Cela posé, BG étant un parallélogr. (171), et FBC un triangle sur même base BF et entre mêmes parallèles FB, GC ; le triangle FBC est moitié du parallélogr. BG (289).

Pour une raison analogue, le triangle ABD est moitié du parallélogr. BL. Mais on vient de voir que les triangles FBC, ABD sont égaux ; et les doubles de quantités égales sont égaux (69 Ax.) ; donc, BL=BG. On prouverait de même CL=CH ; mais BL+CL=BE ; donc aussi, BG+CH=BE ; donc, etc.

(306) Sco. 1. PROB. **Pour trouver le côté BC d'un carré BE équivalent à la somme de deux autres carrés donnés BG, CH** ; il n'y a donc qu'à porter sur deux lignes indéfinies AB, AC à angle droit, des longueurs AB, AC respectivement égales aux côtés des carrés donnés et joindre BC qui sera le côté requis.

(307) Sco. 2. PROB. On peut aussi **faire un carré équivalent à un nombre quelconque de carrés donnés** ; car, d'après la construction qu'on a faite pour en réduire deux à un, on en réduira trois à deux et ces derniers encore à un, et ainsi de suite.

(308) Cor. 1. Donc, $AB^2=BC^2-AC^2$ ou $AC^2=BC^2-AB^2$; c.-à-d., **le carré fait sur un des côtés d'un triangle rectangle est égal au carré fait sur l'hypoténuse, moins le carré fait sur l'autre côté.**

(309) Sco. 3. PROB. **Pour trouver le côté AC d'un carré CH équivalent à la différence de deux carrés donnés BG, BE** ; il n'y a qu'à porter sur l'une AB de deux lignes AB, AC à angle droit, une longueur AB égale au côté du plus petit des deux carrés donnés, et du point B avec un rayon BC égal au côté de l'autre carré, décrire un arc coupant AC en C ; AC sera le côté demandé.

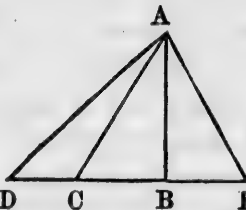
(310) Cor. 2. Si AB=AC, c.-à-d., si le triangle BAC est isocèle en même temps que rectangle, on aura $BC^2=2AB^2=2AC^2$; or un triangle isocèle rectangle est évidemment la

moitié d'un carré ayant pour diagonale l'hypoténuse du triangle ; donc, **le carré fait sur la diagonale d'un carré est double du carré fait sur le côté** ; donc aussi, $BC = AB\sqrt{2}$. (37.)

(311) **Cor. 3.** Il suit aussi de cette prop. que **si deux triangles rectangles ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés correspondants de l'autre, leurs troisièmes côtés seront aussi égaux et les triangles seront identiques.**

(312) **Sco. 4.** Les côtés égaux peuvent être un côté et l'hypoténuse ; donc, **si deux triangles rectangles ont un côté et l'hypoténuse de l'un égaux au côté correspondant et à l'hypoténuse de l'autre, ces deux triangles seront égaux en toutes choses.**

(313) **Cor. 4. La perpendiculaire AB est la plus courte distance d'un point A à une ligne DE.**



Car, $AB^2 = AC^2 - BC^2$; donc aussi, AB=AC—quelque chose ; donc, AB est moindre que AC, **et parce qu'elle est plus courte qu'aucune autre ligne, elle mesure la vraie distance d'un point à une ligne.**

D'ailleurs, l'angle ABC étant droit, celui ACB est nécessairement aigu (252), c.-à-d., moindre que ABC. Mais (267) un plus petit angle dans un triangle est sous-tendu par un plus petit côté ; donc, AB est moindre que AC.

(314) **Cor. 5. Si deux lignes obliques quelconques AC, AE menées d'un même point A à une troisième ligne DE et de côtés opposés de la perpendiculaire AB, coupent sur cette ligne DE des distances égales BC, BE, ces deux lignes seront égales.**

Car les angles ABC, ABE sont droits, à cause de AB perpendiculaire sur CE ; de plus BC=BE par hyp., et AB est commun ; donc, $AB^2 + BC^2 = AB^2 + BE^2 = AE^2 = AC^2$; donc, AE=AC.

D'ailleurs, quand deux triangles ont deux côtés et l'angle compris de l'un égaux à deux côtés et à l'angle compris de l'autre, ces triangles sont égaux en toutes choses (**237**).

(**315**) **Cor. 6. De deux lignes obliques quelconques AC, AD menées d'un même point A à une ligne DE, la plus courte est celle AC qui est le plus près de la perpendiculaire menée du même point A à cette ligne; et l'on ne peut mener deux lignes égales du même côté de la perpendiculaire.**

Car $AD^2=AB^2+BD^2$ et $AC^2=AB^2+BC^2$; $BC^2<BD^2$, donc, $AD^2>AC^2$; c.à-d., $AD>AC$ ou $AC<AD$.

D'ailleurs, parce que l'angle ACB est aigu, ACD est obtus (**133**); mais à cause de ABD qui est droit, ADB est aussi aigu; et comme le plus grand côté est opposé au plus grand angle, on a $AD>AC$.



(**316**) **Cor. 7. Tout point A dans la perpendiculaire AB au milieu d'une ligne CE, est également éloigné des extrémités E, C de cette ligne.**

(**317**) **Cor. 8. Tout point hors de la perpendiculaire au centre d'une ligne est inégalement éloigné des extrémités de cette ligne.**

(**318**) **Cor. 9. Du même point on ne peut mener à une même ligne trois lignes droites égales**; car si cela se pouvait, on aurait deux lignes obliques égales du même côté de la perpendiculaire; ce qui (**315**) est impossible.

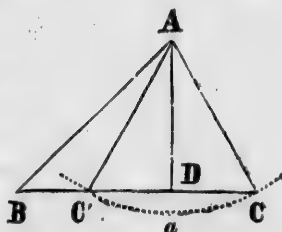
(**319**) **Cor. 10. Si le carré décrit sur un AE des côtés d'un triangle ABE est équivalent à la somme des carrés décrits sur les deux autres côtés AB, BE, l'angle ABE contenu par ces deux côtés est un angle droit.**

En effet, soit ABC un angle droit et BC=BE; on aura $AC^2=BC^2+AB^2$; mais par hyp. $AE^2=BE^2$ ou BC^2+AB^2; donc, $AE^2=AC^2$, c.-à-d., AE=AC. Dans les deux triangles ABC, ABE l'on a donc tous les côtés de l'un égaux aux côtés correspondants de l'autre; mais (**238**) si les côtés

sont égaux dans deux triangles, les angles le sont aussi ; or, l'angle ABC est droit par hyp., donc aussi l'angle EBA est droit.

PROP. XII. THÉOR.

(320) Il peut y avoir deux triangles différents AC'B, ACB dont deux côtés AB, AC' de l'un soient égaux à deux côtés AB, AC de l'autre, et un angle B égal dans chacun, pourvu que dans chaque triangle cet angle soit opposé au plus petit de ces côtés.



En effet, AC étant par hyp. =AC' le triangle C'AC est isocèle ; donc, l'angle AC'C=ACC' (229); mais l'angle AC'B est supplément de AC'C (130) ; il est donc aussi supplément de C. On aura donc avec les mêmes données un triangle acutangle ACB ou obtusangle AC'B ; mais ces deux triangles seront tels que l'angle aigu C de l'un sera toujours supplément de l'angle obtus C' de l'autre.

Il est évident que si le côté AC était égal à la perpendiculaire AD, ce qui donnerait aussi AC'=AD, les deux triangles AC'B, ACB se confondraient et ne formeraient plus qu'un seul et même triangle ADB ; donc, etc.

(321) **Sco. PROB.** Il suit du théor. que **étant donné deux côtés AB, AC d'un triangle et un angle B opposé au plus petit AC de ces côtés pour construire le triangle** ; il faudra, après avoir pris AB égal au plus grand des côtés donnés, faire au point B un angle ABC égal à l'angle donné B, et du point A comme centre, avec un rayon AC égal à l'autre côté donné, décrire un arc C'aC coupant BC en C', C; puis, joindre AC', AC qui, étant rayons d'un même cercle, seront égaux.

Chacun des triangles ACB, AC'B répondra aux données

du problème, et il est clair que pour déterminer le triangle requis il faudrait de plus savoir s'il est acutangle ou obtusangle.

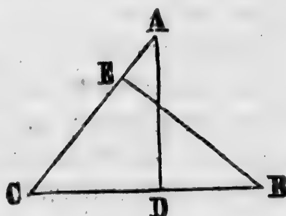
Observons encore que le problème serait impossible si le côté AC était moindre que la perpendiculaire AD menée du point A sur le côté opposé BC.

Si l'angle donné était opposé au plus grand des deux côtés donnés, il est clair que la construction se ferait d'une manière analogue; mais ne donnerait qu'un seul triangle AC'B, ADB ou ACB suivant que l'angle donné serait obtus, droit ou aigu.

PROP. XIII. THÉOR.

(322) **Deux angles A, B sont égaux si les côtés AC, AD de l'un sont respectivement perpendiculaires à ceux BC, BE de l'autre.**

Puisque AD est perpendiculaire à BC et BE à AC, il s'en suit que les deux triangles CDA, CEB, ont les angles en D et E droits et égaux. Ces triangles ont aussi un angle C commun, et parce que quand deux triangles ont deux angles de l'un égaux à deux angles de l'autre, ces triangles ont aussi leurs troisièmes angles égaux (260); l'angle A=B; donc, etc.



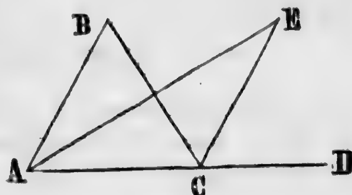
(323) **Cor. Si les trois côtés d'un triangle sont perpendiculaires aux trois côtés d'un autre triangle, ces triangles sont équiangles**; vérité qui suit immédiatement du théor.

Autrement. Si l'on suppose qu'un triangle dont les côtés sont perdendiculaires à ceux d'un autre triangle, tourne autour d'un de ses points angulaires, de manière à ce qu'un de ses côtés décrive un angle droit; il est clair que ses autres côtés décriront aussi des angles droits, et que chacun des côtés deviendra parallèle aux côté correspondant de l'autre; d'où aussi, **deux triangles sont équiangles si les côtés de l'un sont parallèles à ceux de l'autre.**

D'ailleurs, cette propriété se déduit directement de l'énoncé fait au par. (151).

PROP. XIV. THÉOR.

(324) Si l'on bissecte l'angle extérieur BCD d'un triangle ABC et l'un BAC de ses angles intérieurs opposés, l'angle E formé par la rencontre des deux bissectrices CE, AE est égal à la moitié de l'autre angle B du triangle.

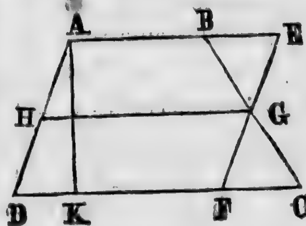


D'abord, parce que (251) l'angle ext. BCD>l'angle int. BAC, on aura ECD moitié du premier plus grand que EAC moitié du second ; donc, ECD est l'angle ext. d'un triangle EAC, c.-à-d., que CE, AE prolongées suffisamment se rencontreront.

Maintenant parce que ECD=$\frac{1}{2}$BCD et EAD=$\frac{1}{2}$BAD par constr., et parce que BCD=BAC+ABC, ECD=$\frac{1}{2}$BAC+$\frac{1}{2}$ABC ; c.-à-d., ECD=EAC+$\frac{1}{2}$B ; mais l'angle ext. ECD=EAC+E (251) ; donc, EAC+E=EAC+$\frac{1}{2}$B (68 **Ax.**) ; donc, E=$\frac{1}{2}$B ; donc, etc.

PROP. XV. THÉOR.

(325) Un trapèze quelconque ABCD est égal en surface à un parallélogramme AEFD de même hauteur AK, et de base HG, ou DF égale à la demi-somme $\frac{AB+DC}{2}$ des bases parallèles AB, DC du trapèze.

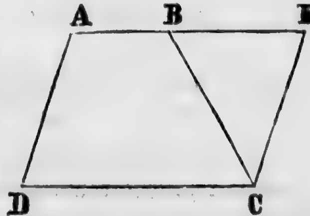


En effet, par le point G, milieu de BC, menant EF parallèle à AD et prolongeant AB jusqu'en E ; l'on aura le triangle FGC retranché du trapèze d'une part, égal à celui EGB qu'on lui ajoute d'autre part ; car, dans ces deux

triangles, l'égalité provient de ce que GC un côté de l'un est égal par constr. à BG un côté de l'autre et que tous les angles sont respectivement égaux (**238**), savoir: E égal à son alterne F (**153**), B égal à son alterne C et FGC à son opposé au sommet EGB ; donc AEFD=ABCD.

Il est clair aussi que HG menée par le point milieu G parallèle à AB ou à DC est égale à AE ou DF et DH=FG, puisque les parallèles entre parallèles sont égales (**271**). Maintenant, à cause de l'égalité des triangles EGB, FGC, l'on a BE=FC; donc, AB+DC=2DF (ou 2 AE)=2HG; donc, HG menée par le point milieu G du trapèze, parallèle à AB ou à DC, est égale à la demi-somme des bases parallèles du trapèze; donc, etc.

(**326**) **Sco. 1.** Parce que HG est parallèle à AE et à DF et que EG=GF, on a aussi AH=HD, car AH=EG et DH=FG. Le point H est donc aussi le point milieu du côté AD du trapèze; donc, l'on peut dire aussi que **la surface d'un trapèze est égale à celle d'un parallélogramme de même hauteur et de base égale à la ligne menée entre les points milieux de ses côtés inclinés.**



(**327**) **Sco. 2. PROB.** Si ABCD est un trapèze, et que par le point C l'on mène CE parallèle à DA, prolongeant AB pour rencontrer CE en E, l'on aura CE=DA, à cause des parallèles entre parallèles, et BE=DC—AB égal à la différence entre les bases parallèles. D'où l'on tire la manière de **construire un trapèze lorsque les quatre côtés seulement en sont donnés.**

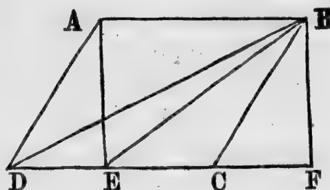
A cette fin, prenant pour base de l'opération l'un BC des côtés inclinés du trapèze et avec des longueurs CE,BE respectivement égales à l'autre côté incliné DA, et à la différence entre les bases parallèles du trapèze, construisant un triangle BEC, prolongeant EB d'une quantité=BA et par

les points A, C menant AD, CD respectivement parallèles à EC, AB, on aura le trapèze demandé.

PROP. XVI. THÉOR.

(328) **Un parallélogramme quelconque ABCD est égal en surface à un rectangle ABFE de même base AB ou EF et de même hauteur AE ou BF.**

Cette propriété se déduit directement de la prop. IX (**284**) puisqu'un rectangle est en même temps un parallélogr. (**171**).



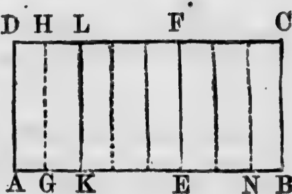
D'ailleurs, puisque dans les triangles AED, BFC, DA=CB et AE=BF (**270**), et que les angles AED, BFC sont droits et égaux; les triangles sont égaux en toutes choses (**312**); et comme le triangle AED que l'on retranche d'un côté est égal à celui BFC que l'on ajoute de l'autre, il est clair que le rectangle AF est égal au parallélogr. AC.; donc, etc.

(329) **Cor. Tout triangle DBC est égal à un triangle rectangle EBF de base égale EF et de même hauteur BF.**

Car le triangle rectangle EBF est moitié du rectangle AF (**270**) et le triangle DBC moitié du parallélogr. AC; mais on vient de prouver que le rectangle est égal au parallélogr. et les moitiés de choses égales sont égales (**69**).

PROP. XVII. THÉOR.

(330) **Deux rectangles AF, AC de même hauteur AD sont entre eux comme leurs bases AE, AB;** c.-à.d., **leurs surfaces sont proportionnelles à leurs bases.**



En effet, **si les deux bases** AE, AB **sont commensurables** (48), on pourra les supposer divisées en un certain nombre de parties égales AG, GK, etc. ; et si par les points de division G, K, etc., on mène les lignes GH, KL, etc., perpendiculaires à AB ou parallèles à AD, l'on aura un certain nombre de rectangles égaux AH, GL, etc., (**171** et **285**), puisque tous ces rectangles auront bases et hauteurs égales. Or, il est clair que si le rectangle AF par exemple contient 5 rectangles partiels, AH, et que celui AC en contienne 8, les surfaces de ces rectangles seront entre elles comme 5 est à 8 ou comme AE à AB.

Le même raisonnement peut s'appliquer quel que soit le rapport de AE à AB ; de là, quel que soit ce rapport, si ses termes sont commensurables, on aura AF : AC : : AE : AB.

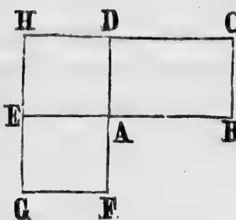
(**331**) En second lieu, **si l'on suppose que les bases** AE, AB **soient incommensurables** (50), il est à démontrer que l'on aura encore AF : AC : : AE : AB.

Si l'unité de mesure AG est contenue un nombre exact de fois en AE, mais non en AB ; il y aura un reste NB qui sera à AG dans un rapport quelconque. Si le reste NB était égal à la moitié de AG, il est clair que la surface NC serait aussi égale à la moitié de AH par le dernier par.

De même, si NB est le tiers, le quart, le cinquième ou aucune autre fraction ou partie de l'unité de mesure AG, que cette fraction puisse ou non s'exprimer en nombres finis (**51**), il est clair que la surface NC qui lui correspond sera la même fraction ou partie de celle AH que NB l'est de AG ; c-à-d. que NC est à AH : : NB : AG ; mais NC, AG sont deux rectangles quelconques de même hauteur ; donc aussi, AF, AC qui sont deux rectangles quelconques de même hauteur seront entre eux comme leurs bases ; c-à-d., on aura AF : AC : : AE : AB ; donc, etc.

PROP. XVIII. THÉOR.

(332) **Deux rectangles quelconques** AC, AG **sont entre eux comme les produits de leurs bases** AB, AE **multipliées par leur hauteurs** AD, AF; c.-à-d. que l'on aura AC : AG :: (AB.AD) : (AE.AF).

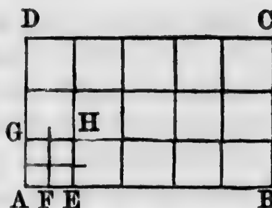


Disposons les deux rcetangles de manière qu'ils aient un sommet commun A et leurs bases AE, AB sur la même ligne droite EB, et prolongeons les côtés CD, GE jusqu'à leur rencontre en H; AH sera évidemment un rectangle et l'on aura par le dernier théor. AC : AH :: AB : AE et AH : AG :: AD : AF.

Maintenant nous avons vu (**103**) que les produits des termes correspondants de deux séries de quantités proportionnelles sont eux mêmes proportionnels ; on aura dans ce cas AC×AH : AG×AH :: AB×AD : AE×AF. Supprimant AH qui est commun aux deux premiers termes, ce qui par conséquent (**73 Ax.**) n'en change pas le rapport, il reste enfin AC : AG :: (AB.AD) : (AE.AF); donc, etc.

PROP. XIX. THÉOR.

(333) **La surface d'un rectangle** AC **est égale au produit de sa base** AB ou DC **par sa hauteur** AD ou BC, ou ce qui revient au même, à celui de deux quelconques de ses côtés adjacents (**180**) ; pourvu que l'on entende par ce produit celui de deux nombres, dont l'un est le nombre d'unités linéaires AE dans la base du rectangle, et l'autre le nombre d'unités linéaires égales AG dans la hauteur de ce rectangle.



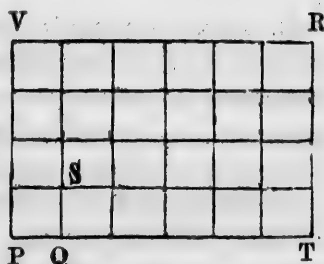
En effet, ce produit donnera le nombre d'unités superficielles AH (24) dans la surface du rectangle; parce que, pour une unité AG en hauteur, il y aura autant d'unités superficielles AH, qu'il y a d'unités linéaires AE dans la base; pour deux unités en hauteur, deux fois autant; pour trois unités en hauteur, trois fois autant, et ainsi de suite; donc, etc.

(334) **Sco. 1. Cette mesure du rectangle n'est absolue qu'autant que l'on suppose à l'unité de mesure AH ou à sa racine AE (40) une certaine valeur définie, comme celle d'un mètre, pied, pouce ou ligne, etc.**

En effet, si AE=AG=I mètre, pied, pouce, ligne, etc. en longueur; AH sera un mètre, pied, pouce, ligne, etc., carré ou superficiel; et le produit de AB par AD donnera évidemment le nombre de mètres, pieds, pouces, lignes, etc. superficiels, contenus dans le rectangle AC; c.-à-d., la superficie ou surface de ce rectangle.

(335) **Sco. 2. Si l'on ne suppose pas à l'unité de mesure une valeur définie, le produit de la multiplication ne signifiera rien par lui-même**; puisque, prenant sucessivement une unité de mesure plus petite ou plus grande que la première, on aurait un produit plus grand ou plus petit que le premier produit; car une plus petite unité AF serait contenue en AB et AD un plus grand nombre de fois, donnant pour résultat un produit numérique plus grand; tandis qu'une plus grande unité de mesure serait contenue en AB et AD un plus petit nombre de fois, et donnerait pour résultat un produit numérique plus petit.

(336) Sco. 3. Cependant si cette mesure du rectangle n'est pas absolue, elle pourra être relative, eu égard à un autre rectangle PR **composé d'unités de mesure** PS **égales à celles du premier.**



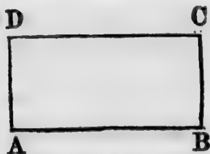
Si par exemple, il y a dans la base AB du premier rectangle 5 unités AE et dans sa hauteur 3, et dans la base PT du second rectangle 6 unités PQ égales à celles AE du premier rectangle, et dans sa hauteur 4; il est clair que les surfaces de ces deux rectangles seront l'une à l'autre comme 5×3 à 6×4 ou comme 15 à 24, puisque l'un de ces rectangles contiendra 15 unités superficielles quelconques $AH = AE^2$, et l'autre 24 unités superficielles PS égales à AH, ces unités étant des carrés égaux.

(337) Cor. 1. Donc, encore de cette manière, **les surfaces de deux rectangles sont entre elles comme les produits respectifs des bases et hauteurs de ces rectangles**; c.-à-d., AC : PR :: (AB.AD) : (PT.PV).

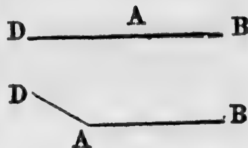
(338) Sco. 4. Cette dernière conclusion est vraie, que les côtés des rectangles ou leurs bases et hauteurs soient ou non commensurables (48); car, comme nous l'avons vu (**47 à 51**), nous pouvons, en prenant une unité de mesure de plus en plus petite, approcher tellement de cette commensurabilité, c.-à-d., du rapport entre les côtés des rectangles, que l'erreur entre le vrai rapport et le rapport approximatif soit plus petite que la moindre quantité assignable.

Et d'ailleurs, quelle que soit la longueur relative de chacun des côtés de ces rectangles, leurs surfaces dépendent évidemment d'une manière directe de ces longueurs; et que l'on puisse ou non exprimer chacune de ces longueurs en nombres finis, celà n'empêche pas que ces surfaces soient entre elles comme les produits de ces longueurs ou des

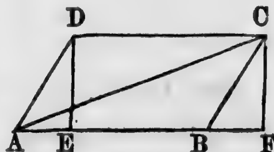
nombres qui les représentent, comme on vient de le démontrer dans la dernière prop.



(339) **Sco. 5.** Puisque la surface d'un rectangle quelconque AC ne dépend que de la longueur des deux côtés adjacents qui le comprennent ; il suffira pour l'exprimer de dire **le rectangle** AB.AD ou AD.DC, mettant un point (30) entre les deux côtés pour en indiquer le produit ; car (214) ce produit est égal à la surface en question.



(340) **Sco. 6.** De même, s'il s'agissait du rectangle que l'on pourrait faire avec les parties AD, AB de la ligne droite ou brisée DAB ; l'on dirait encore **le rectangle** AD.AB pour indiquer le produit de ces deux lignes.



(341) **Cor. 2.** Nous venons de voir que la surface d'un rectangle DF est égale au produit de sa base EF par sa hauteur DE ; mais (328) un parallélogr. quelconque DB est égal en surface à un rectangle DF de même hauteur DE et de même base DC ou EF ; d'où il suit que **la surface d'un parallélogramme quelconque ABCD est égale au produit de sa base AB par sa hauteur DE.**

(342) **Cor. 3. Les parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs ; et réciproquement, ceux de même hauteur sont entre eux comme leurs bases ;** car dans ces deux cas, un des éléments ou facteurs restant constant, les surfaces respectives des figures, ne peuvent dépendre que de l'élément ou facteur variable.

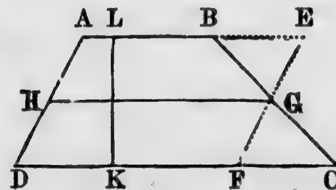
(343) **Cor. 4.** En général, **les parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs.**

(344) Cor. 5. **La surface d'un triangle quelconque ACB est égale au demi produit de sa base AB par sa hauteur CF** ; puisque (281) tout triangle ACB est moitié de son parallélogr. correspondant ABCD.

2° Il est clair aussi, comme pour les parallélogrs. que **deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases et réciproquement ceux de même base comme leurs hauteurs.**

(345) Cor. 6. En général, **les triangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases et hauteurs.**

Car ce qui est vrai de deux ou plusieurs quantités, l'est également des moitiés, des doubles, ou de tous les autres multiples ou sous-multiples égaux de ces quantités (voir les axiomes 68, etc.) ; puisque si les quantités sont égales, leurs multiples et sous-multiples égaux seront aussi égaux, et que si les quantités ont l'une à l'autre un rapport quelconque, leurs multiples ou sous-multiples égaux auront aussi entre eux le même rapport (73 Ax.)



(346) Cor. 7. On a vu (325) qu'un trapèze ABCD est égal en surface à un parallélogr. AEFD de même hauteur KL et de base DF égale à la demi-somme $\left(\frac{AB+DC}{2}\right)$ des bases parallèles AB, DC du trapèze, et l'on vient de voir (341) que la surface d'un parallélogr. AF est égale au produit de sa base DF par sa hauteur LK ; donc, **la surface d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur par la demi-somme de ses bases ou côtés parallèles.**

(347) Sco. 7. La ligne HG qui joint les points milieux des côtés opposés non parallèles du trapèze étant égale (325) à la demi-somme des bases parallèles, on peut donc aussi dire que **la surface d'un trapèze est égale au produit de sa**

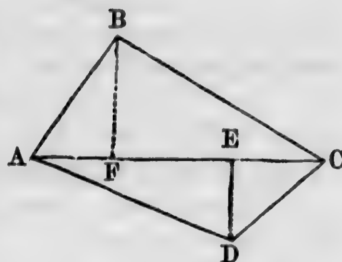
hauteur par la ligne qui joint les points milieux de ses côtés inclinés.

(348) **Sco. 8. PROBS.** Donc, pour résumer; **la surface d'un rectangle s'obtiendra toujours en faisant le produit de ses côtés adjacents ou** ce qui est la même chose, **de sa base par sa hauteur ; celle d'un carré en multipliant son côté par lui même,** puisqu'un carré n'est qu'un rectangle à côtés égaux ; **celle d'un parallélogramme, rhombe ou losange, en multipliant sa base par sa hauteur ; celle d'un triangle, en multipliant sa base par la moitié de sa hauteur ou sa hauteur par sa demi-base, ou enfin, en prenant le demi-produit de sa base et hauteur ; celle d'un trapèze, en faisant le produit de sa hauteur par la demi-somme de ses côtés parallèles, ou en prenant le demi-produit de sa hauteur par la somme de ses côtés parallèles.**

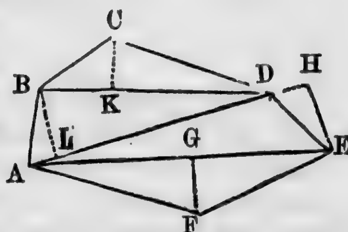
(349) **Sco. 9. PROBS.** Réciproquement, la division étant le contraire de la multiplication, puisque par la première opération l'on défait ou décompose ce qu'on fait par la seconde (22), il est clair que **pour revenir de la surface d'une figure à ses éléments ou facteurs, il faut diviser cette surface par le facteur donné pour en déduire le facteur inconnu.** Ainsi, **la surface d'un rectangle divisée par sa hauteur donnera** évidemment **sa base, ou sa surface divisée par sa base donnera sa hauteur, et il en sera de même d'un parallélogramme quelconque. La surface d'un triangle divisée par sa demi-base donnera sa hauteur, ou sa surface par la moitié de sa hauteur donnera sa base, ou encore, sa surface par sa base donnera sa demi-hauteur. Pour le trapèze,** il est clair que **sa surface divisée par sa hauteur donnera la demi-somme de ses bases parallèles,** puisque ce sont là les facteurs qui concourent à la formation de sa surface, et réciproquement **la surface du trapèze divisée par la demi-somme de ses côtés parallèles ou par la ligne qui joint les points milieux de ses côtés inclinés, donnera sa hauteur.**

(350) **Sco. 10. PROB.** La surface du carré s'obtenant en multipliant un de ses côtés par lui même ou en carrant ce côté; il est clair que **pour revenir de la surface d'un carré à son côté, il n'y a qu'à extraire la racine carrée de cette surface.**

(351) **Sco. 11. PROB.** Tout quadrilatère BD pouvant se partager en deux triangles ABC, ADC, par une diagonale menée entre deux quelconques de ses angles opposés; il est clair que **la surface d'un quadrilatère quelconque s'obtiendra en multipliant une de ses diagonales** (base commune) AC **par la demi-somme des perpendiculaires ou hauteurs** BF, DE **abaissées des angles opposés sur cette base.**

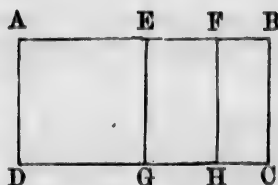


(352) **Sco. 12. PROB.** Tout polygone régulier ou irrégulier BE pouvant se diviser en triangles; il est clair que **la surface d'un polygone quelconque peut s'obtenir en calculant d'abord séparément celle de chacun des triangles qui le composent, si ces triangles sont inégaux, ou d'un seul s'ils sont égaux, au moyen de leurs bases et hauteurs respectives** BD, CK; AD, BL; AD, HE; etc.; **et en ajoutant ensemble tous ces triangles.**



PROP. XX. THÉOR.

(353) **Le rectangle** AC **de deux lignes** AD, AB **est équivalent à la somme** AD.AE+AD.EF+AD.FB **des rectangles formés par l'une** AD **de ces lignes et les parties** AE, EF, FB **de l'autre ligne.**



Il est clair que le rectangle AC est égal à la somme des rectangles AG, EH, FC; car (**84 Ax.**), le tout est égal à la somme de ses parties et EH=EG.EF, FC=FH.FB; mais parce que les parallèles entre parallèles sont égales, EG=AD et FH=AD; donc, EG.EF=AD.EF et FH.FB=AD.FB; donc, AD.AB=AD.AE+AD.EF+AD.FB; donc, etc.

(354) **Sco. 1.** Cette propriété dérive facilement de l'algèbre. Soit AD=a, AE=b, EF=c, FB=d; l'on aura $a(b+c+d)=ab+ac+ad$.

(355) **Cor. 1.** Si l'on suppose AB=AD, AC sera un carré; donc, **si l'on divise une ligne AB en deux ou plusieurs parties quelconques AE, EF, etc., les rectangles AG, EH, etc., contenus par la ligne entière et chacune des parties seront ensemble équivalents au carré de la ligne entière.**

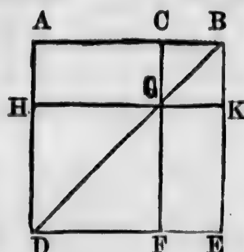
(356) **Sco. 2.** Soit AB=AD=a, AE=b, EB=c; alors, $a=b+c$; donc, multipliant de part et d'autre par a, l'on aura $a^2=ab+ad$.

(357) **Cor. 2.** Si AB est partagée en deux parties quelconques AE, EB et que AD soit égale à l'une AE de ces parties; on aura évidemment AB.AE=AB.AD=EB.AD+AE^2; car AE étant =AD, AG sera un carré; donc, **si l'on divise une ligne en deux parties quelconques, le rectangle contenu par la ligne entière et l'une des parties est équivalent au rectangle contenu par les deux parties plus le carré de l'autre partie.**

(358) **Sco. 3.** Soit AB=a, AE=b, EB=c; alors, $a=b+c$ et multipliant de part et d'autre par c, l'on a $ac=bc+c^2$.

PROP. XXI. THÉOR.

(359) **Si l'on divise une ligne AB en deux parties quelconques AC, CB ; le carré de la ligne entière AB est équivalent à la somme des carrés des deux parties AC, CB de la ligne, plus deux fois le rectangle des parties ;** c.-à-d., $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC.CB$.



Soit AE le carré sur AB et BK=BC. Par les points C, K menant CF parallèle à BE ou AD et KH parallèle à AB ou DE ; il est clair que tous les angles seront droits, et parce que les parallèles entre parallèles sont égales (271) on aura CG=BK=CB=GK. Donc, CK sera le carré sur CB. Maintenant parce que AH=BK=CB et que AD=AB, il est évident que HD=AC =HG=DF=GF; donc, HF est le carré sur DF ou son égal AC. Nous avons aussi le rectangle AG=AC.CG= AC.CB=GE, puisque GK=GC et GF=AC. Or, le carré AE est composé des carrés CK, HF et des rectangles égaux AG, GE ; donc, $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC.CB$.

(360) **Sco. 1.** Cette propriété dérive aussi du carré d'un binome. Soit AC=a, CB=b ; alors $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(361) **Cor. 1.** La diagonale BG prolongée passe par le point D. Car elle partage le carré CK en deux triangles égaux et isocèles faisant l'angle BGK=BGC. Les angles DGH, DGF sont égaux à leurs opposés au sommet BGK, BGC et valent par conséquent chacun la moitié d'un angle droit ; mais parce que DGF est moitié d'un angle droit, DFG étant un triangle rectangle, GDF sera aussi moitié d'un angle droit. Le triangle DFG est donc isocèle et DF=GF. Le triangle DEB est donc aussi isocèle, puisque DBE, BDE sont des angles égaux ; donc, DE=BE et DB

est la diagonale de AE et elle passe par le point G ; donc, **les parallélogrammes CK, HF autour du diamètre BD d'un carré AE sont aussi des carrés.**

(362) **Cor. 2. Si l'on divise une ligne AB en deux parties quelconques AC, CB ; le carré AE de la ligne entière, plus le carré CK d'une CB des parties, est équivalent à deux fois le rectangle AB.BC de la ligne entière et de cette partie, plus le carré HF de l'autre partie AC.** C'est-à-dire $AB^2+BC^2=2\,AB.BC+AC^2$.

Puisque par hyp., BK=BC ; AK=AB.BC=EB.BC=CE. Maintenant il est évident que AK+CE+HF=AE+CK ; car en prenant AK+CE, on prend le carré CK deux fois ; donc, etc.

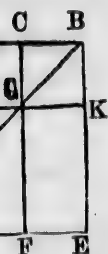
(363) **Sco. 2.** Soit AB=a, AC=b, CB=c ; alors $a^2=b^2+2bc+c^2$; ajoutant c^2 de part d'autre, on aura $a^2+c^2=b^2+2bc+2c^2$; donc $a^2+c^2=b^2+2c(b+c)$ ou $a^2+c^2=2ac+b^2$.

(364) **Cor. 3. Donc la somme des carrés de deux lignes est équivalente à deux fois le rectangle contenu par les lignes, plus le carré de la différence de ces lignes** ; car si AB, CB sont les deux lignes, leur différence est AC, et comme on vient de le voir, AB^2+CB^2 ou AE+CK=AK+CE+HF=$2AB.BC+AC^2$

(365) **Cor. 4.** Il suit aussi du dernier cor. que **le carré HF décrit sur la différence de deux lignes, est équivalent à la somme des carrés sur les deux lignes respectivement, moins deux fois le rectangle contenu par ces lignes.** Car $a-c=b$; et en carrant il vient $a^2-2ac+c^2=b^2$, ce qui se déduit aussi de la dernière sco. par transposition.

PROP. XXII. LEMME.

(366) **Si une ligne AB est divisée en deux parties égales au point C et en deux parties inégales au point D ; la partie CD de la ligne entre les points de section est**



égale à la demi-différence entre les parties inégales AD, DB **de la ligne entière.**



Faites AE=DB et vous aurez ED égale à la différence entière entre AD, DB ; or, puisque par constr. AC=CB et AE=DB, il est clair (77. **Ax.**) que AC—AE=CB—DB ; donc CD=CE=½ED ; donc, etc.

(367) **Sco. 1. PROB.** Donc, **étant donné la somme** AD+DB **de deux lignes** AD, DB **et leur différence** ED **pour trouver les deux lignes** ; il n'y aura qu'à ajouter à AC, moitié de la somme des deux lignes, la moitié CD de la différence, pour avoir le plus grand segment AD ; et de la moitié de la somme des deux lignes, retrancher la moitié de la différence, pour avoir le plus petit segment DB.

(368) **Sco. 2. PROB.** Ce que l'on vient de dire au sujet de la somme et différence de deux lignes s'appliquera également à toutes autres quantités de même espèce (25); car ce qui est dit des lignes s'entend des nombres d'unités de mesure de ces lignes ; or ces nombres peuvent également représenter ceux de deux surfaces ou solides ou encore de deux angles ; donc, en général, on pourra toujours **trouver deux quantités quelconques de même espèce, étant donné leur somme et leur différence.**

PROP. XXIII. THÉOR.

(369) **Si l'on divise une ligne** AB **en deux parties égales** au point C **et en deux parties inégales** au point D ; **le rectangle des parties inégales** AD, DB, **plus le carré de la ligne** CD **entre les points de section, est équivalent au carré de la moitié de la ligne** ; c.-à-d. que l'on aura $AD.DB+CD^2=CB^2$.

Soit CF le carré sur CB moitié de la ligne donnée. Faisant BN=BD et menant les parallèles NK, DG et AK, l'on aura comme dans le dernier théor. (359) $DN=DB^2$, $LG=CD^2$ et AH=AD.DB=le rectangle des parties inégales. Maintenant parce que BF=BC=AC et parce que AK=DH=DB, le rectangle DF=AL et DF+CH=AL+CH=AH ; or le gnomon GNC plus le carré LG=CF ; donc aussi AH+LG=CF, ou $AD.DB+CD^2=CB^2$; donc, etc.

(370) **Cor. 1.** Il suit de cette prop. que **la différence entre les carrés de deux lignes inégales AC, CD ou CB, CD, est équivalente au rectangle de leur somme AD et de leur différence DB** ; c.-à-d. AC^2-CD^2 ou $CB^2-CD^2=(AC+CD)(AC-CD)$.

(371) **Sco. 1.** Soit $AC=a$, $CD=b$; alors $AD=a+b$, et $DB=a-b$; donc $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$, c.-à-d. **le produit de la somme et de la différence de deux quantités (24) est égal à la différence de leurs carrés.**

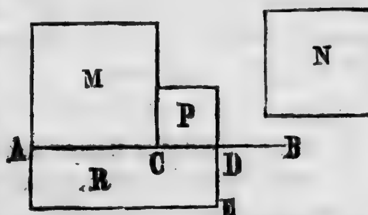
(372) **Cor. 2. De tous les rectangles contenus par les segments d'une ligne donnée, le plus grand est le carré décrit sur la moitié de la ligne.**

Car par la prop. ce carré est équivalent au rectangle des segments de la ligne plus quelque chose ; d'où il suit que le rectangle en question est équivalent au carré de la moitié de la ligne moins quelque chose ; donc le rectangle est moindre que le carré, ou le carré est plus grand que le rectangle.

(373) **Sco. 2. PROB.** Il suit de cette prop. que pour **diviser une ligne donnée AB de manière que le rectangle AD.DB de ses segments soit équivalent à un carré donné** ; ou ce qui est la même chose, pour **faire un rectangle équivalent à un carré donné et ayant la somme de ses**

côtés adjacents égale à une ligne donnée; pourvu toujours (372) que la surface du carré donné ne soit pas plus grande que celle du carré de la moitié de la ligne donnée; il n'y a qu'à bissecter (244) la ligne donnée en C, et faire (309) CD égal au côté d'un carré équivalent à la différence entre le carré sur CB et le carré donné. Le point D divisera la ligne AB de la manière voulue; c.-à-d. AD.DB sera égal au carré donné.

(374) **Autrement**; pour mieux faire saisir la solution du prob. ou pour la rendre plus ostensible et de plus facile application aux divers cas qui peuvent se présenter; soit AB la ligne donnée, bissectée en C et inégalement divisée en D. Soit aussi M le carré fait sur AC moitié de la ligne, et P le carré fait sur CD, ligne entre les points de section, et par conséquent (366) égal au carré de la demi-différence des parties inégales AD, DB; soit enfin R le rectangle requis et N le carré auquel ce rectangle doit être équivalent en surface.



Par la prop. (369) $AD.DB+CD^2=CB^2$ ou AC^2; mais par hyp. $AD.DB=AD.DE=R$, $CD^2=P$ et $AC^2=M$; donc aussi $R+P=M$, et parce que R est équivalent à N on a aussi $N+P=M$, ou $M-N=P$; et CD est le côté du carré P, c.-à-d. le côté d'un carré égal à la différence entre le carré donné N et le carré M sur la moitié de la ligne; d'où il suit clairement qu'étant donné AD+DE, somme des côtés d'un rectangle, et R, surface de ce rectangle égal au carré N; il faut, pour trouver AD et DE séparément, prendre AB= AD+DE, bissecter AB en C, sur AC décrire le carré M, trouver (309) CD égal au côté d'un carré P équivalent à la différence entre les carrés M et N, c.-à-d. (366) égal à la demi-différence entre les parties AD, DB ou entre les côtés AD, DE du rectangle requis; et enfin, (367) à AC demi-

somme des côtés adjacents du rectangle ajouter CD pour avoir le plus grand côté AD, et de AC ou de son égal CB soustraire CD pour avoir le plus petit côté DB=DE.

(375) **Sco. 3. PROB.** S'il s'agissait de **faire un rectangle AE égal en surface à un carré donné N et ayant la différence entre ses côtés adjacents égale à une ligne donnée CD**; il est clair d'après ce qui précède qu'il faudrait trouver (**306**) AC égal au côté d'un carré M équivalent à la somme du carré donné N et de celui P de la moitié de la différence donnée ; puis, comme dans le dernier cas, trouver AD=AC+CD et DE=AC—CD.

(376) **Sco. 4. PROB.** Il suit aussi que pour **faire un carré N équivalent à une figure rectiligne donnée**; il faut d'abord faire (**293**) un rectangle AE équivalent à la fig. rect. donnée ; prolonger ensuite l'un AD des côtés de ce rectangle d'une quantité DB égale à l'autre côté DE, bissecter AB en C, et faire (**309**) le côté du carré requis N égal à celui d'un carré équivalent à la différence entre les carrés M et P.

(377) **REM. Si dans les trois derniers problêmes les données étaient numériques**; on arriverait facilement aux solutions numériques, en se rappelant ce qui a été dit aux paragraphes (**24**) et (**333**).

En effet, N ou R serait alors représenté par le nombre d'unités de mesure dans le rectangle en question et provenant de la multiplication de ses côtés adjacents AD, DE ; M serait le carré du nombre d'unités de mesure dans AC, et P celui du nombre d'unités de mesure dans CD.

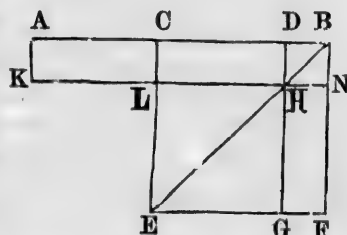
Cela posé, si les données étaient comme **dans le premier cas (373)** ; savoir : AB, et R=N pour trouver AD et DB ou AD et DE ; l'on obtiendrait ces inconnus en faisant $AD=AC+CD=AC+\sqrt{AC_2-AD.DE}=AC+\sqrt{M-R}$, et DB ou $DE=AB-AD=AC-\sqrt{M-R}$.

Dans le second cas (375) où les données étaient CD et R,

on trouverait $AD=CD+\sqrt{CD^2+R}=C+D\sqrt{P+R}$, et $DE=AB-AD=\sqrt{P+R}-CD$.

Dans le troisième cas (376) où il s'agit de faire un carré N équivalent en surface à une figure rectiligne donnée, il est clair que l'opération arithmétique se réduit à extraire la racine carrée du nombre d'unités de mesure dans la fig. rect. donnée pour avoir la longueur du côté du carré demandé.

PROP. XXIV. THÉOR.



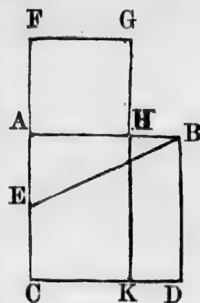
(378) Si $AC=CD$, AD sera une ligne bissectée en C et prolongée jusqu'en B. Alors, la construction étant sous d'autres rapports analogue à celle de la fig. du dernier théor. (369), LG sera le carré sur la la moitié de ligne AD, et CF le carré sur la ligne CB composée de la moitié CD de la ligne donnée et de la partie prolongée BD, et comme $AC=CD=NF$, AL sera$=HF$; ce qui donnera le gnomon $CNG=AN=AB.DB$; donc :

Si une ligne AD est divisée en deux parties égales AC, CD et prolongée d'une quantité quelconque DB ; le rectangle AN contenu par la ligne entière AB ainsi prolongée et la partie prolongée DB, plus le carré LG de la moitié de la ligne AD ; est équivalent au carré CF de la ligne CB composée de la moitié de la ligne donnée et de la partie prolongée ; ou $AB.DB+CD^2=CB^2$.

(379) **Sco. 1.** Soit $AD=2a$, et $DB=b$; alors $AB=2a+b$ et $CB=a+b$. Maintenant par multiplication $b\,(2a+b)=2ab+b^2$; ajoutant a^2 de part et d'autre, on aura $b\,(2a+b)+a^2=a^2+2ab+b^2$; donc $b\,(2a+b)+a^2=(a+b)^2$.

(380) Sco. 2. **PROB.** Il suit du dernier cor. que pour **prolonger une ligne AD d'une quantité DB telle, que le rectangle AB.DB de la ligne ainsi prolongée et de la partie prolongée soit équivalent à un carré donné**; il n'y a qu'à bissecter en C la ligne donnée AD, et faire (306) CB égal au côté d'un carré CF équivalent à la somme du carré LG de la moitié de la ligne et du carré donné.

(381) Sco. 3. **PROB. Diviser une ligne AB en deux parties AH, HB telles que le rectangle de la ligne entière AB et de l'une HB de ses parties soit équivalent au carré de l'autre partie AH**; c.-à-d., diviser AB en H de manière que AB.BH $=AH^2$



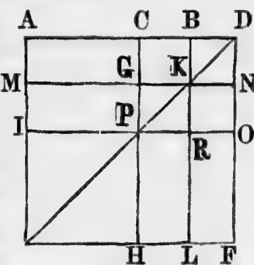
Soit AD le carré sur AB; bissectez AC en E, joignez EB, faites EF=EB, sur AF faites le carré FH et par le point H menez HK parallèle à BD. Le point H partagera la ligne donnée de la manière requise.

En effet AC est une ligne droite bissectée en E et prolongée jusqu'en F, et par cette prop. on a $CF.FA+AE^2=EF^2=EB^2$, puisque EF=EB par constr. Mais à cause du triangle rectangle BAE, l'on a $EB^2=AB^2+AE^2$; donc $CF.FA+AE^2=AB^2+AE^2$; retranchant AE^2 de part et d'autre, il reste $CF.FA=AB^2$.

Maintenant, parce que FH est par constr. un carré, on a FG=AF; donc, FK=CF.FA et CF.FA vient d'être prouvé= AB^2 ou AD; donc, FK=AD, et des quantités égales FK, AD retranchant la quantité commune AK, il reste (77 **Ax.**) FH=HD. Enfin, parce que HK est par constr. parallèle a BD, HD=BD.BH=AB.BH; donc, $AB.BH=AH^2$; donc, etc.

PROP. XXV. THÉOR.

(382) **Si l'on divise une ligne AB en deux parties quelconques ; le carré de l'une AC des parties plus quatre fois le rectangle AB.BC de la ligne entière et de l'autre partie BC, est équivalent au carré de la ligne AD composée de la ligne donnée et de la seconde partie BC.** En d'autres termes l'on aura $4AB.BC+AC^2=AD^2$.



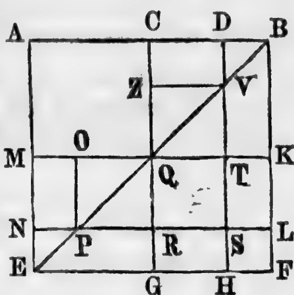
Puisque par hyp. AD=AB+BC, il est clair que BD=BC. Soit AF le carré sur AD. Faites DN=NO=DB =BC, menez les parallèles NM, OI, BL, CH. Il est clair d'après ce qui a été dit aux paragraphes (359) et (361) que CK, GR, KO et BN sont tous des carrés égaux, que AG, MP, PL, RF sont tous des rectangles égaux, et que IH est égal au carré sur AC. Maintenant, aux rectangles égaux AG, MP, etc. ajoutant les carrés égaux CK, GR, etc., on a (76 **Ax.**) les rectangles AK, MR, KF égaux entre eux et PL+BN=AK. Or, ces quatre quantités augmentées du carré IH complètent le carré AF, et parce que chacun des rectangles AK, etc., =AB.BK=AB.BC, on a $4AB.BC+AC^2=AD^2$; donc., etc.

(383) **Cor.** De là, comme AD est la somme et AC la différence des lignes AB, BC; **le carré de la différence entre deux lignes, plus quatre fois le rectangle contenu par ces lignes, est équivalent au carré de la somme des deux lignes.**

(384) **Sco.** Soit $AB=a$, $AC=c$, $CB=b$; alors $AD=c+2b$. Maintenant, puisque $a=b+c$, multipliant de part et d'autre par $4b$, l'on aura $4ab=4b^2+4bc$; et ajoutant c^2 à chaque côté de l'équitation, l'on aura $4ab+c^2=c^2+4bc+4b^2$, ou $4ab+c^2=(c+2b)^2$.

PROP. XXVI. THÉOR.

(385) **Si l'on divise une ligne AB en deux parties égales AC, CB et en deux parties inégales AD, DB ; la somme des carrés AD^2, DB^2 des deux parties inégales, est double du carré AC^2 de la moitié de la ligne AB et du carré CD_2 de la ligne entre les points de section ; ou $AD^2+DB^2=2AC^2+2CD^2$.**



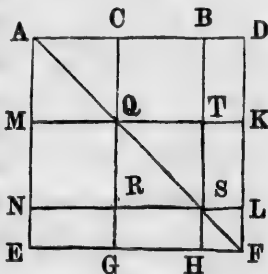
Soit AF le carré sur AB et EB sa diagonale. Faites AM=AC, MN=CD, menez les parallèles MK, NL, CG, DH et par les points V, P, où DH, NL rencontrent la diagonale, menez les parallèles VZ, PO. Il est clair d'après ce qui a été dit aux paragraphes (359) et (361) que ZT, QS, OR sont tous des carrés égaux l'un à l'autre et au carré sur CD. Il est clair aussi que SF est égal au carré sur DB, AS le carré sur AD, et que les rectangles CV, MP, RH, TL sont tous égaux l'un à l'autre.

Il est donc à démontrer que $AD^2+DB^2=2AC^2+2CD^2$ ou que AS+SF=2AQ+2QS. Parce que CB=AC, QF=AQ; donc, 2AQ+2QS=AQ+QF+2QS, et parce que QS=ZT=OR, AQ+QF+2QS=AQ+QF+ZT+OR. Si maintenant ces quatre dernières figures complétaient les carrés AS et SF, la vérité du théor. serait évidente et l'on aurait AS+SF=AQ+QF+ZT+OR. Concevons TL, qui fait partie du carré QF, superposée à son égale CV, et RH, qui est une autre partie du carré QF, superposée à son égale MP ; et il devient clair enfin que les parties AQ, QF, ZT et OR du second membre de l'équation recouvrent exactement celles AS, SF du premier membre de l'équation et leurs sont par conséquent (85. **Ax.**) équivalentes ; donc, etc.

(386) **Sco.** Si AC=a, CD=b; AD sera $=a+b$ et DB=$a-b$ et l'on aura $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.

PROP. XXVII. THÉOR.

(387) **Si une ligne AB est bissectée en C et prolongée jusqu'en un point quelconque D; le carré de la ligne entière AD ainsi prolongée, plus le carré de la partie prolongée BD, est équivalent à deux fois le carré de la moitié AC de la ligne bissectée, plus deux fois le carré de la ligne CD composée de la moitié CB et de la partie prolongée.** C'est-àdire, $AD^2+BD^2=2AC^2+2CD^2$.



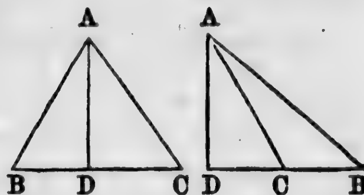
Soit AF le carré sur AD. Ayant fait AM=AC=CB=MN, il reste NE =BD. Menez les parallèles BH, CG, MK, NL, et parce que tous les angles sont droits et que (271) les parallèles entre parallèles sont égales; il est clair que AQ, QS, CT et MR sont des carrés égaux et BK, TL, RH, NG des rectangles égaux. Il est évident aussi que AQ est le carré sur AC, QF le carré sur CD et SF celui sur BD.

Celà posé, il est à démontrer que $AD^2+BD^2=2AC^2+2CD^2$ ou que AF+SF=2AQ+2QF. Pour 2AQ prenons son égal AT et pour 2QS prenons son égal MS, il reste BL=2TL et NH=2RH; mais 2QS+2TL+2RH+2SF=2QF; donc la figure entière AF contient 2AQ et 2QF avec l'exception seulement d'une fois SF; donc AF+SF contient deux fois AQ+QF ou AC^2+CD^2; donc $AD^2+BD^2=2AC^2+2CD^2$; donc, etc.

(388) **Sco.** Soit AC=a, BD=b; alors AD=$2a+b$ et CD=$a+b$. Maintenant $(2a+b)^2+b^2=4a^2+4ab+2b^2$; mais $4a^2+4ab+2b^2=2a^2+2(a+b)^2$; de là $(2a+b)^2+b^2=2a^2+2(a+b)^2$.

PROP. XXVIII. THÉOR.

(389) **Dans tout triangle ABC, le carré d'un côté AC opposé à un angle aigu B est moindre que la somme des carrés des deux autres côtés AB, BC, de deux fois le rectangle de la base BC et de la distance BD de l'angle aigu B au pied de la perpendiculaire AD tombant de l'angle opposé A sur la base BC prolongée s'il le faut.** C-à-d. $AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BD$.

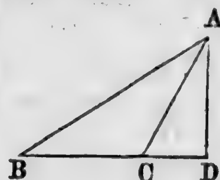


On a (362) dans les deux cas, $BC^2+BD^2=2BC.BD+CD^2$. Ajoutez AD^2 de part et d'autre ; il viendra $BC^2+BD^2+AD^2=2BC.BD+CD^2+AD^2$. Maintenant, à cause des triangles rectangles ADB, ADC, on a (305) dans le premier membre de l'équation, $BD^2+AD^2=AB^2$, et dans le second membre, $DC^2+AD^2=AC^2$. Substituant donc à BD^2+AD^2 du premier membre, son égal AB^2, et à DC^2+AD^2 du second membre, son egal AC^2 ; il vient $BC^2+AB^2=2BC.BD+AC^2$, et par transposition $AC^2=BC^2+AB^2-2BC.BD$; c-à-d. que, AC^2 est moindre que BC^2+AB^2 de deux fois le rectangle BC.BD ; donc, etc.

(390) Sco. D'ailleurs, **si la perpendiculaire tombe en dehors de la figure,** on a $CD=BD-BC$; or $CD^2=BD^2+BC^2-2BD.BC$ (362) et à cause des triangles rectangles ADC, ADB, on a $CD^2+AD^2=AC^2$ et $BD^2+AD^2=AB^2$; ajoutant donc AD^2 à chaque côté de l'équation, il vient $CD^2+AD^2=BD^2+AD^2+BC^2-2BD.BC$; c'est-à-dire, $AC^2=AB^2+CB^2-2BD.BC$.

PROP. XXIX. THÉOR.

(391) **Dans tout triangle obtus-angle ACB, le carré du côté AB opposé à l'angle obtus C est plus grand que la somme des carrés des deux autres côtés BC, AC, de deux fois le rectangle contenu par la base BC et la distance CD de l'angle obtus C au pied de la perpendiculaire AD abaissée du sommet A de l'angle opposé sur la base BC prolongée.** C'est-à-dire, $AB^2=AC^2+BC^2+2BC.CD$.



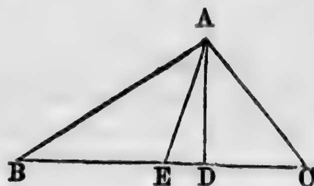
Parce que BD est une ligne divisée en deux parties quelconques BC, CD, on a (359) $BD^2=BC^2+CD^2+2BC.CD$; à chaque membre de cette égalité ajoutez AD^2 et il viendra $BD^2+AD^2=CD^2+AD^2+BC^2+2BC.CD$. Mais à cause des triangles rectangles ADB, ADC, l'on a (305) dans le premier membre de l'équation $BD^2+AD^2=AB^2$, et dans le second membre $CD^2+AD^2=AC^2$; remplaçant donc dans le premier membre BD^2+AD^2 par son égal AB^2 et dans le second membre CD^2+AD^2 par son égal AC^2, on obtient $AB^2=AC^2+BC^2+2BC.CD$; c-à-d.. que AB^2 excède AC^2+BC^2 de deux fois le rcetangle BC.CD; donc, etc.

(392) **Cor. Le triangle rectangle est le seul où les carrés décrits sur les côtés soient équivalents, pris ensemble, au carré décrit sur l'hypoténuse ou troisième côté**; car si l'angle compris par les deux côtés est aigu, la somme de leurs carrés sera par la dernière prop. plus grande que le carré du côté opposé; et l'on vient de voir que, si l'angle est obtus, la somme des carrés sera moindre que le carré du côté opposé.

PROP. XXX. THÉOR.

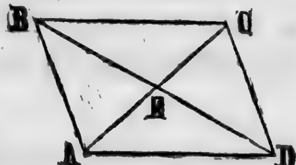
(393) **Dans un triangle quelconque ABC, si l'on mène une ligne droite AE du sommet A au milieu E de la base BC; la somme de deux fois le carré de cette ligne AE et de deux fois le carré de la demi-base BE ou EC est équivalente à la somme des carrés des deux autres côtés AB, AC du triangle.** C-à-d., on aura $2AE^2+2BE^2=AB^2+AC^2$.

Soit AD perpendiculaire sur BC; alors AEC étant un triangle quelconque, on aura par l'avant-dernière prop. $AC^2=AE^2+EC^2-2EC.ED$, et le triangle AEB étant obtus-angle, on aura



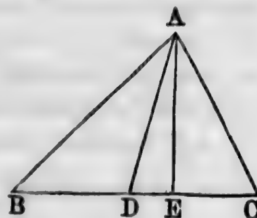
par la dernière prop. $AB^2=AE^2+EB^2+2BE.ED$; donc, AC^2 et AB^2 pris ensemble équivalent à $2AE^2+2BE^2$, remarquant que $EC^2=EB^2$ et $EC^2+EB^2=2EB^2$, parce que $EC=EB$, et que, pour la même raison, $-2EC.ED$ équivaut à et détruit $+2BE.ED$, laissant comme on vient de le dire $AC^2+AB^2=2AE^2+2BE^2$; donc, etc.

(394) Cor. 1. **De là, dans tout parallélogramme BD, la somme des carrés faits sus les côtés est égale à celle des carrés faits sur les diagonales;** c-à-d., $AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=BD^2+AC^2$.



Parce qne les diagonales BD, AC se bissectent mutuellement (283) et donnent $AE=EC$ et $BE=ED$; ABC, ADC sont deux triangles dans chacun desquels une ligne est menée du sommet au milieu E de la base commune AC, et par cette prop. l'on a $AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2$ et de même $AD^2+DC^2=2AE^2+2DE^2$. Maintenant, faisant attention que $2BE^2=2ED^2$ à cause de $BE=ED$; l'on aura, en ajoutant

ensemble les membres (26) correspondants des deux équations, $AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=4AE^2+4DE^2$; mais, parce que (215) le carré décrit sur une ligne est égal à quatre fois le carré décrit sur la moitié de cette ligne, $4AE^2=AC^2$ et $4DE^2=BD^2$; donc $AB^2+BC^2+AD^2+DC^2=AC^2+BD^2$.

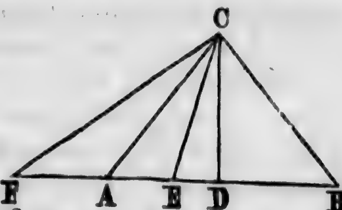


(395) **Cor. 2.** Puisque par cette prop. $AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$, que les triangles rectangles AEB, AEC donnent $AB^2=AE^2+BE^2$ et que $AC^2=AE^2+CE^2$; il suit de ces égalités que $2AE^2+BE^2+CE^2=2AD^2+2BD^2$; mais $2AD^2=2AE^2+2DE^2$, parce que AED est un triangle rectangle, et en substituant, à $2AD^2$ dans la dernière équation son égal $2AE^2+2DE^2$, il vient $2AE^2+BE^2+CE^2=2AE^2+2DE^2+2BD^2$; supprimant de part et d'autre le terme $2AE^2$, il reste $BE^2+CE^2=2DE^2+2BD^2$; c'est-à-dire, que:

Si dans un triangle quelconque on abaisse une perpendiculaire du sommet sur la base et que l'on bissecte la base; la différence entre la somme des carrés des segments de la base faits par la perpendiculaire et deux fois le carré de la demi-base, est équivalente à deux fois le carré de la ligne entre les points de section, ou à deux fois le carré de la demi-différence (366) des segments.

PROP. XXXI. THÉOR.

(396) **Si du sommet C d'un triangle isocèle ABC l'on mène une ligne CE à la base, la différence entre le carré CE^2 de cette ligne et celui CA^2 ou CB^2 du côté du triangle isocèle est équivalente au rectangle AE.EB des segments de la base.**



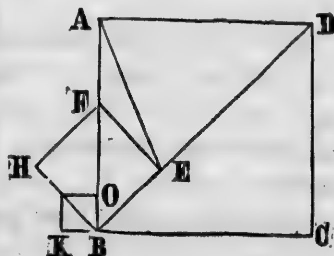
Soit CD perpendiculaire sur AB ; on aura (235) AD=DB et parce que ADC, EDC sont des triangles rectangles, on aura $AC^2=AD^2+CD^2$ et $EC^2=ED^2+CD^2$; d'où il est clair que la différence entre AC^2 et EC^2 est égale à celle entre AD^2 et ED^2. Mais (370) $AD^2-ED^2=(AD+ED)(AD-ED)=AE.EB$; car DB=AD et par conséquent AD+ED=EB; donc, $AC^2-EC^2=AE.EB$; donc, etc.

(397) Sco. Si la ligne CF menée du sommet tombe en dehors du triangle, ou sur la base AB prolongée, les segments seront alors FB, FA, et on aura $FC^2-AC^2=FB.FA$ ou la différence entre le carré FC^2 de la ligne menée du sommet et le carré AC^2 du côté, équivalente au rectangle de la base ainsi prolongée et de la partie prolongée.

En effet, $FC^2=CD^2+FD^2$ et $AC^2=CD^2+AD^2$; donc, $FC^2-AC^2=FD^2-AD^2$; mais (370) $FD^2-AD^2=(FD+AD)(FD-AD)=FB.FA$ puisque DB=DA; donc, $FC^2-AC^2=FB.FA$.

PROP. XXXII. THÉOR.

(398) Le côté AB et la diagonale BD d'un carré AC sont incommensurables (50 et 52)



En effet, soit DE=AD, joignez AE et au point E menez EF perpendiculaire à BD. A cause de AD=DE par hyp., le triangle ADE sera isocèle et donnera les angles à la base égaux, savoir : DAE à DEA ; mais ceux DAF, DEF sont aussi égaux, étant droits, et si de quantités égales on retranche des quantités

égales les restes seront égaux; donc, DAF—DAE=DEF—DEA; donc, FAE=FEA et le triangle EFA est isocèle et a ses côtés EF, AF égaux.

Dans le triangle BEF on a l'angle BEF droit par constr. et celui EBF égal à la moitié d'un angle droit; donc aussi l'angle EFB est égal à la moitié d'un angle droit; puisque la somme des trois angles d'un triangle quelconque vaut deux angles droits; donc, BEF est un triangle isocèle et donne EF=BE. Mais EF a été prouvé =AF, donc, aussi (68 **Ax.**) BE=AF.

Sur FB diagonale du carré HE portez FO=BE, ce qui donne AO=2BE. Le reste BE de la diagonale BD ou la différence entre cette diagonale et le côté AB du carré est donc contenu deux fois dans ce côté avec un reste OB.

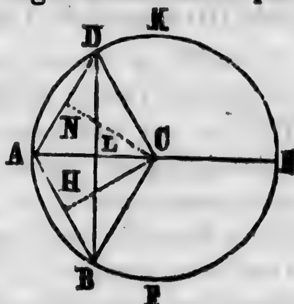
Sur le reste OB faisant un nouveau carré OK, l'on aurait encore ce reste OB contenu deux fois dans le côté HB du second carré, avec un second reste, et l'on pourrait continuer indéfiniment cette subdivision, trouvant à chaque pas un nouveau reste, et par conséquent sans pouvoir jamais arriver au rapport exact entre les quantités données; donc, etc.

PROP. XXXIII. THÉOR.

(399) **Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles égaux au centre (199) ACB, ACD sont sous-tendus par des arcs égaux BA, DA; et réciproquement les arcs égaux sous-tendent des angles égaux au centre.**

Si le demi-cercle AFE tourne autour du diamètre AE de manière à se reposer sur le demi-cercle AKE, la ligne courbe EFBA tombera exactement sur celle EKDA, comme on l'a

vu (188). Maintenant, parce que l'angle ACB=ACD par hyp., la ligne CB tombera sur celle CD et le point B sur le point D, à cause de BC=DC, rayons d'un même cercle. Donc l'arc AB tombera sur l'arc AD et lui sera égal.



(400) **Réciproquement**, si l'arc AB=AD, l'angle au centre ACB appuyé sur l'arc AB sera égal à celui ACD appuyé sur l'arc AD; car, en appliquant comme auparavant le demi-cercle AFE sur celui AKE, l'arc AB tombera sur son égal AD et le point B sur le point D, et à cause du point C commun, le rayon BC tombera sur DC et l'angle ACB sur l'angle ACD; donc, les arcs égaux AB, AD sous-tendent des angles égaux au centre ACB, ACD; donc, etc.

(401) Cor. 1. **Le diamètre partage le cercle et sa circonférence en deux parties égales**; conclusion, d'ailleurs, que l'on a déjà tirée (188) de la déf. même d'un cercle. **Réciproquement, la ligne qui partage le cercle en deux parties égales est un diamètre.**

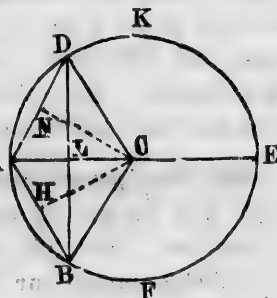
(402) Sco. 1. **Un arc de cercle dont la corde est un diamètre, est une demi-circonférence, et le segment inclus est un demi-cercle.**

(403) Cor. 2. La corde AB est égale à celle AD, à cause du point B tombant sur le point D et du point A commun; donc, **les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales et réciproquement les cordes égales sous-tendent des arcs égaux.**

(404) Cor. 3. Donc, **les angles égaux au centre sont sous-tendus par des cordes égales; et réciproquement les cordes égales sous-tendent des angles égaux au centre.**

(405) Cor. 4. **La ligne AC qui bissecte l'angle BCD**

au centre d'un cercle, bissecte aussi l'arc BAD et la corde BD sous-tendus par cet angle.



L'arc BD est bissecté en A, puisque par hyp. l'angle ACB=ACD=½BCD et que par cette prop. les angles égaux au centre sont sous-tendus par des arcs égaux. La corde BD est bissectée en L; car le point B tombe sur le point D, et le point L est commun; donc BL=DL=½BD.

(406) **Cor. 5.** Parce que BD est une ligne droite et que BL tombant (par superposition) sur DL fait les angles de suite BLC, DLC égaux; il s'en suit que les angles en L sont droits (132) et que **la ligne AC qui bissecte l'angle BCD au centre d'un cercle, est perpendiculaire à la corde BD sous-tendue par cet angle; et réciproquement, une ligne perpendiculaire au milieu d'une corde, bissecte l'angle au centre et l'arc sous-tendue par cette corde, et elle passe par le centre,** puisqu'elle bissecte l'angle qui a son sommet au centre; car dans ce cas cette perpendiculaire est la même que la bissectrice de l'angle, les deux étant perpendiculaires à la corde et passant par le centre de cette corde.

(407) **Sco. 2. Le centre C du cercle, le point milieu L de la corde et le point milieu A de l'arc sous-tendu par cette corde, sont trois points situés sur la même ligne droite perpendiculaire à la corde;** mais deux points suffisent (109) pour déterminer la position d'une ligne droite; de là, **toute ligne droite passant par deux des points susdits passera aussi par le troisième point et sera perpendiculaire à la corde.**

(408) **Cor. 6. Si une ligne AC menée par le centre C d'un cercle, bissecte une corde BD ou une ligne dans le cercle qui ne passe pas par le centre; elle coupera cette**

ligne à angles droits ; et si elle la coupe à angles droits, elle la bissectera.

Parce que, par hyp. AC bissecte BD, l'on aura BL=DL. Mais BC=DC, rayons d'un même cercle, et LC est commun aux deux triangles LCB, LCD. Ces deux triangles ayant tous leurs côtés égaux, sont donc (239) égaux en toutes choses; donc, l'angle BLC=DLC, et parce que BD est une ligne droite, ces deux angles seront (132) droits et AC par conséquent perpendiculaire à BD.

D'ailleurs, la ligne AC passant par deux C, L des trois points mentionnés dans la dernière sco. sera aussi pour cette raison perpendiculaire à la corde.

(409) **Réciproquement**, si AC est perpendiculaire à BD, elle bissectera BD ; car, comme auparavant, les triangles LCB, LCD donnent BC=DC et LC commun; de plus, les angles en L étant, par hyp. droits, les deux triangles LCB, LCD sont (311) rectangles et identiques ; donc BL=DL.

(410) **Cor. 7. La perpendiculaire AE menée par le milieu L d'une corde et terminée de part et d'autre à la circonférence, est un diamètre, et le centre de ce diamètre est le centre du cercle.**

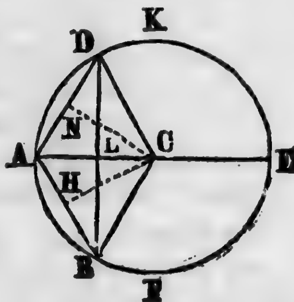
(411) **Sco. 3. PROB.** Donc, pour **trouver le centre d'un cercle donné** ; il suffit de mener dans le cercle une corde quelconque BD, au centre de laquelle on élèvera une perpendiculaire AE dont le point milieu C sera le centre cherché.

(412) **Sco. 4. Si dans un cercle une ligne en bissecte une autre à angles droits, le centre du cercle se trouve dans la ligne qui bissecte l'autre.**

(413) **Sco. 5. PROB.** Il suit aussi de cette prop. qu'étant donné un **segment de cercle** DAB **pour décrire le cercle dont ce segment fait partie** ; il n'y a qu'à prendre sur la circonférence du segment donné un point quelconque A ; de ce point mener des cordes aux extrémités, ou à deux autres points quelconques B, D de la circonférence du segment donné ; et aux centres H, N de ces cordes, élever des

perpendiculaires HC, NC qui passant chacune (406) par le centre du cercle, détermineront ce centre à l'endroit de leur intersection.

(414) **Sco. 6. PROB.** Il est évident que la dernière sco. fournit aussi le moyen de **trouver le point qui a servi de centre à un arc de cercle quelconque**; puisque la partie de circonférence qui renferme le segment n'est autre chose qu'un arc de cercle.

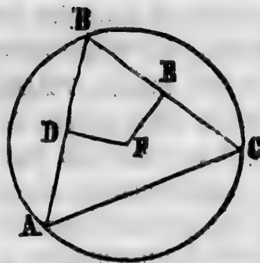


(415) **Sco. 7. PROB.** Il suit de la prop. que pour **bissecter un arc donné** DAB ou DEB ; il n'y a qu'à joindre par une corde BD les extrémités de l'arc donné, et du centre L de cette corde, élever une perpendiculaire LA ou LE qui bissectera l'arc, tel que requis.

En effet, la perpendiculaire LA fait évidemment partie de celle CA qui, étant menée par le centre C du cercle dont l'arc donné fait partie, bissecterait (405) cet arc ; et la perpendiculaire LE au centre de BD passe aussi par le centre C et bissecte l'arc DEB.

(416) **Sco. 8. PROB.** Par la même construction, chacune des moitiés AD, AB ou BE, DE pourrait se diviser en deux parties égales; donc, par des subdivisions successives, on **peut diviser un arc de cercle quelconque en 2, 4, 8, 16, 32, etc., parties égales.**

(417) **Sco. 9. PROB. Par trois points donnés quelconques A, B, C, pourvu que ces points ne soient pas dans la même ligne droite, on peut faire passer une circonférence de cercle et seulement une.**



Si l'on suppose que la circonférence soit décrite, il est clair que

ABC sera un arc de cercle quelconque dont le centre F se trouve (413) à la rencontre des perpendiculaires EF, DF aux centres E, D des cordes AB, BC qui joignent les points donnés; donc, réciproquement, le point F de rencontre des deux perpendiculaires menées du centre des cordes qui relient les points donnés, sera le centre du cercle qui passera par ces points.

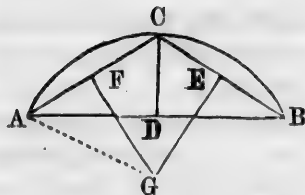
(418) **De plus**, comme le centre est en F, intersection des perpendiculaires, et (227) qu'il ne peut y avoir qu'une intersection et par conséquent qu'un seul centre; il est clair que **par trois points donnés l'on ne peut faire passer qu'une seule circonférence de cercle.**

(419) Cor. 8. On tire de la dernière sco. comme du par. (228) que **deux cercles ne peuvent se couper en plus de deux points**; car si c'était possible, l'on pourrait décrire deux circonférences passant par les trois mêmes points, ce qui par le dernier par. est impossible.

(420) Sco. 10. **PROB.** Les trois points ABC pouvant être considérés comme les trois sommets ou angles d'un triangle quelconque, dont les cordes AB, BC sont deux quelconques des côtés; il est clair que pour décrire un cercle autour d'un triangle donné, c-à-d., **circonscrire (195) un cercle à un triangle donné ABC**; il n'y a qu'à élever aux points milieux de deux quelconques des côtés du triangle, des perpendiculaires qui détermineront, à l'endroit de leur intersection, le centre du cercle requis.

(421) Cor. 9. Il suit de la dernière sco. que **les trois perpendiculaires qui bissectent les côtés d'un triangle quelconque se rencontrent où s'intersectent en un même point, centre du cercle circonscrit.**

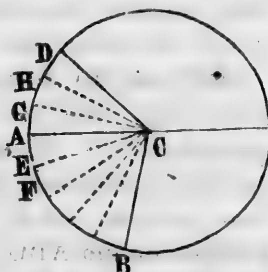
(422) Sco. 11. PROB. Il est évident aussi par la prop. que pour **décrire un arc de cercle de base et hauteur données** AB, DC; il n'y a qu'à joindre AC, BC, et aux points milieux E, F de ces cordes, élever les perpendiculaires EG, FG se rencontrant en G, le centre requis.



PROP. XXXIV. THÉOR.

(423) Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles au centre ACB, ACD sont proportionnels aux arcs AB, AD qui les sous-tendent.

En effet, puisque par le dernier théor. (399) les angles égaux au centre sous-tendent des arcs égaux, et réciproquement; si l'on conçoit l'angle ACB divisé en un nombre quelconque de parties égales ACE, ECF, etc., l'arc AB sera aussi divisé en un même nombre de parties égales, AE, EF, etc. Maintenant, si l'angle ACD contient trois angles partiels, chacun égal à l'angle ACE et que l'angle ACB en contienne 5; il est clair aussi que l'arc AD contiendra trois arcs partiels AG égaux à AE et que l'arc AB contiendra 5 de ces mêmes arcs partiels. Donc, si les angles ACD, ACB sont, comme on vient de le supposer, dans le rapport de 3 à 5, les arcs AD, AB seront aussi l'un à l'autre dans le même rapport.



(424) En second lieu, **si l'on suppose que les angles ACB, ACD soient incommensurables (50),** il est à démontrer que l'on aura encore l'angle ACD à l'angle ACB comme l'arc AD à l'arc AB.

Si l'unité de mesure ACE est contenue un nombre exact de fois en ACB mais non en ACD, il y aura un reste HCD qui sera à l'unité ACE dans un rapport quelconque. Si le reste HCD était égal à la moitié de ACE, il est clair que l'on aurait (423) l'arc HD égal à la moitié de AE. De même si le reste HCD est le tiers, le quart, le cinquième ou aucune autre fraction ou partie de l'unité de mesure ACE ; que cette fraction puisse ou non s'exprimer en nombres finis ; il est clair que l'arc HD qui lui correspond, sera la même fraction ou partie de l'arc AE, que l'angle partiel HCD de l'angle ACE.

On aura donc l'angle HCD à l'angle ACE comme l'arc HD à l'arc AE ; mais HCD, ACE sont deux angles quelconques ; donc aussi, ACB, ACD qui sont deux angles quelconques, sont entre eux comme les arcs AB, AD qui les sous-tendent ; donc, **l'ouverture ou la grandeur d'un angle** dépend directement ou **est en raison directe de la grandeur de l'arc qui le sous-tend ; et réciproquement, la grandeur d'un arc est en raison directe de l'ouverture de l'angle au centre appuyé sur cet arc.**

(425) Sco. 1. Puisque l'angle au centre d'un cercle et l'arc compris entre ses côtés sont l'un à l'autre dans un rapport si direct, que la diminution ou augmentation de l'un dans un rapport quelconque, est nécessairement accompagnée d'une diminution ou augmentation de l'autre dans le même rapport ; on est autorisé à établir une de ces grandeurs comme mesure de l'autre, et **l'on regardera dans la suite l'arc AB comme la mesure de l'angle ACB qui le sous-tend.**

2° **Il est** seulement **nécessaire que dans la comparaison des angles l'un avec l'autre, les arcs qui servent à les mesurer soient décrits avec des rayons égaux** ; ce qui, d'ailleurs, est posé comme condition dans les énoncés de cette prop. et de la dernière.

(426) Sco. 2. L'unité de mesure ACE de l'angle ACB

et celle AE de l'arc AB n'ont aucune signification par elles-mêmes; puisqu'elles peuvent être prises plus ou moins grandes; ce qui donnerait à l'angle ou à l'arc dont il s'agit, une valeur numérique plus ou moins grande, si l'on exprimait cette valeur par les nombres respectifs d'unités contenues dans cet angle ou cet arc.

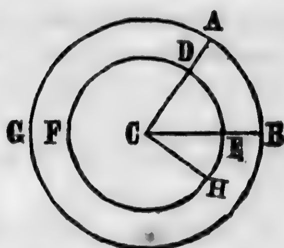
Mais que l'on imagine un autre angle ou arc quelconque divisé en unités de mesure égales à celles contenues dans le premier; il est évident que cet angle ou arc sera d'autant plus grand ou plus petit que le premier, que celui-ci contiendra un nombre plus ou moins grand de ces unités que le second. L'unité de mesure pourra dans ce cas être regardée comme absolue, puisque à l'aide de cette mesure on se fera une idée exacte du rapport entre la grandeur de chacun des angles ou arcs en question ou de tout autre angle ou arc donné.

(427) Sco. 3. Quoiqu'il paraisse préférable en principe de mesurer des quantités par des quantités de même espèce (25); cependant en pratique on a trouvé plus simple de mesurer les angles par des arcs de cercle, à cause de la facilité avec laquelle on peut faire des arcs égaux à des arcs donnés, ainsi que pour d'autres raisons.

Si toutefois l'on considérait comme indirecte cette méthode de mesurer les angles; on en obtiendrait facilement la mesure directe, en comparant avec le quart de la circonférence l'arc servant de mesure à un angle quelconque; ce qui donnerait le rapport de l'angle donné à un angle droit, qui est la mesure absolue.

Prenant alors pour unité de mesure angulaire, l'angle droit; un angle aigu s'exprimerait par un nombre entre 0 et 1; un angle obtus par un nombre entre 1 et 2, et l'on aurait le rapport suivant: **un angle au centre d'un cercle est à un angle droit comme l'arc qui lui sert de base est au quart de la circonférence**; ou celui-ci: **un angle au centre d'un cercle est à quatre angles droits, comme l'arc qui lui sert de base est à la circonférence entière.**

(428) Cor. 1. Les angles égaux ACB, DCE aux centres de différents cercles s'appuient sur des arcs AB, DE qui ont le même rapport à leurs circonférences respectives.

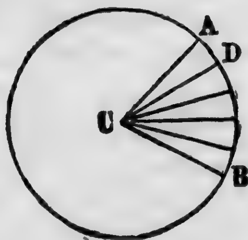


Car, par la dernière sco., l'arc AB est à la circonférence entière AGB comme l'angle ACB à quatre angles droits, et l'arc DE est à la circonférence entière DFE comme l'angle DCE est à quatre angles droits ; donc (**75 Ax.**) l'arc AB qui sous-tend l'angle ACB est à la circonférence entière AGB, comme l'arc DE qui sous-tend l'angle DCE est à la circonférence entière DFE.

(429) Cor. 2. Tout ce que l'on vient de démontrer relativement aux angles et aux arcs qui les sous-tendent, est également vrai lorsqu'il s'agit de secteurs et des arcs qui leur servent de bases ; car les secteurs ne sont pas seulement égaux quand leurs angles le sont, mais sont sous tous les rapports proportionnels à leurs angles.

De là, **deux secteurs quelconques DCE, ECH pris dans le même cercle ou dans des cercles égaux sont l'un à l'autre comme les arcs DE, EH qui leur servent de bases ; c'est-à-dire, proportionnels aux arcs qui mesurent les angles de ces secteurs.**

(430) Sco. 4. Si l'unité de mesure AD de l'arc AB est infiniment petite, l'arc AD pourra être considéré comme étant sensiblement une ligne droite. Dans ce cas la fig. ACD pourra être regardée comme un triangle rectiligne ayant AD pour base et pour hauteur le rayon du cercle. La superficie de ACD s'obtiendra en multipliant la base AD par la moitié du rayon AC ou DC et pourra être prise pour



unité superficielle du secteur ACB. Or, il y aura autant d'unités de surface ACD dans le secteur ACB qu'il a d'unités de longueur AD dans sa base AB ; puisque la hauteur de tous les petits triangles est la même et que (345) les triangles de même hauteur et de même base sont égaux en surface.

2° **PROB.** Donc, **la surface d'un secteur quelconque ACB s'obtiendra en multipliant la moitié du rayon du cercle dont il fait partie par la longueur de l'arc AB qui lui sert de base** ; ou en prenant le demi produit de cet arc et de ce rayon ; pourvu toujours (**24**) que l'on entende par ce produit, celui de deux nombres, dont l'un est le nombre d'unités linéaires AD dans la base AB, et l'autre le nombre d'unités linéaires égales contenues dans la hauteur ou rayon AC ou BC du secteur.

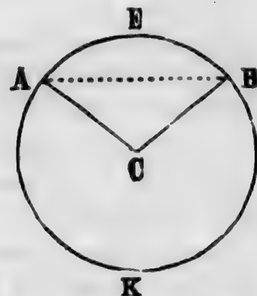
(431) Sco. 5. PROB. Comme rien n'empêche de concevoir le cercle entier divisé en petits triangles ACD et que sa superficie est évidemment égale à la somme de tous ces triangles ; il est donc clair, comme pour le secteur, que **la superficie d'un cercle quelconque est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon,** ou de la demi-circonférence par le rayon, ou du quart de la circonférence par le diamètre, ou enfin au quart du produit de la circonférence par le diamètre.

Le cercle est donc équivalent à un triangle ayant pour hauteur le rayon et pour base une ligne égale en longueur à la circonférence du cercle. De là le moyen de **trouver la surface d'un cercle donné.**

(432) Sco. 6. PROB. Il est à peine nécessaire de rappeler ici, que pour **revenir de la surface d'un secteur donné à ses éléments,** il n'y a qu'à faire ce que l'on a déjà indiqué pour le cas du rectangle, du triangle, etc. ; c-à-d., diviser la surface donnée par le facteur, terme ou élément connu, pour retrouver l'autre élément. Ainsi, la surface du secteur provenant de la multiplication de son arc par le

demi-rayon; l'on retrouvera le demi-rayon en divisant la surface donnée par l'arc du secteur; ou son arc en divisant sa surface par le demi-rayon.

2° **De même pour un cercle dont la superficie et la circonférence seraient données,** on obtiendrait le demi-rayon ou quart du diamètre en divisant la surface par la circonférence; ou ce qui revient au même, en divisant la surface par le quart de la circonférence, on aurait le diamètre; et la surface divisée par le quart du diamètre ou demi-rayon donnerait la circonférence.



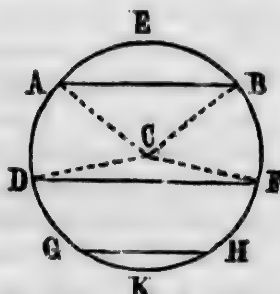
(433) Sco. 7. PROB. Il est clair que le secteur ACBE se compose d'un triangle ACB et d'un segment **(191)** ABE; d'où il suit que la combinaison des méthodes déjà enseignées **(348** et **430)** pour trouver la surface du triangle et du secteur, fournira aussi le moyen d'arriver à la surface d'un segment.

1° Ainsi, pour **trouver la surface d'un segment de cercle ABE plus petit qu'un demi-cercle**; il y aurait à obtenir d'abord celle du secteur ACB, puis à en retrancher celle du triangle ACB.

2° **Quand le segment devient égal au demi-cercle,** il est clair que le prob. se réduit à celui de trouver **(430)** la surface d'un secteur ayant pour base un arc égal à la demi-circonférence, ou à celui de trouver **(431)** la surface du cercle entier pour en prendre la moitié.

(434) Sco. 8. PROB. S'il agissait de **trouver la surface d'un segment ABK plus grand qu'un demi-cercle**; il est évident que le prob. se résoudrait, soit en calculant la surface entière du cercle et retranchant celle du segment ABE, ou en trouvant la surface du secteur **(192)** AKBC et lui ajoutant celle du triangle ACB.

(435) Sco. 9. PROB. Trouver la surface d'une zone de cercle quelconque (202).



Si la zone donnée est centrale comme AF, sa surface peut être regardée comme composée de celles des deux secteurs ACD, BCF et des deux triangles ACB, DCF, et s'obtiendra en calculant et en ajoutant ensemble ces quatre surfaces partielles.

Cette zone peut encore être considérée égale en surface à la différence entre le cercle entier et la somme des deux segments ABE, DFK; ce qui indique un autre moyen d'arriver à cette surface.

2° **Si la zone donnée est latérale** comme celle DH, sa surface est évidemment égale à la différence entre les surfaces des deux segments DFK, GHK et s'obtiendra en calculant chacun de ces segments et retranchant le plus petit du plus grand.

(436) Sco. 10. PROB. Trouver la surface d'une lunule (202 Déf.) quelconque AEBL.

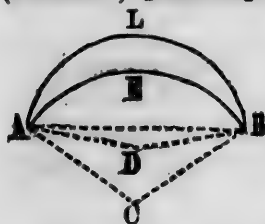


FIG. 1.

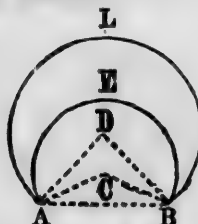


FIG. 2.

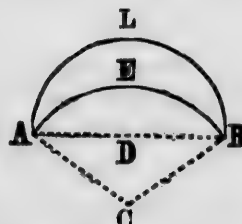


FIG. 3.

La lunule peut être telle que sa circonférence convexe ALB soit moinde qu'un demi-cercle, comme dans la fig. 1; plus grande qu'un demi-cercle, fig. 2, ou égale à un demi-cercle, fig. 3; et dans chacun de ces cas on voit que la surface cherchée AEBL est égale à la différence entre celles des segments de cercle ABE, ABL.

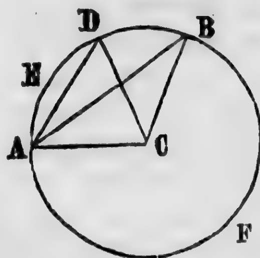
Il faut donc pour résoudre le prob., chercher dans chaque cas : premièrement, la surface du segment ABL, que l'on trouvera (433 et 434) en obtenant d'abord celle du secteur ADBL, pour en retrancher celle du triangle ADB ; secondement, la surface du segment ABE que l'on trouvera en obtenant d'abord celle du secteur ACBE, de laquelle on retranchera celle du triangle ACB dans le 1er cas, et à laquelle on ajoutera celle du même triangle dans le 2nd cas ; troisièmement enfin, retrancher la surface du segment ABE de celle ABL, pour avoir la surface de la lunule AEBL.

Dans le cas de la fig. 3 où ALB est une demi-circonférence, il est clair que le centre D de cette circonférence est sur la ligne AB et que le triangle ADB est nul, le segment ABL étant alors un demi-cercle.

(437) **Sco. 11. PROB.** Toute figure plane autre que celles énumérées dans les définitions, pouvant se décomposer en éléments rectilignes ou curvilignes de la nature de ceux dont on a jusqu'ici traité en détail ; il est clair qu'une combinaison convenable des méthodes déjà indiquées aux paragraphes (348) (351 et 352) (430 et 431) (433, 434, 435 et 436) conduirait infailliblement à **trouver la superficie d'une figure plane (117) quelconque.**

PROP. XXXV. THÉOR.

(438) Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, un plus grand arc AEB est sous-tendu par une plus grande corde AB ; et réciproquement, une plus grande corde sous-tend un plus grand arc.

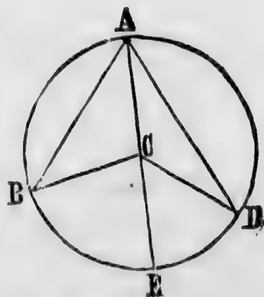


En effet, un arc AEB plus grand que celui AED sous-tend un angle au centre ACB plus grand que celui ACD, puisque, par la dernière prop. (**423**) les angles sont directement comme les arcs qui les sous-tendent ; mais de deux triangles ABC, ADC, ayant deux côtés AC, BC, de l'un égaux aux deux AC, DC de l'autre (rayons d'un même cercle), celui-là a (**269**) la plus grande base AB qui a le plus grand angle compris ACB ; donc, AB>AD ; donc, etc.

(**439**) **Sco.** Les arcs dont il s'agit ici sont chacun moindre que la demi-circonférence. **Si ces arcs étaient plus grands que la demi-circonférence,** le contraire de ce qui est énoncé dans la prop. s'en suivrait ; car dans ce cas, suivant que les arcs augmentent, les cordes diminuent, et réciproquement. Ainsi l'arc AFD est plus grand que l'arc AFB, pendant que la corde AD du premier est plus petite que celle AB du second.

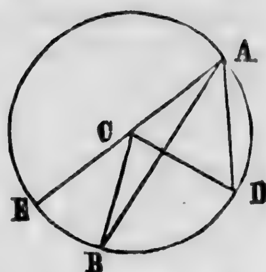
PROP. XXXVI. THÉOR.

(**440**) **L'angle BCD au centre d'un cercle est double de l'angle ABD à la circonférence, appuyé sur le même arc BED.**



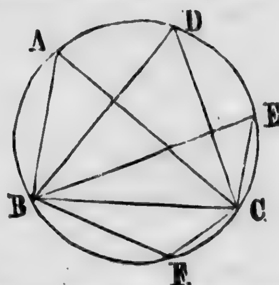
Par le centre C du cercle, menez le diamètre AE. Parce que BC=AC, rayons d'un même cercle, le triangle ACB est isocèle et l'angle CAB=CBA ; mais (**251**) l'angle ext. BCE est égal à la somme des angles ints. opposés CAB, CBA ; donc, l'angle BCE=2CAB. L'on prouverait de même l'angle ECD=2CAD ; donc, BCE+ECD=2CAB+2CAD ; c-à-d., BCD=2BAD ; donc, etc.

(441) Si le diamètre AE passe en dehors de l'angle BAD, l'on a comme auparavant ECB=2EAB et ECD=2EAD; mais ECD—ECB=BCD et EAD—EAB=DAB; donc, encore dans ce cas BCD=2BAD.



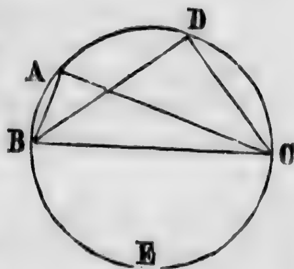
(442) Cor. 1. Puisque **(425)** l'angle BCD au centre d'un cercle est mesuré par l'arc BD qui le sous-tend, et que l'angle BAD à la circonférence appuyé sur le même arc BD est, par cette prop., moitié de l'angle au centre; il s'en suit qu'**un angle quelconque BAD à la circonférence d'un cercle a pour mesure la moitié de l'arc BD compris entre ses côtés.**

(443) Cor. 2. Tous les angles BAC, BDC, BEC **inscrits (194) dans le même segment de cercle BDC sont égaux, parce qu'ils sont mesurés par la moitié d'un même arc** BFC.



Tous les angles BFC que l'on ferait dans le segment BCF seraient aussi égaux, puisqu'ils auraient chacun pour mesure la moitié de l'arc BDC.

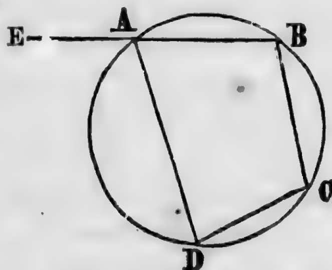
(444) Cor. 3. Tout angle BAC, BDC **inscrit dans un demi-cercle, c'est-à-dire, appuyé sur le diamètre** BC **ou sur la demi-circonference** BEC **du cercle, est un angle droit;** parce qu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence BEC, c-à-d., un quart de la circonférence entière.



2° Et, réciproquement, il est clair que **si un angle ins-**

crit dans un cercle est droit, cet angle est appuyé sur un diamètre ou sur une demi-circonférence.

(445) Cor. 4. D'après les deux dernières cors., il est évident qu'un **angle** BFC (voy. la fig. du cor. 2) **inscrit dans un segment** BCF **plus petit qu'un demi-cercle est obtus,** étant mesuré par la moitié d'un arc FDC plus grand que la demi-circonférence; **et celui** BAC **inscrit dans un segment** BCD **plus grand que le demi-cercle est aigu,** étant mesuré par un arc BFC plus petit que la demi-circonférence.



(446) Cor. 5. **Les angles opposés** A, C **d'un qualiatère** ABCD **inscrit dans un cercle valent ensemble deux angles droits**; car l'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc BCD et l'angle BCD est mesuré par la moitié de l'arc BAD; donc, les deux angles A, C pris ensemble, sont mesurés par une demi-circonférence et valent en conséquence deux angles droits.

(447) Cor. 6. **Si l'on prolonge un côté quelconque** AB **d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, l'angle ext.** EAD **sera égal à l'angle int. opposé** C; car, EAD est (130) supplément de BAD, et par le dernier cor. l'angle BCD est aussi suplément de BAD; donc, EAD=C.

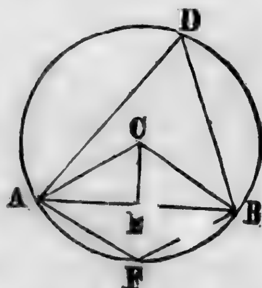
(448) Cor. 7. Il suit aussi qu'**un quadrilatère quelconque dont les angles opposés pris ensemble ne sont pas égaux à deux angles droits ne peut être inscrit dans un cercle.**

(449) Cor. 8. **Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles égaux à la circonférence sous-tendent des arcs égaux; et réciproquement, les angles à la circonférence appuyés sur des arcs égaux sont égaux.**

Il a été démontré (399) que les angles égaux au centre

sont sous-tendus par des arcs égaux, et réciproquement, que les arcs égaux sous-tendent des angles égaux au centre; mais par cette prop. (**440**) les angles à la circonférence sont moitiés de ceux au centre sur arcs égaux, et les moitiés de quantités égales sont égales.

D'ailleurs, la même conclusion dérive aussi du second cor.; car, à l'égard des angles, être inscrit dans le même segment de cercle, n'est autre chose qu'être à la circonférence et appuyé sur le même arc.



(450) Sco. PROB. Parce que l'angle D à la circonférence vaut la moitié de l'angle C au centre sur le même arc AFB, et que (**406**) CE menée perpendiculaire au milieu de la corde AB, partage l'angle C en deux parties égales; il suit que l'angle ECB=D; mais à cause de l'angle CEB droit et parce que dans un triangle rectangle les deux angles aigus valent ensemble un angle droit, on a l'angle EBC=CEB–ECB; or, ECB vient d'être prouvé =D; donc aussi, EBC=CEB–D; c-à-d., que l'angle EBC ou ABC vaut un angle droit moins l'angle D.

D'où l'on tire que pour **décrire sur une ligne donnée AB un segment de cercle ADB capable de contenir un angle D égal à un angle donné quelconque**; il n'y a qu'à faire à chaque extrémité A, B de la ligne donnée, un angle ABC=BAC égal à la différence entre l'angle donné et un angle droit. Les lignes BC, AC se couperont en C, centre du segment cherché.

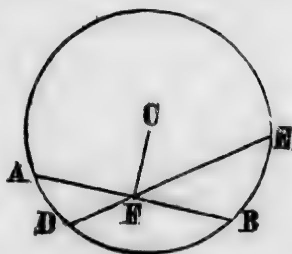
(451) Si l'angle donné est droit, il est clair (**144**) que le centre du segment capable de le contenir, sur une base donnée, sera au centre de la ligne donnée. Cette ligne sera alors un diamètre et le segment un demi-cercle.

(452) Si l'angle requis est obtus comme celui AFB, il

est clair (445) que le segment capable de le contenir sera plus petit qu'un demi-cercle, et que dans ce cas ce segment sera situé du côté de la ligne AB opposé au centre C.

PROP. XXXVII. THÉOR.

(453) **Si dans un cercle deux lignes AB, DE qui ne passent pas par le centre C, se coupent, elle ne se bissectent pas.**



Car si les deux lignes se bissectaient mutuellement en F, la ligne CF menée du centre C au point milieu F de chacune des cordes AB, DE, serait (408) perpendiculaire à chacune d'elles; or il est clair qu'une ligne ne peut être en même temps perpendiculaire à deux lignes qui s'intersectent, car ces deux lignes sont par là même inégalement inclinées à la troisième et font en conséquence (123) avec cette dernière des angles inégaux; donc, etc.

PROP. XXXVIII. THÉOR.

(454) **Si sur le diamètre AD d'un cercle, l'on prend un point quelconque F qui ne soit pas le centre; de toutes les lignes FB, FC, FG qu'il soit possible de mener de ce point à la circonférence, la plus grande est celle FA qui contient le centre E du cercle et la plus petite, l'autre partie FD du diamètre; et des autres, la ligne FB qui est la plus voisine de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle FC qui en est plus éloignée.**

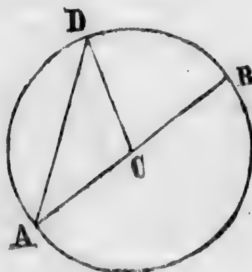


Menez les rayons BE, CE, etc., et parce que BE+EF=AE+EF et que la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le troisième côté, l'on a BF plus petit que BE+EF, c'est-à-dire plus petit que AF. Maintenant CF est < BF parce que dans les deux triangles BEF, CEF qui ont deux côtés BE, EF de l'un égaux aux deux CE, EF de l'autre, celui-là a (269) la plus grande base BF qui a le plus grand angle compris BEF. On prouverait de même GF plus petit que CF et DF<GF; car DF+FE=GF+FE=DE et comme GE<GF+FE, de même DE<GF+FE; or FE est commun à DF+FE et à GF+FE; donc, DF est plus petit que GF; donc, etc.

(455) Cor. I. **D'un même point F dans un cercle, l'on ne peut mener à la circonférence que deux lignes droites, égales FG, FH, l'une de chaque côté du diamètre passant par ce point**; car si l'on pouvait en mener une troisième FK, il s'en suivrait que FK plus ou moins éloignée de FD que ne l'est FH, serait égale à FH; ce qui d'après le dernier par. est impossible.

(456) Cor. 2. Il suit de cette prop. que **si dans un cercle on prend un point dont on puisse mener plus de deux lignes égales à la circonférence; ce point sera le centre du cercle.**

Car il vient d'être prouvé que de tout autre point F il serait impossible de mener plus de deux lignes égales à la circonférence.



(457) Cor. 3. **Toute corde AD dans un cercle est moindre que le diamètre AB.**

Car A est un point quelconque sur le diamètre AB et par la prop., AD est plus petite que AB.

D'ailleurs, AC+CB=AC+CD; CB, CD étant rayons d'un même

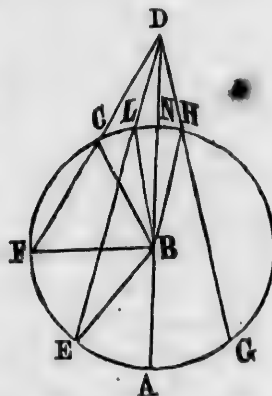
cercle ; mais AD, côté d'un triangle, est moindre que AC +CD, somme des deux autres côtés ; donc AD<AB.

(458) Cor. 4. **Donc, la plus grande ligne que l'on puisse inscrire dans un cercle, est un diamètre**; conséquence déjà tirée (188) des défs. du cercle, etc.

PROP. XXXIX. THÉOR.

(459). **Si l'on prend un point quelconque D en dehors d'un cercle, et si de ce point on mène des lignes DF, DE etc., à la circonférence, l'une desquelles DA passe par le centre B du cercle ; de celles qui tombent sur la circonférence concave, la plus grande est la ligne DA qui passe par le centre ; et des autres, celle DE qui est plus près de celle DA qui passe par le centre est toujours plus grande que celle DF qui en est plus éloignée.**

Mais de celles DN, DL, etc. qui tombent sur la circonférence convexe, la plus petite est celle DN qui se trouve sur le prolongement du diamètre AN ; et des autres, celle DL qui est plus près de DN la plus courte, est toujours plus petite que celle DC qui est plus éloignée.



Ayant mené les rayons BE, BF etc., l'on a DB+BE=DB+BA=DA, à cause de DB commun et de BE, BA égaux, étant rayons d'un même cercle ; et dans le triangle DBE un côté DE< la somme DB+BE des deux autres côtés ; donc DE<DA. Le côté DF< (269) DE, parce que dans les triangles DBF, DBE, les côtés DB, BF sont égaux à ceux DB, BE, tandis que l'angle compris DBE est plus grand que celui DBF.

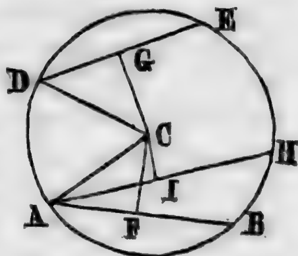
Maintenant DL est plus grande que DN, parce que (161)

$DB<DL+LB$ et que $LB=NB$; et puisque (268) si dans un triangle DCB l'on mène d'un point intérieur quelconque L des lignes DL, LB à la base DB, la somme de ces lignes est moindre que celle des deux côtés du triangle, on aura $DL+LB<DC+CB$, et CB étant $=LB$, il restera $DC>DL$; donc, etc.

(460) **Cor. D'un même point** quelconque D **hors d'un cercle l'on ne peut mener à la circonférence concave ou convexe que deux lignes égales** DL, DH **ou** DE, DG, **l'une de chaque côté de celle qui passe par le centre** ; car si l'on pouvait en mener plus de deux, il pourrait y avoir deux lignes différentes du même côté du diamètre qui seraient égales l'une à l'autre, ce qui par la prop. est impossible, puisque toutes ces lignes sont plus ou mons grandes suivant qu'elles sont plus ou moins éloignées de celle qui passe par le centre.

PROP. XL. THÉOR.

(461) **Les cordes égales** AB, DE **dans un cercle sont également éloignées du centre** C ; **et celles qui sont également éloignées du centre sont égales** ; **et de toutes autres cordes, celle** AH **qui est plus près du centre est toujours plus grande que celle** AB **qui est plus éloignée ; et la plus grande est plus près du centre que la moindre.**



D'abord, si $AB=DE$, il est à démontrer que la perpendiculaire $CF=CG$; car ce sont ces perpendiculaires qui (200) mesurent les distances respectives de ces cordes au centre. Or, les perpendiculaires CF, CG bissectent les cordes égales AB, DE et donnent par conséquent $AF=DG$; de plus $AC=DC$, rayons d'un même cercle ;

d'où il suit que les triangles rectangles AFC, DGC ont deux côtés de l'un égaux à deux côtés correspondants de l'autre, et donnent en conséquence (**311**) CF=CG.

(**462**) **En second lieu,** si CF=CG, il est clair que le même raisonnement donnera AF=DG ; or AB=2AF et DE=2DG ; d'où, AB=DE.

(**463**) **En troisième lieu,** si $CI<CF$, l'on aura $AH>AB$; CI^2 sera$<CF^2$ et laissera $AI^2>AF^2$, puisque $CI^2+AI^2=CF^2+AF^2=CA^2$.

(**464**) **Enfin,** si AH est plus grande que AB, il est à démontrer qu'elle sera aussi plus près du centre ; c-à-d. que la perpendiculaire CI sera moindre que CF. Or, à cause des triangles rectangles AFC, AIC, l'on a (**305**) $AC^2=AF^2+CF^2$ et $AC^2=AI^2+CI^2$; donc, (**68 Ax.**) $AF^2+CF^2=AI^2+CI^2$; mais parce que AI moitié de AH est plus grande que AF moitié de AB, AH étant par hyp. plus grande que AB, l'on a $AI^2>AF^2$; d'où il suit que $CI^2<CF^2$; c.-à-d., que CI est moindre que CF ; donc, etc.

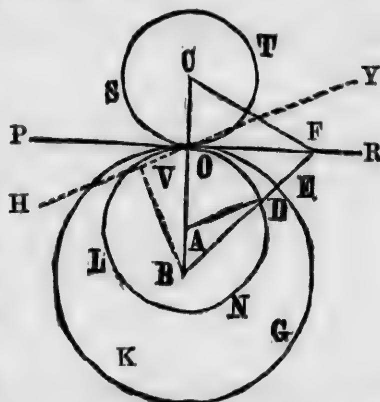
(**465**) **Cor. Plus la corde est courte ou petite, plus elle est éloignée du centre ; réciproquement, plus la corde est éloignée du centre, plus elle est petite.**

PROP. XLI. THÉOR.

(**466**) **Si une ligne droite PR touche un cercle OKG en un point quelconque O, la ligne BO, menée du centre B au point de contact O est perpendiculaire à la ligne qui touche le cercle.**

En effet, la plus courte ligne que l'on puisse mener d'un point B à une ligne PR est (**313**) la perpendiculaire BO ; toute autre ligne BF oblique à PR étant plus grande que BO. Mais si BF est plus grande que BO ou que son égale BE, car BO, BE sont rayons d'un même cercle, il est évi-

dent que tout point F autre que O est hors du cercle, et par hyp. la ligne BO est menée au point O où la ligne touche le cercle ; donc, etc.



(467) Cor. 1. **Donc, une tangente PR ne touche le cercle qu'en un seul point O.**

(468) Cor. 2. **Donc, une ligne droite PR perpendiculaire à l'extrémité O d'un rayon BO est tangente à la circonférence, et une ligne BO menée du centre B pendiculairement à la tangente passe par le point de contact O.**

(469) Cor. 3. **En un point donné O, l'on ne peut mener qu'une seule ligne PR tangente à la circonférence.**

Car si l'on pouvait en mener une autre HY, il est clair (**128**) qu'elle ne serait pas perpendiculaire au rayon BO ; donc, le rayon BO serait pour la nouvelle tangente une ligne oblique, et la perpendiculaire BV menée du centre sur cette tangente serait plus courte que le rayon BO ; cette tangente supposée entrerait donc dans le cercle et par là même ne serait plus une tangente, mais une sécante.

(470) Cor. 4. **La ligne PR menée perpendiculaire à l'extrémité O d'un rayon BO ou d'un diamètre, tombe en dehors du cercle, et l'on ne peut mener entre cette ligne et la circonférence aucune autre ligne sans qu'elle coupe le cercle.**

(471) Cor. 5. **Les tangentes à chaque extrémité d'un diamètre sont parallèles ; et réciproquement, les tangentes parallèles sont toutes deux perpendiculaires au même diamètre et ont leurs points de contact à ses extrémités.**

(472) Cor. 6. Un cercle n'en peut toucher un autre qu'en un seul point, soit intérieurement, soit extérieurement.

Si le rayon AO du cercle int. OLN forme partie du rayon BO du cercle OKG, et si le rayon OC du cercle ext. OST est sur le prolongement de BO, il est évident que les trois cercles et la tengente PR auront un point O commun et seulement un; car, à cause de AD=AO, rayons d'un même cercle, on aura BA+AD=BA+AO=BO; mais parce qu'un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres côtés, l'on a BD<BA+AD, c-à-d., BD<BO; or BE=BO, rayons du cercle OKG; donc aussi, BD est plus petit que BE; donc, tout point E d'un des cercles OKG est en dehors de l'autre cercle OLN qui lui est intérieur.

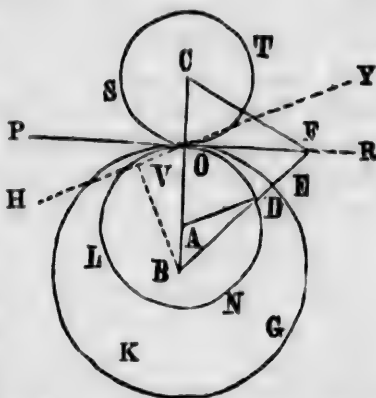
Il est évident que les deux cercles exts. OST, OLN ou OST, OKG ne se touchent qu'en un seul point; puisqu'ils n'ont chacun qu'un seul point O commun avec la tangente PR, et par conséquent qu'un seul point commun entre eux.

(473) Cor. 7. Si une ligne PR touche un cercle OKG et que du point de contact O, l'on mène une ligne OB perpendiculaire à la tangente, le centre du cercle sera sur cette perpendiculaire.

(474) Cor. 8. Si deux cercles OLN, OKG se touchent intérieurement, ils ne peuvent avoir le même centre, puisqu'il faudrait pour cela que BE fût en même temps égal à BO et à BD, ce qui est absurde.

(475) Cor. 9. Si deux cercles se touchent, soit intérieurement, soit extérieurement, la ligne BA ou BC qui joint leurs centres passera par le point de contact.

Car si O est le point de contact et si la ligne PR est tangente en O, chacune des lignes CO, BO, ou BO, AO menée du point de contact O perpendiculairement à PR passera par le centre C, B ou B, A de son cercle respectif; or les angles COR, BOR étant droits et le point O commun, la ligne BC ne sera (135) qu'une seule et même ligne droite.

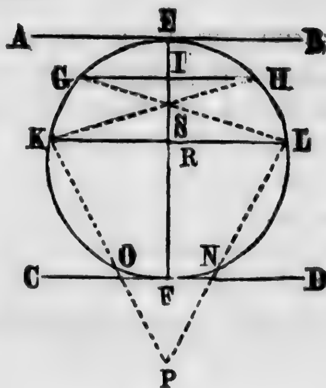


(476) **Cor. 10. Si deux cercles OLN, OKG se touchent intérieurement, la distance AB entre leurs centres est égale à la différence de leurs rayons, AO, BO; et si deux cercles OST, OKG se touchent extérieurement, la distance BC entre leurs centres est égale à la somme BO+OC de leurs rayons**; car les circonférences de ces cercles passent par le même point O sur la ligne qui joint leurs centres.

2° Réciproquement, **si la distance entre les centres de deux cercles est égale à la différence ou à la somme de leurs rayons, les deux cercles se toucheront intérieurement ou extérieurement.**

PROP. XLII. THÉOR.

(477) **Les arcs de cercle GK, HL; EK, EL; etc., interceptés par deux parallèles GH, KL; AB, KL; etc., sont respectivement égaux; et réciproquement, si deux lignes interceptent des arcs de cercle égaux, sans se couper, ces lignes seront parallèles.**



Soit R le centre du cercle et EF un diamètre perpendiculaire à la corde KL. Ce diamètre sera en même temps (**149**) perpendiculaire à GH, à AB et à CD, puisque par hyp. toutes ces lignes sont parallèles, et passera (**471**) par les points de contact E, F des tangentes AB, CD; or, nous avons vu (**407**) que le point milieu E ou



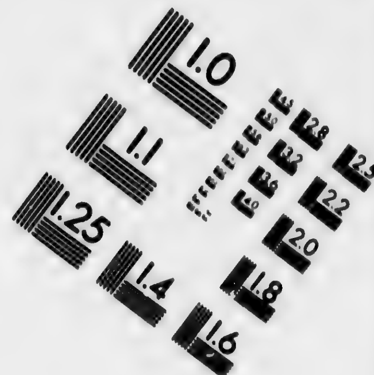
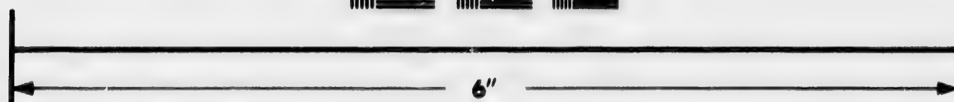
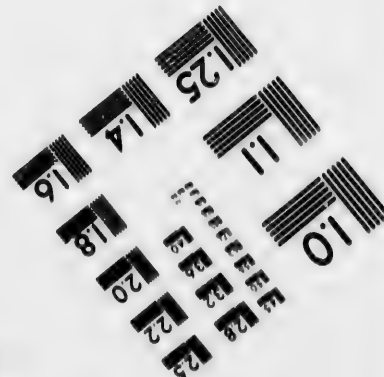


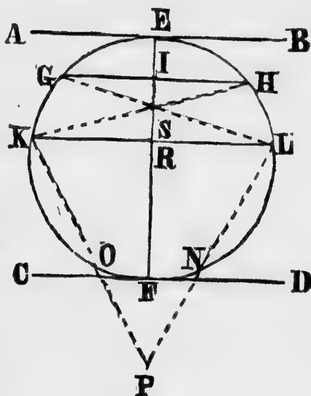
IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)







F d'un arc KEL ou KFL est situé sur la même ligne droite EF perpendiculaire à la corde KL et passant par le centre R du cercle. Le point E sera donc aussi le centre de l'arc GEH. Donc, l'arc GE=HE et l'arc KE=LE, et de même, l'arc KOF=LNF. Maintenant, ajoutant et retranchant les quantités égales GE, HE et KF, LF, on obtient KE—GE=LE—HE ; c-à-d., KG=LH ; et KE+KF=LE+LF ; c-à-d., l'arc EKF=l'arc ELF.



D'ailleurs, quant aux arcs EKF, ELF, ils sont encore égaux parce que (**401**) EF qui est un diamètre partage le cercle et la circonférence en deux parties égales.

(**478**) **Réciproquement,** si les arcs EKF, ELF sont égaux, les lignes AB, CD seront parallèles, parce que EF sera dans ce cas un diamètre et que (**471**) les lignes qui touchent le cercle aux extrémités E, F d'un diamètre sont parallèles.

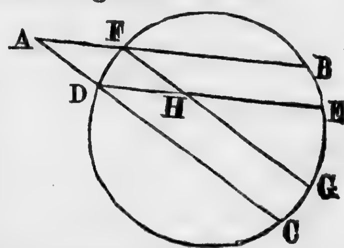
(**479**) **S'il s'agit des arcs égaux** KE, LE, on aura AB parallèle à KL ; car par hyp. EF est perpendiculaire à la corde KL, et elle est en même temps perpendiculaire à la tangente AB menée par le point de contact E ; or, (**150**) deux lignes perpendiculaires à une même ligne sont parallèles entre elles.

(**480**) **S'il s'agit enfin des arcs égaux,** KG, LH, on aura encore GH parallèle à KL ; car EF étant par hyp. perpendiculaire à KL, le point milieu de l'arc KEL se trouve (**407**) en E ; donc l'arc KE=LE, et à cause de KG=LH par hyp., on a KE—KG=LE—LH ou GE=HE. Ayant de cette manière prouvé que GE=HE, l'on prouverait comme dans le dernier cas GH parallèle à AB ; mais si les arcs KE, LE sont égaux, comme on vient de le voir, on a KL parallèle à AB, par le dernier par., et deux lignes parallèles à une troisième sont parallèles entre elles ; donc, etc.

(481) **Autrement, et sans faire entrer en compte la ligne** AB, on prouverait d'abord que KE=LE et que GE=HE. Celà posé, l'on a vu (**407**) que la ligne EF qui passe par le centre R du cercle et le point milieu E de l'arc, passe aussi par le milieu I, S de la corde qui sous-tend cet arc et est perpendiculaire à cette corde. Donc, EF est perpendiculaire à chacune des deux cordes KL, GH ; c'est-à-dire que ces cordes ou lignes sont parallèles l'une à l'autre.

(482) **Autrement encore et même sans l'aide de la perpendiculaire** EF. Si GH, KL sont parallèles, l'angle GHK est (**153**) égal à son alterne LKH ; or, (**449**) dans le même cercle les angles égaux à la circonférence sont sous-tendus par des arcs égaux ; donc, GK=HL ; et réciproquement, si GK=HL, les angles GHK, LKH à la circonférence et appuyés sur des arcs égaux sont égaux ; donc, GH est parallèle à KL.

(483) **La restriction que les deux lignes ne se coupent point est nécessaire**, puisque HK, GL sans être parallèles interceptent néanmoins des arcs égaux GK, HL ; ainsi que celles KP, LP qui interceptent les arc égaux KO, LN.



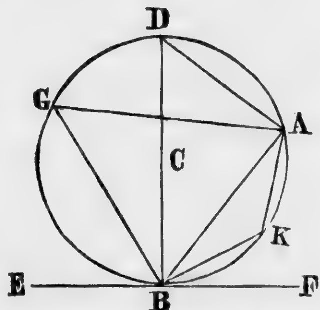
(484) **Cor. 1.** Puisque (**442**) un angle EDC à la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc EC compris entre ses côtés, et que par cette prop. l'arc FD=BE quand FB, DE sont parallèles ; il suit qu'un angle A ou BAC qu'on appelle **circonscrit, c'est-à-dire, formé par deux sécantes** AB, AC, **a pour mesure la moitié de la différence des arcs** FD, BC **compris entre ses côtés** ; car, DE étant parallèle à AB, donne l'angle EDC égal à son correspondent BAC ; l'angle BAC a donc pour mesure la moitié de l'arc EC : mais $\frac{EC}{2}=\frac{BC-BE}{2}=\frac{BC-FD}{2}$.

(485) **Cor. 2. L'angle** EHG ou FHD **formé par deux cordes qui s'intersectent dans un cercle** (appelé excentri-

que parce que son sommet H est hors du centre) **a pour mesure la demi-somme des arcs** EG, FD **compris entre ses côtés prolongés** ; car, soit FB parallèle à DE, on aura l'angle BFG=EHG ; mais BFG est mesuré par la moitié de l'arc BG et à cause de FD=BE, $\frac{BG}{2}=\frac{BE+EG}{2}=\frac{FD+EG}{2}$.

PROP. XLIII. THÉOR.

(486) L'angle ABF **formé par une tangente** BF ou EF **et une corde** AB **est mesuré par la moitié de l'arc** AB **sous-tendu par la corde.**



Par le point de contact B de la tangente, BD étant menée perpendiculaire à EF, passera (**473**) par le centre C du cercle et sera en conséquence un diamètre ; or, (**444**) l'angle DAB appuyé sur le diamètre DB est un angle droit, et parce que dans un triangle rectangle la somme des deux angles aigus vaut un angle droit, on aura l'angle ADB=DBF—ABD=ABF : mais ADB est mesuré par la moitié de l'arc AB ; donc aussi, son égal ABF sera mesuré par la moitié du même arc ; donc, etc.

(487) Cor. 1. Donc, **l'angle** ABF **formé par une tangente et une corde est égal à un angle quelconque** ADB, AGB, etc., **dans le segment alterne** ABG **du cercle** ; et l'angle ABE=AKB dans le segment alterne ABK.

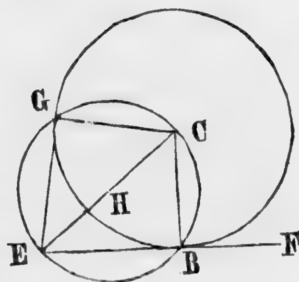
(488) Sco. 1. PROB. Donc, **pour mener par un point donné** B **une tangente** EF **à un cercle, ou à un arc de cercle quelconque** ; l'on n'a qu'à porter du point B deux distances quelconques égales ou inégales BA, AD sur la circonférence donnée, joindre BD, DA, BA et faire l'angle ABF=ADB. Si les deux distances portées sur la circon-

férence étaient BK, KA ; après avoir joint BA, BK, AK, on ferait l'angle KBF=KAB, ce qui donnerait comme auparavant BF tangente au cercle au point donné B.

(489) **Autrement,** on aurait encore (468) EF tangente au cercle au point donné B en joignant ce point au centre C du cercle et en menant ensuite EF perpendiculaire à l'extrémité B du rayon BC.

(490) **Sco. 2. PROB.** Donc aussi, pour **couper un cercle quelconque de manière qu'un** ABK **de ses segments soit capable d'un angle donné ;** il n'y a qu'à mener une tangente EF au cercle en un point quelconque B et au point de contact B faire un angle ABE égal à l'angle donné ; le segment alterne ABK sera capable d'un angle AKB égal à l'angle donné, puisque par le premier Cor. AKB=ABE.

(491) **Sco. 3. PROB.** L'angle dans un demi-cercle étant (444) un angle droit, et toute tangente devant être (468) perpendiculaire au rayon mené au point de contact ; il s'en suit que pour **mener une tangente** EF **à un cercle par un point donné** E **hors du cercle ;**



Il faut joindre le point donné au centre du cercle, et sur la ligne de jonction EC, bissectée en H, décrire le demi-cercle EBC qui intersectera le cercle donné en B, le point de contact cherché ; car, menant BC et EBF, l'angle CBE appuyé sur le diamètre EC est droit et par conséquent EB est perpendiculaire aux rayon BC à l'extémité de ce rayon ; donc, EF est la tangente demandée.

(492) **Sco. 4. En complétant le cercle** EBG, il est clair que l'on aurait de l'autre côté du diamètre EC une nouvelle intersection G, à laquelle menant EG, on aurait une nouvelle tangente EG égale à EB ; car dans les deux triangles rectangles EBC, EGC, l'hypoténuse EC et le côté BC de l'un

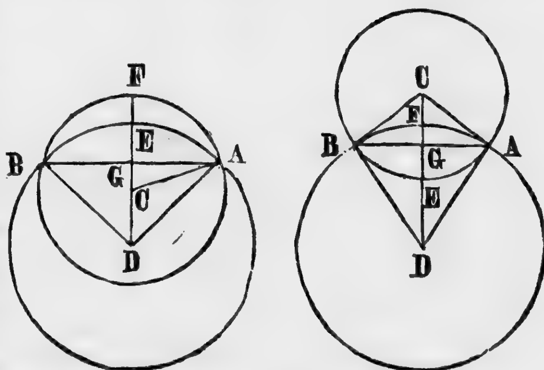
sont égaux à ceux EC, GC de l'autre; ce qui (312) rend égaux les côtés, c-à-d., les tangentes EB, EG et les angles BEC, GEC.

(493) **Cor. 2.** Il suit de la dernière Sco. que les **deux tangentes** EB, EG **menées à un cercle d'un point quelconque** E **hors de ce cercle sont égales.**

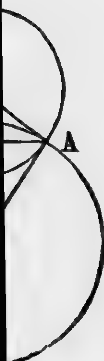
(494) **Cor. 3.** Il suit encore que **la ligne** EC **qui joint le point de rencontre** E **des tangentes au centre du cercle, bissecte l'angle** BEG **formé par les deux tangentes**; et réciproquement, comme il ne peut y avoir qu'une bissectrice EC de l'angle E, il s'en suit que **la ligne qui bissecte l'angle formé par deux tangentes passe par le centre du cercle.**

PROP. XLIV. THÉOR.

(495) **Si deux cercles se coupent en** A, B, **la ligne** CD **qui joint leurs centres sera perpendiculaire à la corde** AB **qui joint les points d'intersection, et bissectera cette corde.**



Car la corde AB est commune aux deux cercles et les perpendiculaires GD, GC élevées au centre G de la corde passent (406) par les centres D, C des deux cercles; mais (128) par un point donné C l'on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire GC ou GD; c-à-d. (135) que les lignes GC, GD ne font partie que d'une seule et même



ligne droite; donc réciproquement, la ligne CD qui joint les centres, ou CD prolongée sera perpendiculaire à la corde AB et bissectera cette corde; donc, etc.

(496) **Cor. 1.** De là, **la ligne joignant les intersections des circonférences de deux cercles est perpendiculaire à la ligne qui joint leurs centres.**

(497. **Sco. 1. Si deux cercles se coupent, la distance CD entre leurs centres sera moindre que la somme de leurs rayons CA, DA et le plus grand rayon DA sera aussi moindre que la somme du plus petit rayon CA et de la distance CD entre les centres des deux cercles**; car, un côté d'un triangle étant moindre que la somme des deux autres côtés, l'on aura $CD<CA+CA$ et pour la même raison $DA<CA+CD$.

(498) **Sco. 2.** Réciproquement, **si la distance entre les centres de deux cercles est moindre que la somme de leurs rayons, le plus grand rayon étant en même temps moindre que la somme du plus petit rayon et de la distance entre les centres; les deux cercles se couperont.**

Car, pour rendre possible une intersection, il faut que le triangle CAD soit possible; ce qui exige que CD soit $<AC+AD$ et $AD<AC+CD$, et chaque fois que le triangle CAD pourra être construit, il est évident que les cercles décrits des centres C et D se couperont.

(499) **Cor. 2.** De là, **si la distance entre les centres de deux cercles est plus grande que la somme de leurs rayons, les deux cercles ne s'intersecteront pas**; car les deux cercles seront alors entièrement en dehors l'un de l'autre.

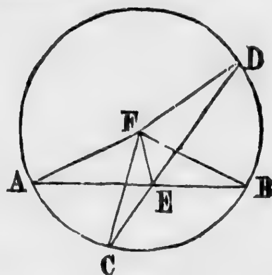
(500) **Cor. 3.** De là, aussi, **si la distance entre les centres de deux cercles est moindre que la différence de leurs rayons, les deux cercles ne se couperont pas**; car $AC+CD>AD$; donc, $CD>AD-AC$; c-à-d., (162) **l'un quelconque des côtés d'un triangle excède la différence entre**

les deux autres côtés. Le triangle est donc impossible lorsque la distance entre les centres des cercles est moindre que la différence des rayons ; et les deux cercles ne peuvent se couper, étant dans ce cas l'un entièrement en dedans de l'autre.

(501) Cor. 4. **Si deux cercles se coupent, ils ne peuvent avoir le même centre,** puisqu'il faudrait pour celà que DA fût en même temps égal à DE et à DF ; ce qui est absurde.

PROP. XLV. THÉOR.

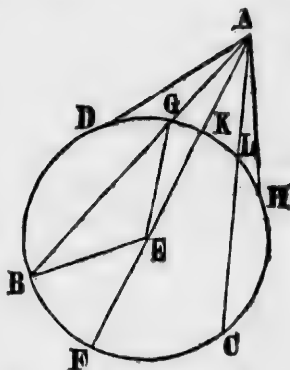
(502) **Si deux cordes AB, CD se coupent dans un cercle, le rectangle AE.EB des segments de l'une est égal au rectangle CE.ED des segments de l'autre.**



Soit F le centre ; ayant mené les rayons égaux FA, FC, etc., on aura deux triangles isocèles AFB, CFD dans chacun desquels EF est une ligne menée du sommet à la base. Maintenant on a démontré (396) que $AF^2—EF^2$=AE.EB et $CF^2—EF^2$=CE.ED; mais parce que le rayon CF= celui AF, l'on a CF—EF=AF—EF ; d'où il suit aussi que AE.EB=CE.ED ; donc, etc.

PROP. XLVI. THÉOR.

(503) **Si d'un point A hors d'un cercle, l'on mène deux sécantes quelconques AB, AC à la circonférence ; le rectangle d'une des sécantes AB et de sa partie AG hors du cercle est égal au rectangle de l'autre sécante AC et sa partie AL hors du cercle.**



Soit E le centre du cercle, et par le point E menez AF ; joignez EB, EG. Le triangle BEG est isocèle, à cause des rayons égaux EB, EG ; EA étant en même temps une ligne menée du sommet E de ce triangle à sa base BG prolongée. Maintenant on a démontré (397) que $EA^2 - EG^2 = AB.AG$, et parce que EK $=EG$, l'on a aussi $EA^2 - EK^2 = AB.AG$; or, (370) $EA^2 - EK^2 = (EA+EK) \times (EA-EK) = AF.AK$, puisque $EF=EK$; donc, $AB.AG = AF.AK$. L'on prouverait de même $AC.AL = AF.AK$, et deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ; donc $AC.AL = AB.AG$; donc, etc.

(504) **Cor. 1.** Si la ligne AB tourne autour du point A de manière à s'éloigner de plus en plus du centre E, il est évident que les deux points B,G finiront par se rencontrer en un point commun D. La sécante AB deviendra alors la tangente AD et on aura le rectangle $AD.AD = AB.AG$; c-à-d., $AD^2 = AB.AG$ ou **le carré de la tangente est égal au rectangle de la sécante entière et de sa partie hors du cercle.**

(505) **Sco. La tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie hors du cercle** ; car, (89) si le produit de deux quantités est égal au carré d'une autre quantité, cette dernière est moyenne proportionnelle entre les deux premières ; or, par le théor., on a $AB.AG = AD^2$; donc, $AB : AD :: AD : AG$.

(506) **Cor. 2.** Si l'on menait du point A une autre tangente AH, l'on aurait encore $AH^2 = AB.AG$; d'où il suit comme du par. (492), que **deux tangentes menées à un**

cercle d'un même point quelconque hors de ce cercle sont égales.

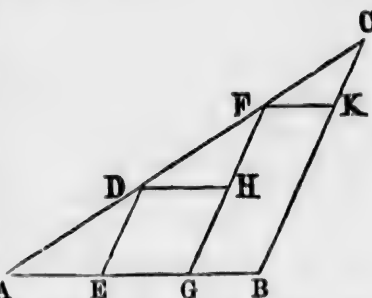
(507) **Cor. 3. Si d'un point A hors d'un cercle on mène au cercle deux lignes AB, AH dont l'une coupe le cercle et l'autre le rencontre, et si le carré de la ligne AH qui rencontre le cercle est égal au rectangle de la ligne entière AB qui coupe le cercle et de la partie extérieure AG ; la ligne qui rencontre le cercle lui sera tangente.**

Si AH n'est pas tangente au cercle, alors étant prolongée elle coupera le cercle, comme la sécante AB et sera elle-même une sécante. Soit AC cette sécante. On a par le théor. AB.AG=AC.AL ; mais par hyp. AH^2 ou AL^2= AB.AG ; donc aussi, AL^2 (ou AL.AL)=AC.AL, ce qui (**84 Cor.**) est absurde ; donc, AL n'est pas la ligne qui rencontre le cercle ; mais AH est cette ligne, nulle autre ne pouvant donner AH^2=AB.AG ; donc, AH touche le cercle sans le couper, c-à-d., lui est tangente.

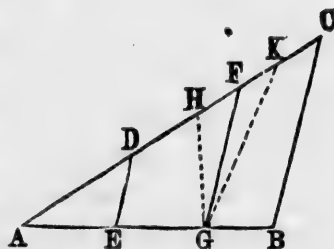
(508) **D'ailleurs,** nulle autre ligne AL ne donnerait $AL^2=AH^2$, puisque (**459**) toute ligne AL plus près que AH de celle AF qui passe par le centre, est plus petite que AH qui est plus éloignée ; donc, AH, c-à-d., la tangente menée du point A, est la seule qui puisse donner AH^2=AB.AG.

PROP. XLVII. THÉOR.

(509) **Si deux lignes AB, AC, faisant l'une avec l'autre un angle quelconque BAC, sont coupées par une ou plusieurs lignes parallèles DE, FG, CB ; les parties de l'une interceptées entre les parallèles seront proportionnelles aux parties correspondantes de l'autre** ; c-à-d., l'on aura AE : EG : GB comme AD : DF : FC, ou AE à AD comme EG à DF comme GB à FC.



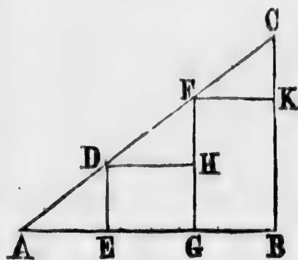
En effet, menant DH, F K parallèles à AB, les figures DG et FB seront des parallélogrammes et donneront (**270**) DH=EG et FK=GB. Si donc AE, EG, GB sont égales entre elles; AE, DH, FK seront aussi égales entre elles. Or les triangles AED, DHF, FKC sont évidemment (**151**) tous équiangles par construction, à cause des parallèles DE, FG, CB et de celles AE, DH, FK, et d'après l'hyp. qu'on vient de faire, chacun de ces triangles a un côté de l'un égal au côté correspondant de l'autre; donc, (**238**) les autres côtés de ces triangles sont aussi égaux et l'on a AD=DF=FC; d'où il suit que si AE est le tiers, le quart ou toute autre fraction de la ligne entière AB, AD sera le tiers, le quart ou la même fraction de la ligne entière AC; et réciproquement, si AB est le double, le triple ou un multiple quelconque de la partie AE, AC sera aussi le double, le triple ou le même multiple de la partie AD. En d'autres termes, quelque soit le rapport entre la ligne entière AB et ses parties AE, EG, etc., on aura le même rapport entre la ligne entière AC et ses parties AD, DF, etc.; donc, etc.



(**510**) Reciproquement, **si les parties AE, EG, etc., et celles AD, DF, etc. de deux lignes AB, AC se rencontrant en A, à un angle quelconque, sont proportionnelles; les lignes DE, FG, etc., menées entre les points de section seront parallèles entre elles et à la ligne CB qui joint les extrémités des deux lignes inclinées.**

Car, si FG, par exemple, n'est pas parallèle à CB ou à DE,

que KG ou HG soit cette parallèle. La ligne KG qui retranche de FC une partie quelconque FK ou la ligne HG qui ajoute à FC une partie quelconque FH, rendra cette ligne plus petite ou plus grande ; et si FC a à DF un certain rapport, ce rapport cessera d'exister du moment que FC diminuera ou augmentera. La parallèle KG ou HG pourrait donc couper les lignes inclinées AB, AC, d'une manière non proportionnelle ; mais le contraire vient d'être prouvé dans le dernier paragraphe ; donc, KG ou HG ne peut être parallèle à CB ou à DE qu'à la condition que DF, FC soient proportionnelles à EG, GB ; donc, KG ou HG n'est pas parallèle à CB ou à DE ; donc, FG est cette parallèle ; donc, etc.



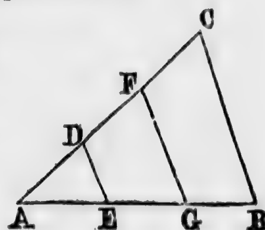
(**511**) **Cor. 1.** Si l'on suppose AB perpendiculaire à CB, elle le sera également (**149**) aux parallèles FG et DE : et les parties EG, GB seront (**142**) les distances entre les parallèles ; et si ces distances sont égales, l'on aura comme auparavant DF=FC ; c'est-à-dire, que **les parties d'une seule et même ligne droite comprises entre parallèles également éloignées sont égales.**

(**512**) **Cor. 2.** Les parallèles DH, FK étant des lignes également inclinées, l'on tire aussi de la prop. que **les parallèles ou lignes également inclinées entre parallèles également éloignées sont égales.**

(**513**) **Sco. 1. PROB.** Il suit de ce théor. que pour **partager une ligne donnée AB en un nombre quelconque de parties égales AE, EG, GB** ; il n'y a qu'à mener une autre ligne AC faisant avec la première un angle quelconque BAC. Portant alors sur AC le nombre voulu de distances égales quelconques AD, DF, FC, joignant CB et menant

FG, DE parallèles à CB; la ligne AB sera partagée de la manière requise.

(514) **Sco. 2 PROB.** Si les parties AE, EG, etc., au lieu d'être égales, devaient avoir l'une à l'autre un rapport donné; il est clair qu'il n'y aurait qu'à porter sur la ligne AC des parties quelconques AD, DF, etc., ayant l'une à l'autre le rapport voulu; alors la même construction que ci-dessus donnerait AE à EG à etc., dans le rapport voulu.



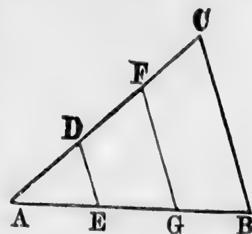
Par exemple, si l'on voulait avoir AE à EG à GB dans le rapport de 2 à 3 à 5; l'on porterait sur la ligne AC, la partie AD égale à 2 unités de mesure (24) quelconques, DF égale à 3 et FC égale à 5 de ces mêmes unités. Cette Sco. indique donc le moyen de **partager une ligne donnée en un nombre quelconque de parties proportionnelles.**

(515) **Sco. 3. PROB.** Si l'on avait à **retrancher d'une ligne donnée** AG **une partie quelconque** EG **ou à lui ajouter une partie quelconque** GB; c-à-d., une partie ayant à la ligne entière AG un rapport quelconque; l'on porterait sur la ligne indéfinie AF, un nombre d'unités de mesure quelconques égal à celui qui est contenu dans la ligne donnée; prenant alors FD ou FC égale au nombre d'unités de mesure à retrancher ou à ajouter, joignant FG et menant DE ou CB parallèle à FG, le problème serait résolu.

(516) **Sco. 4. PROB.** Si l'on a AE à EG comme AD à DF, (AE:EG :: AD:DF) DF sera quatrième proportionnelle aux trois lignes AE, EG, AD; de là donc le moyen de **trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données.**

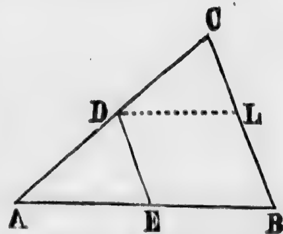
(517) **Sco. 5. PROB.** Si AD était égale à EG, l'on aurait AE : EG :: EG : DF; d'où l'on tire le moyen d'**obtenir une troisième proportionnelle à deux lignes données.**

(**518**) **Cor. 3.** Nous avons défini triangles semblables (**205**) ceux qui sont équiangles; c-à-d., dont tous les angles sont respectivement égaux l'un à l'autre. Les triangles ADE, AFG, ACB sont donc des triangles semblables, à cause des parallèles DE, FG, CB qui rencontrent les lignes AB, AC et font les angles correspondants E, G, B égaux, et ceux D, F, C aussi égaux, l'angle A étant commun à chacun des triangles.



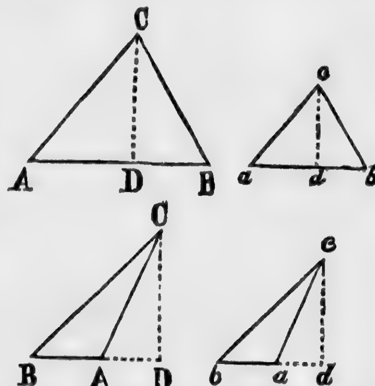
L'on vient de voir aussi (**509**) que AE étant une partie quelconque de la ligne entière AG ou AB, AD sera la même partie de la ligne entière AF ou AC; d'où il suit que **si dans un triangle quelconque ACB l'on mène une ou plusieurs lignes parallèles à l'un CB des côtés; ces parallèles couperont les deux autres côtés proportionnellement.**

(**519**) **Cor. 4.** Réciproquement, **si les côtés AF, AG ou les côtés prolongés AC, AB d'un triangle quelconque AFG sont coupés proportionnellement; la ligne DE ou CB qui joint les points de section sera parallèle à l'autre côté FG du triangle**; car (**510**) nulle autre ligne non parallèle à FG ne couperait proportionnellement les côtés ou côtés prolongés du triangle.



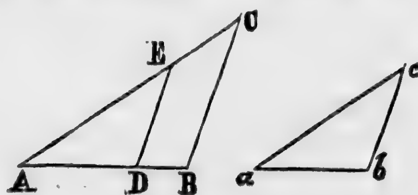
(**520**) **Cor. 5.** Si ADE, ACB sont deux triangles semblables quelconques disposés comme dans la fig.; le côté ED sera (**206**) parallèle au côté BC. Ayant mené DL parallèle à AB, la fig. DB sera un parallèlogramme et donnera BL= ED. Par la prop., la ligne ED parallèle à BC donne AE : AB :: AD : AC et la parallèle DL donne BL : BC :: AD : AC; mais (**75 Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux; donc, AE : AB :: BL : BC et

parce que BL=ED, l'on a AE : AB :: ED : BC ; d'ou il suit que **dans les triangles équiangles ou semblables les côtés homologues sont proportionnels.**



(521) **Cor. 6.** Si dans les triangles semblables ABC, *abc*, CD, *cd*, représentent les hauteurs respectives de ces triangles ; ces hauteurs sont proportionnelles l'une à l'autre ; comme le sont les bases et autres côtés ou lignes homologues des triangles.

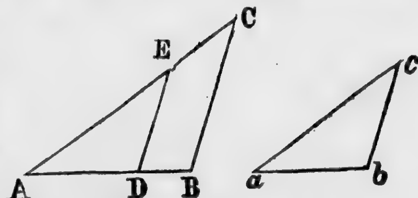
Ceci est clair, car en considérant séparément les triangles CDB, *c d b*, l'on voit de suite que ces triangles sont équiangles ; l'angle D, *d*, dans chacun étant droit et les angles B, *b*, communs à ces triangles et aux triangles donnés. Les triangles CDB, *cdb* sont donc semblables et donnent CB : *cb* :: CD : *cd* ; mais CB : *cb* :: AB : *ab* ; d'où (**75 Ax.**) AB : *ab* :: CD : *cd*, et alternando (**94**) AB : CD :: *ab* : *cd*. C-à-d. que **les hauteurs et les bases des triangles semblables sont proportionnelles.**



(522) **Cor. 7. Si les côtés homologues de deux triangles ABC, *abc* sont proportionnels ; les triangles seront équiangles et semblables.**

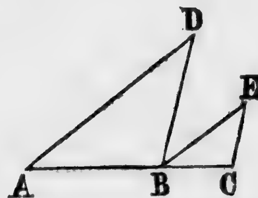
Sur AB portez AD=*ab* et sur AC portez AE=*ac* et joignez DE. Parce que *ab* : AB :: *ac* : AC ou AD : AB :: AE : AC, l'on a (**519**) DE parallèle à BC, et parceque DE est parallèle à BC, l'on a (**509**) AD : AB :: DE : BC ou *ab* : AB :: *bc* : BC. Les trois côtés du triangle ADE sont donc

proportionnels à ceux du triangle *a b c*, et par constr. AD=*a b* et AE=*a c*; donc, aussi (**82 Ax.**) DE=*b c*; or avec trois côtés donnés, l'on ne peut (**239**) faire qu'un seul triangle; donc, le triangle ADE est égal en tout au triangle *a b c*. Mais parce que DE a été prouvé parallèle à BC, le triangle ADE est équiangle et semblable à ABC; donc aussi son égal *a b c* est équiangle et semblable à ABC; donc, etc.



(**523**) **Cor. 8.** Si dans le dernier cor., l'on avait seulement deux côtés *a b*, *a c* du triangle *a b c* proportionnels aux deux AB, AC du triangle ABC, et l'angle compris *a* de l'un égal à l'angle correspondant A de l'autre; il est clair que faisant la même constr., l'on prouverait comme auparavant que DE est parallèle à BC et le triangle ADE égal en tout à celui *a b c*, et de là, *a b c* équiangle et semblable à ABC; d'où il suit que **si deux triangles ont un angle de l'un égal à un angle de l'autre et les côtés qui comprennent les angles égaux proportionnels, les deux triangles sont équiangles et semblables.**

(**524**) **Sco. 6. Si deux triangles ADB, BEC ont deux côtés de l'un proportionnels aux deux de l'autre, savoir AD à BE comme BD à CE et l'angle compris D de l'un égal à l'angle compris E de l'autre, et si ces deux triangles sont disposés de manière à se toucher par un de leurs angles et à avoir les côtés homologues parallèles; les autres côtés AB, BC de ces triangles seront sur la même ligne droite AC.**

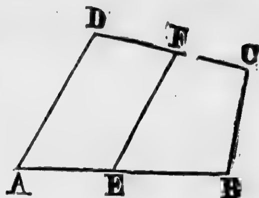


Car, par le dernier cor., ces deux triangles sont équiangles et semblables, et (**206**) il suffit qu'un côté de l'un soit

parallèle au côté correspondant de l'autre, pour que les autres côtés le soient. Or, si BC est parallèle à AB et qu'en même temps le point B soit commun à chacun de ces côtés, il est clair (**146**) que AB, BC feront partie d'une seule et même ligne droite.

(525) **Sco. 7.** Nous voyons par cette prop. que **dans les triangles, l'égalité des angles est une conséquence de la proportion ou du rapport entre les côtés, et réciproquement; de sorte que l'une ou l'autre de ces deux conditions détermine d'une manière suffisante la similitude de deux triangles.**

(526) **Sco. 8. Il en est autrement des figures de plus de trois côtés.** Il est clair, par exemple, que si dans le quadrilatère AC, l'on mène EF parallèle à AD, la fig. EC sera équiangle à AC, quoique le rapport entre les côtés soit changé; et réciproquement, il est clair que si les quatre côtés étaient mobiles autour des points angulaires A, B, C, D, on pourrait les faire agir de manière à varier indéfiniment les angles sans changer en rien la longueur des côtés.



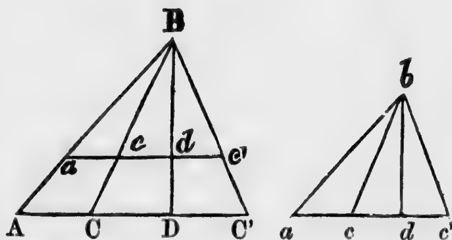
(527) **Sco. 9. Cette proposition avec celle du carré de l'hypoténuse sont les plus importantes et les plus fécondes en résultats de toutes celles de la géométrie;** étant presque suffisantes à elles seules pour toute application au raisonnement ultérieur et pour résoudre tous les problèmes. La raison en est que **toute figure peut se résoudre en triangles et tout triangle en deux triangles rectangles.**

Ainsi, **les propriétés générales des triangles comprennent en même temps celles de toute autre figure.**

PROP. XLVIII. THÉOR.

(528) **Si deux triangles** ABC, *a b c*, ou ABC′, *a b c′*, **ont deux côtés** AB, BC ou AB, BC′ **de l'un proportionnels aux deux** *a b*, *b c* ou *a b*, *b c′* **de l'autre et l'angle** A **opposé à l'un de ces côtés égal à l'angle correspondant** *a* **de l'autre ; ces triangles seront équiangles ou semblables, pourvu que l'angle** C ou C′ **opposé à l'autre côté du premier soitde même affection que l'angle** *c* ou *c′* **opposé au côté correspondant du second** ; c-à-d., (**129**) pourvu que les angles correspondants soient tous deux obtus C, *c* ou tous deux aigus C′, *c′*.

Il a déjà été démontré (**320**) qu'il peut y avoir deux triangles différents ABC, ABC′ dont deux côtés AB, BC de l'un soient égaux à deux côtés AB, BC′ de l'autre, et un angle A commun ou égal dans chacun d'eux ; pourvu que l'angle C d'un de ces triangles soit égal au supplément de l'angle correspondant C′ de l'autre.



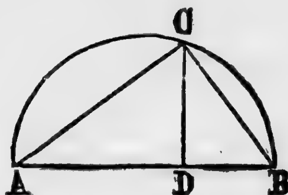
Il est clair aussi que si BC=BC′ et que le rapport de BA à BC soit donné, il existera (**82 Ax.**) entre BA, BC′ le même rapport, et que l'on pourra comme dans le cas de la prop. XII (**320**) former avec les données mentionnées dans l'énoncé de ce théor., deux triangles ABC, ABC′ tels que l'angle C de l'un soit égal au supplément de l'angle C′ de l'autre.

Cela posé, puisque par hyp. AB : BC :: *a b* : *b c*, l'angle A étant=*a* ; si sur AB, BC, l'on porte des longueurs B*a*, B*c*=

b a, *b c*, l'on aura (**522**) *a c* parallèle à AC et les angles *a*, *c* par conséquent égaux aux angles A, C. Le triangles *a b c* ou son égal *a* B *c* sera donc équiangle à ABC. L'on prou verait de même que *a* B *c'* ou son égal *a b c'* est équiangle à ABC'; donc, etc.

PROP. XLIX. THÉOR.

(529) **Dans un triangle rectangle ACB, si l'on abaisse de l'angle droit C sur la base AB une perpendiculaire CD; les triangles ADC, BDC de chaque côté de la perpendiculaire, seront semblables au triangle entier et l'un à l'autre.**



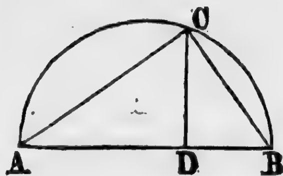
Les triangles partiels ADC, BDC ont chacun un angle droit en D, à cause de CD perpendiculaire sur AB. Ils ont aussi, l'un, un angle A, l'autre, un angle B commun avec le triangle entier ACB; le troisième angle dans chaque triangle est donc aussi égal. Chaque triangle partiel est donc équiangle et par conséquent semblable au triangle entier, et ces triangles sont aussi semblables entre eux, puisque (**209**) deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles; donc, etc.

(530) **Cor. 1.** Dans les triangles semblables ADC, BDC, les côtés homologues étant proportionnels, l'on aura AD : DC :: DC : DB; d'où il suit (**87**) que $AD.DB = DC^2$; c-à-d. (**89**) que DC est moyenne proportionnelle entre AD et DB; donc :

1° **La perpendiculaire abaissée du sommet d'un triangle rectangle sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base.** De plus, parce que C est un angle droit, le segment de cercle ACB qui le contient est un demi-cercle et AB un diamètre (**444**); donc, aussi :

2° **La perpendiculaire DC menée à la circonférence, d'un point quelconque D sur le diamètre d'un cercle, est moyenne proportionnelle entre les segments AD, DB du diamètre.**

(531) **Cor. 2.** En comparant chacun des triangles partiels avec le triangle entier, l'on obtient AB : AC :: AC : AD et AB : BC :: BC : BD ; c.-à-d., **chacun des côtés d'un triangle rectangle ACB est moyen proportionnel entre la base et le segment, adjacent a ce côté, formé par la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse.**



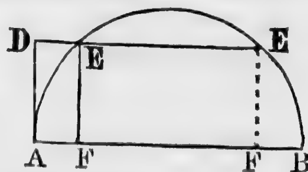
(532) **Sco. 1.** Puisque AB : AC :: AC : AD, le produit des extrêmes est (87) égal à celui des moyens, et l'on a AC^2=AB.AD. Pour la même raison, AB étant à BC :: BC à BD, l'on a BC^2=AB.BD. Donc, AC^2+BC^2=AB.AD+AB.BD ; mais (355) la somme des rectangles d'une ligne et de chacune de ses parties équivaut au carré de la ligne; donc, AB.AD+AB.BD=(AD+DB)×AB=AB×AB=AB^2 ; c-à-d., **le carré fait sur l'hypoténuse AB d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés AC, BC du triangle.**

(533) Nous arrivons donc encore au carré de l'hypoténuse par un chemin bien différent de celui (305) qui nous y a d'abord conduits, et plus légitimement de cette manière ; puisque cette propriété est en réalité une conséquence de la propriété plus générale, que les côtés des triangles équiangles sont propertionnels (520). C'est ainsi que **les propositions fondamentales de la géométrie se réduisent pour ainsi dire à cette seule proposition, que les triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels.**

(534) **Sco. 2. PROB.** L'angle C contenu dans un demi-cercle étant droit (444) ; si l'on demandait à **trouver une**

moyenne proportionnelle CD **à deux lignes données** AD, DB; il est clair (**530** 2°) qu'il n'y aurait qu'à joindre bout à bout les deux lignes données, de manière à n'en former qu'une seule et même ligne droite AB; sur AB décrire le demi-cercle ACB; élever alors au point de contact D la perpendiculaire DC qui serait la moyenne proportionnelle demandée.

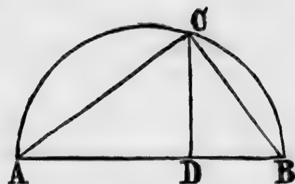
(**535**) **Sco. 3. PROB.** La perpendiculaire DC menée à la circonférence, d'un point quelconque D sur le diamètre d'un cercle, étant (**530** 2°) moyenne proportionnelle entre les segments du diamètre; si l'on demandait à **trouver** par ce théor. un **rectangle équivalent à un carré donné** C **et ayant la somme de ses côtés adjacents égale à une ligne donnée** AB; il n'y aurait qu'à décrire sur AB un demi-cercle et à mener la parallèle DE à une distance AD de AB égale au côté du carré donné; abaissant alors du point E la perpendiculaire EF sur AB, la ligne AB serait partagée en F de manière à donner $AF.FB=EF^2$; c-à-d. que l'on aurait AF, FB respectivement égaux aux côté adjacents d'un rectangle équivalent au carré donné.



Une autre solution de ce problème a déjà été donnée aux par. (**373**).

2° Si l'on avait à **trouver un carré équivalent à un rectangle donné**; il est clair qu'en prenant sur la ligne indéfinie AB, AF égale à l'un des côtés du rectangle, FB égale à l'autre; sur AB décrivant un demi-cercle, et du point F menant FE perpendiculaire à AB; l'on aurait FE égale au côté du carré cherché; puisque (**430** 2°) $FE^2=AF.FB$.

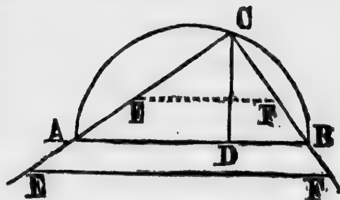
(536) **Cor. 3. La corde AC ou BC est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le segment adjacent AD ou BD;** puisque AC^2=AB.AD et que BC^2 =AB.BD.



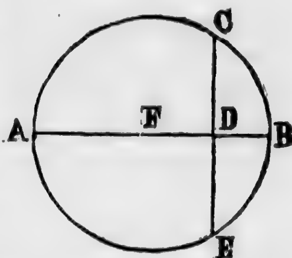
(537) Cor 4. Puisque AC^2=AD.AB et que BC^2=BD.AB ; l'on a AC^2 : AD.AB :: BC^2 : BD. AB. Supprimant AB qui est commun aux deux conséquents (**64**) de la proportion, il vient AC^2 : AD :: BC^2 : BD ou alternando AC^2: BC^2:: AD: BD ; c.-à-d. que **dans un triangle rectangle quelconque ACB, les segments AD, DB de la base sont entre eux comme les carrés des côtés correspondants.**

2° Il est clair aussi que AC^2 : AB^2 :: AD: AB et BC^2: - AB^2:: BD : AB ; c-à-d., **l'hypoténuse et un de ses segments sont entre eux comme les carrés de l'hypoténuse et du côté correspondant ou adjacent au segment.**

(538) **Cor. 4. PROB.** Si EF est parallèle à AB, les triangles semblables ACB, ECF donneront AC : BC :: EC : FC ; de là (**104**) AC^2: BC^2:: EC^2: FC^2. Mais par le dernier Cor., AC^2 : BC^2 :: AD : BD, et parceque (**75**) les rapports qui sont égaux à un même rapport son égaux entr'eux, l'on aura EC^2 : FC_2 :: AB : BD ; ce qui indique que pour **trouver le côté FC d'un carré qui soit à un carré donné comme une ligne donnée BD à une ligne donnée AD** ; il faut joindre bout à bout ces deux lignes, ou ce qui est la même chose, prendre sur une ligne droite indéfinie AB, deux longueurs AD, BD égales à celles des deux lignes données ; sur AB décrire un demi-cercle, au point D élever une perpendiculaire DC, par les points A, C et B, C mener les lignes indéfinies EC, FC ; porter sur celle EC une longueur EC égale au côté du carré donné et mener EF parallèle à AB.



Cette dernière coupera la ligne FC en F et donnera FC égale au côté du carré cherché.



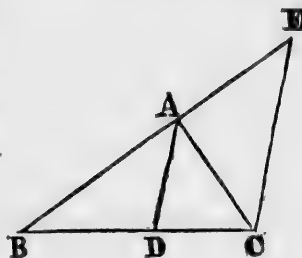
(**539**) **Cor. 5.** L'on a vu (**410**) que la perpendiculaire AB menée par le milieu D d'une corde quelconque CF et terminée de part et d'autre à la circonférence, est un diamètre ; et réciproquement, le diamètre AB perpendiculaire à une corde quelconque CE, bissecte cette corde (**408**) ; or DC ou son égale DE est (**530** 2°) moyenne proportionnelle entre AD et DB, et $DC=DE=\frac{1}{2}$ CE est la demi-corde ; donc **la moitié d'une corde perpendiculaire à un diamètre est moyenne propertionnelle entre les segments du diamètre.**

(**540**) **Sco. 5 PROB.** Il suit directement du dernier cor. qu'**étant donné la corde CE d'un arc de cercle quelconque CBE et la perpendiculaire DB au milieu de cette corde,** c.-à-d. la flèche ou le segment du diamètre compris entre cette corde et la circonférence, pour **trouver le diamètre du cercle ou le rayon de la courbe** ; l'on obtiendrait le reste AD du diamètre ou le segment inconnu, en divisant le carré de la demi-corde DC par le segment donné DB ; car BD : DC :: DC : DA ; d'où, $DA=\frac{DC^2}{BD}$, et le rayon FB de la courbe$=\frac{DA+DB}{2}$.

Puisque $AD.DB=DC^2$; il est clair que pour trouver AD par construction il faudrait sur BD faire (**300**) un rectangle équivalent au carré sur la ligne CD ; alors BD étant un des côtés de ce rectangle, l'autre côté serait évidemment égal à la ligne cherchée AD.

PROP. L. THÉOR.

(541) **Si dans un triangle quelconque BAC, la ligne AD bissecte un angle BAC et coupe le côté BC opposé à cet angle ; les segments BD, DC de la base auront l'un à l'autre le même rapport que celui des deux autres côtés BA, AC du triangle.** C-à-d., l'on aura BD : DC :: BA : AC.



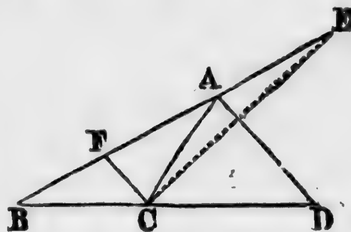
En effet, menant CE parallèle à AD jusqu'à ce qu'elle rencontre BA prolongée en E ; la ligne droite AC qui rencontre les parallèles AD, CE, fera (**153**) l'angle ACE égal à son alterne DAC. Les mêmes parallèles donnent aussi l'angle DAB égal à son correspondant E ; mais par hyp. DAB=DAC ; donc aussi, l'angle ACE=E ; c-à-d. (**248**) EAC est un triangle isocèle et donne AE=AC. Maintenant ABD,EBC étant des triangles semblables, parce que CE est parallèle à AD, donnent (**509**) BD : DC :: BA : AE et l'on vient de voir que AE=AC ; donc, (**82 Ax.**) BD : DC :: BA : AC ; donc, etc.

(542) Réciproquement, **si les segments de la base d'un triangle quelconque ont l'un à l'autre le même rapport que celui qui existe entre les côtés du triangle ; la ligne menée de l'angle vertical (183) au point de section de la base, bissectera l'angle vertical.**

Faisant la même construction que dans le dernier cas, l'on aura (**509**) BD : DC :: BA : AE et parce que par hyp. BD : DC :: BA : AC, l'on aura (**75 Ax.**) BA : AC :: BA : AE : donc (**72 Ax.**) AC=AE et par conséquent l'angle E=ACE ; mais E= son correspondant DAB et ACE= son alterne DAC, et ces deux angles sont égaux, donc aussi, DAB, DAC sont égaux ; c-à-d. que l'angle BAC est bissecté par la ligne AD ; donc, etc.

PROP. LI. THÉOR.

(543) **Si l'angle extérieur EAC d'un triangle quelconque BAC est bissecté par une droite AD qui coupe en même temps la base BC prolongée ; les segments BD, CD entre la bissectrice AD et les extrémités B, C de la base, ont l'un à l'autre le même rapport que les côtés BA, CA du triangle.** C-à-d., l'on aura BD : CD :: BA : CA.



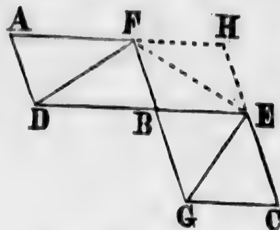
Soit BA prolongée d'une quantité AE=CA ; le triangle EAC sera isocèle et donnera l'angle E=ACE. Soit FA=CA, et l'on aura aussi l'angle AFC=ACF ; mais par hyp. AD bissecte EAC, faisant EAD=CAD, et (**251**) l'angle ext. EAC du triangle CAF est égal à la somme des angles ints. opposés AFC, ACF ; donc, CAD moitié de EAC=½ AFC+ACF ; c-à-d., CAD=ACF, puisque ACF=AFC ; donc, FC est parallèle à AD et l'on a (**509**) BD : CD :: BA : FA, et FA par constr. =CA ; donc aussi, (**82 Ax.**) BD : CD :: BA : CA ; donc, etc.

(**544**) Réciproquement, **si les segments de la base prolongée sont dans le même rapport que les autres côtés du triangle ; la droite menée du sommet au point de section de la base prolongée, bissecte l'angle extérieur du triangle.** C-à-d., si BD : CD :: BA : CA, l'angle CAD sera =EAD.

Faisant la même constr. que dans le dernier cas, on aura encore l'angle E=ACE et ACF=AFC ; mais l'angle ext. EAC=AFC+ACF, et puisque BD : CD :: BA : CA ou à son égal FA, l'on aura (**510**) AD parallèle à FC et l'angle CAD= son alterne ACF ; mais ACF=AFC et AFC= son correspondant EAD ; donc aussi, CAD=EAD ; donc, etc.

PROP. LII. THÉOR.

(545) **Les parallélogrammes BA, BC qui sont en même temps équiangles et de même surface, ont leurs côtés réciproquement proportionnels.** C-à-d., BD : BE :: BG : BF.



Ayant disposé les parallélogrs. de manière qu'ils aient un sommet commun B et leurs côtés BD, BE sur la même ligne droite DE ; complétons le parallélogr. BH. Puisque BA=BC par hyp. et que BH est un autre parallélogr. ; l'on a (**82 Ax.**) BA : BH :: BC : BH ; mais parce que BA, BH ont même hauteur, et BC, BH même hauteur, et que (**342**) les parallélogrs. de même hauteur sont entre eux comme leurs bases ; l'on a BA : BH :: BD : BE et BC : BH :: BG : BF ; donc, BD : BE :: BG : BF ; car, (**75 Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux ; donc, etc.

(546) Réciproquement, **les parallélogrammes équiangles et dont les côtés sont réciproquement proportionnels, sont égaux.** C-à-d., si BD : BE :: BG : BF ; l'on aura BA=BC.

Car BD : BE :: BA : BH et BD : BE :: BG : BF et les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux ; donc, BG : BF :: BA : BH ; mais BG : BF : : BC : BH ; d'où il suit que BA : BH : : BC : BH ; or, (**72 Ax.**) si deux quantités ont à la même quantité le même rapport, ces deux quantités sont égales ; donc, BA=BC.

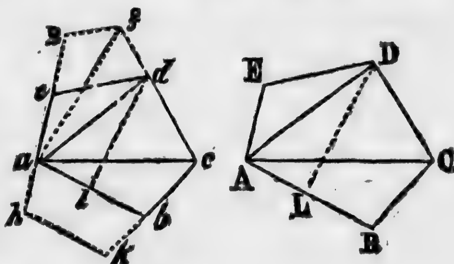
(547) **Cor.** Les triangles étant (**281**) moitiés de parallélogrs. correspondants, et les moitiés de choses égales étant égales ; il est clair que le même raisonnement que l'on vient de suivre dans le cas des parallélogrs., s'appliquerait aux triangles, dont les surfaces, comme celles des parallé-

logrs., sont entre elles (344 2°) comme leurs bases, lorsque leurs hauteurs sont égales. Il suit donc, que **les triangles égaux qui ont un angle de l'un égal à un angle de l'autre, ont leurs côtés qui comprennent les angles égaux réciproquement proportionnels**; c-à-d. que si le triangle FBD=EBG et l'angle FBD=EBG; l'on aura BD:BE::BG:BF.

2° Et de même, **les triangles qui ont un angle de l'un égal à un angle de l'autre et les côtés qui comprennent les angles égaux réciproquement proportionnels, sont égaux.**

PROP. LIII. THÉOR.

(548) **Dans les figures semblables quelconques, EB, *e b*, les côtés et autres lignes homologues sont proportionnels.**

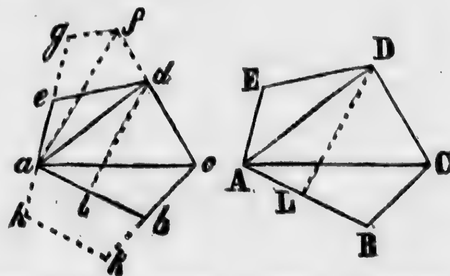


Nous avons déjà défini (207) figures semblables de plus de trois côtés, celles qui sont composées d'un même nombre de triangles semblables situés d'une manière correspondante dans chacune des figs., et cette condition est de rigueur pour que leurs côtés soient proportionnels; car s'il suffisait que les figs. fussent équiangles, comme dans le cas des triangles, il arriverait que les côtés de la fig. EB seraient en même temps proportionnels aux côtés de l'une ou l'autre des figs, *e b*, *g b*, ou de toute autre fig. équiangle *e k*, *g k*; mais dans ce cas, les figs. *e b* et *g b* étant par hyp. équiangles, l'on aurait aussi $ab:ed::ab:gf$ ou $ab:ae::ab:ag$, ou etc.; ce qui (526) est absurde; or, les figs. équiangles *eb*, *gb* ne sont pas composées de triangles semblables ou équiangles, puisque le triangle *a c d* n'est pas équiangle à *a c f*, non

plus que $a\,d\,e$ à $a\,f\,g$; donc, **les figures qui ne sont pas composées de triangles équiangles ou semblables, n'ont pas leurs côtés proportionnels :**

(549) 2° **Et si ces figures sont composées de triangles équiangles ou semblables,** il est à démontrer que **leurs côtés sont proportionnels**; c-à-d. que l'on aura AB : $a\,b$: : BC : $b\,c$: : CD : $c\,d$: : etc.

Les triangles semblables ABC, $a\,b\,c$ donnent AB : $a\,b$ :: BC : $b\,c$ et BC : $b\,c$ :: CA : $c\,a$; les triangles semblables ACD, $a\,c\,d$ donnent CA : $c\,a$ :: CD : $c\,d$; mais si BC : $b\,c$ :: CA : $c\,a$ et CD : $c\,d$ :: CA : $c\,a$, il est clair que l'on aura BC : $b\,c$ :: CD : $c\,d$, puisque (**75 Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux. L'on prouverait de même CD : $c\,d$ :: DE : $d\,e$ et DE à $d\,e$ :: EA à $e\,a$; donc, AB : $a\,b$ :: BC : $b\,c$ :: CD : $c\,d$ :: etc.; donc, etc.



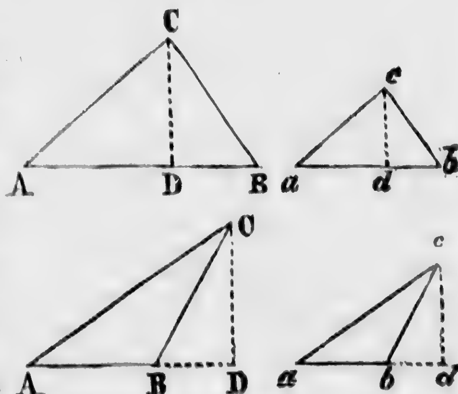
(550) Si DL, $d\,l$ étaient perpendiculaires sur AB, $a\,b$, ou si elles formaient avec AB, $a\,b$ des angles égaux quelconques; les triangles ALD, $a\,l\,d$ seraient équiangles et semblables, comme le sont les autres triangles ABC, $a\,b\,c$, et ACD, $a\,c\,d$, etc., des deux figures semblables EB, $e\,b$; or, par la démonstration, les côtés AC, $a\,c$, et AD, $a\,d$ de ces figs. sont proportionnels, comme le sont les autres côtés AB, $a\,b$ et BC, $b\,c$, etc., de ces triangles, et comme on le prouverait aussi de DL, $d\,l$ ou de toutes autres lignes homologues menées dans les deux figs.; donc, AB : $a\,b$ :: DL : $d\,l$ :: etc.; donc, **dans les figures semblables quelconques** EB, $e\,b$, **les côtés** AB, $a\,b$ et BC, $b\,c$, etc. **et autres lignes homologues** AC, $a\,c$ et DL, $d\,l$, etc., **sont proportionnels.**

(551) **Sco. PROB.** D'après ce qui précède, il est clair que

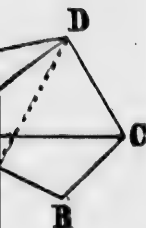
si l'on demandait à faire **sur une ligne donnée** *a b* **une figure** *c b* **semblable à une figure rectiligne donnée** EB ; il n'y aurait qu'à partager la fig. donnée en triangles ACB, ACD, etc. ; sur *a b* faire le triangle *a c b* équiangle à ACB ; sur *a c*, le triangle *a c d* équiangle à ACD ; et procéder de cette manière jusqu'à ce que la fig. requise fût complète, c-à-d., (**207**) composée du même nombre de triangles équiangles que celui contenu dans la fig. EB servant de modèle, et ayant chacun de ces triangles situé d'une manière correspondante à ceux de cette figure.

PROP. LIV. THÉOR.

(**552**) **Les triangles semblables** ABC, *a b c* **sont entre eux comme les carrés de leurs côtés ou autres lignes homologues** ; c-à-d., ABC : *a b c* :: $AB^2 : ab^2 :: CB^2 : cb^2 :: CD^2 : cd^2$ :: etc.



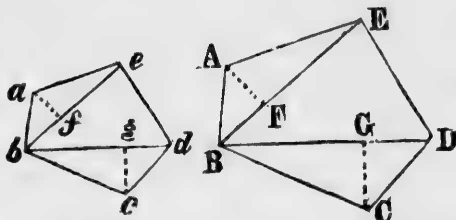
L'on a vu (**521**) que dans les triangles semblables, les bases et hauteurs sont proportionnelles, comme le sont (**520**) les côtés ; ce qui donne AB : *a b* :: CD : *c d* ou (**94**) alternando AB : CD :: *a b* : *c d* ; or (**344**) la surface d'un triang. est égale au demi-produit de sa base par sa hauteur, et (**345**) les triangles quelconques sont entre eux comme les produits deleurs bases et hauteurs. L'on a donc ABC : *a b c* :: AB.CD : *a b . c d* ; c-à-d., la superficie du triangle ABC est à celle du triangle *a b c* comme le produit de la base et hauteur du premier est à celui de la base et hauteur du second. Mais il est à démontrer que AB.CD : *a b . c d* :: $AB^2 : ab^2$; or, si l'on



multiplie les termes du rapport AB : $a\,b$ :: CD : $c\,d$ par ceux du rapport identique AB : $a\,b$ :: AB : ab, les produits seront proportionnels ; puisque (**103**) les produits de deux séries de quantités proportionnelles sont proportionnels. L'on aura donc $AB \times AB : a\,b \times a\,b :: AB \times CD : a\,b \times c\,d$; c-à.d., $AB^2 : a\,b^2 :: AB.CD : a\,b\,.\,c\,d :: \frac{AB.CD}{2} : \frac{a\,b\,.\,c\,d}{2} ::$ ABC : $a\,b\,c$, ou ABC : $a\,b\,c$ :: $AB^2 : a\,b^2$. L'on prouverait de même ABC à $ab\,c$ :: CB^2 à $c\,b^2$ ou comme AC^2 à $a\,c^2$. Il est clair aussi qu'en multipliant les termes du rapport AB : $a\,b$: : CD : $c\,d$ par les termes correspondants du rapport CD : $c\,d$: : CD : $c\,d$, l'on obtient $AB.CD : a\,b\,.\,cd :: CD^2 : c\,d^2$ ou ABC : $a\,b\,c$: : $CD^2 : c\,d^2$; donc, etc.

(**553**) **D'ailleurs**, puisque (**521**) AB : $a\,b$: : CD : cd ; il est clair que AB étant un multiple ou sous-multiple quelconque de $a\,b$, CD sera le même multiple ou sous-multiple de $c\,d$. Si donc AB est double, triple, etc. de $a\,b$, CD sera double, triple, etc. de $c\,d$, et de même si $a\,b$ est moitié, tiers, etc. de AB, $c\,d$ sera moitié, tiers, etc. de CD ; mais (**345**) les surfaces de triangles quelconques sont entre elles comme les produits des bases et hauteurs, et ces bases et hauteurs sont (**59**) entre elles comme les nombres respectifs d'unités de mesure (**24**) qu'elles contiennent, ou, ce qui (**75 Ax.**) est clair, comme tous autres nombres proportionnels à ces bases et hauteurs ; donc aussi (**75**), d'après l'hypothèse qu'on vient de faire, les surfaces des triangles ABC, $a\,b\,c$ sont entre elles comme $1\times1 : 2\times2 : 3\times3$: etc., ou comme $1\times1 : \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} : \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$: etc., c-à-dire, comme $1^2 : 2^2 : 3^2$ ou comme $1^2 : (\frac{1}{2})^2 : (\frac{1}{3})^2$: etc. ; or ces rapports sont entre eux (**215**) comme $1 : 4 : 9$: etc., ou comme $1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9}$: etc. ; c-à-d., comme les carrés des nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, etc., ou des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. ; c-à-d., enfin, comme les carrés des nombres exprimant les rapports entre les côtés ou autres lignes homologues des figs. dont il s'agit ; ou ce qui (**59**) revient au même, comme les carrés de ces côtés et lignes homologues.

(554) **Cor. 1. Les figures rectilignes semblables quelconques** AD, ad, c-à-d., leurs surfaces, **sont entre elles comme les carrés de leurs côtés ou autres lignes homologues.**

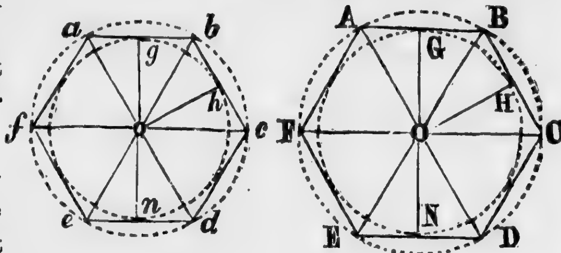


Puisque (**548**) dans les figs. semblables, toutes lignes homologues sont proportionnelles; quelque soit le rapport de la base be et de la hauteur af du triangle abe à celles BE, AF du triangle correspondant ABE, la base bd et hauteur cg de toute autre partie bcd de la première fig. auront le même rapport aux facteurs de la partie correspondante BCD de la seconde. Quelque soit donc le rapport entre les surfaces des triangles abe, ABE, le même rapport existera entre celles des triangles bcd, BCD, et entre celles des triangles bde, BDE et l'on aura $abe : \mathrm{ABE} :: bde : \mathrm{BDE} :: bcd : \mathrm{BCD}$; mais (**102**) si l'on a un nombre indéfini de quantités proportionnelles, l'un quelconque des antécédents est à son conséquent comme la somme de tous les antécédents à la somme de tous les conséquents; donc, $abe : \mathrm{ABE} :: abe + bde + bcd : \mathrm{ABE} + \mathrm{BDE} + \mathrm{BCD}$; c-à-d., $abe : \mathrm{ABE} :: ad : \mathrm{AD}$; or, l'on vient de voir (**552**) que $abe : \mathrm{ABE} :: ab^2 : \mathrm{AB}^2 :: be^2 : \mathrm{BE}^2 :: af^2 : \mathrm{AF}^2 ::$ etc., et (**75 Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux; donc enfin, $ad : \mathrm{AD} :: ab^2 : \mathrm{AB}^2 :: be^2 : \mathrm{BE}^2 :: af^2 : \mathrm{AF}^2 ::$ etc.; donc, etc.

(555) **Sco. 1. Les polygones réguliers quelconques** (voyez la fig. sur la page suivante) AEC, aec **d'un même nombre de côtés, sont des figures semblables.**

En effet, si l'on bissecte les angles égaux (**175**) A, B, C, etc., du pol. AEC; les bissectrices des angles A, B se rencontreront en O et formeront le triangle AOB qui sera

isocèle, à cause des angles égaux ABO, BAO qui par constr. sont moitiés des angles égaux A, B du pol. La bissectrice de l'angle C ne pouvant tomber ailleurs qu'en O, puisque BO est déjà donnée en longueur et en position, formera avec BO le triangle isocèle BOC en tout égal à celui AOB. Il est clair aussi (**238**) que l'on aura de même COD=BOC=AOB= etc. ; donc tous les triangles AOB, BOC, etc., qui composent le pol. AEC sont égaux et par conséquent (**210**) semblables. La même constr. ferait



voir que tous les triangles *a o b*, *b o c*, etc., qui composent le pol. *a e c* sont aussi égaux entre enx et par conséquent semblables ; or, les pols. AEC, *a e c* ont chacun un même nombre d'angles égaux A, B, C, etc., *a*, *b*, *c*, etc., et chacun des angles *a*, *b*, *c*, vaut (**264**) la même partie de deux angles droits que les angles A, B, C ; donc, l'angle A=*a*, B=*b*, C=*c*, etc., et par conséquent l'angle *o a b*, moitié de *a*=OAB, moitié de A=OBA, moitié de B=*o b a* moitié de *b*. Donc, le triangle *a o b* est équiangle et par conséquent semblable au triangle AOB ; donc aussi, tous les triangles *a o b*, *b o c*, etc., qui sont égaux et semblables entre eux, sont équiangles et semblables à ceux AOB, BOC, etc. ; donc, les pols. AEC, *a e c* sont semblables, étant composés d'un même nombre de triangles semblables, situés d'une manière correspondante dans chaque fig. ; ce qui s'accorde avec la définition que nous en avons donnée au par. (**207**).

2° Puisque la constr. qu'on vient de faire, donne AO=BO=CO= etc. ; il est clair (**185**) que O est le centre (**175**) du pol. et qu'un cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon AO ou BO, etc., passera par tous les points angu-



laires A, B, C, etc,, du pol. et sera (**195**) circonscrit au pol. **Le rayon oblique** (**175**) AO ou BO, etc., **du polygone est** donc **en même temps celui du cercle circonscrit.**

3° Puisque les triangles AOB, BOC, etc., sont égaux en toutes choses et par conséquent (**210**) semblables, et que (**521**) les hauteurs et bases des triangles semblables sont proportionnelles ; il est clair que les hauteurs ou (**179**) les perpendiculaires OG, OH, etc. seront aussi égales ; donc, un cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à OG, OH, etc. touchera tous les côtés du pol. et sera (**198**) inscrit dans le pol. ; car, (**468**) une ligne droite perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence. **Le rayon droit** (**175**) OG, OH, etc. **du polygone est** donc **en même temps celui du cercle inscrit.**

Il est à peine necessaire d'ajouter que ce que l'on vient de dire (2° et 3°) du pol. AEC s'applique également au pol. *a e c*.

4° Il suit évidemment de ce que l'on a dit au par. (**521**) que **dans les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les rayons droits et obliques sont des lignes homologues et par conséquent proportionnelles entre elles et aux côtés des polygones**; de sorte que l'on aura AB : *a b* :: OB : *o b* :: OG : *o g* :: etc.

5° De plus (**73. Ax.**) les doubles ou les touts sont comme les moitiés, et le **double du rayon oblique du polygone est** égal (188 et 189) **au diamètre du cercle circonscrit** ; et **le double du rayon droit du polygone est égal au diamètre du cercle inscrit** ; donc aussi, **dans les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les côtés sont entre eux comme les diamètres des cercles inscrits et circonscrits, c'est-à-dire proportionnels à ces diamètres.**

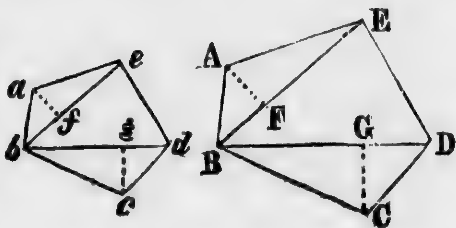
(556) Cor. 2. **Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, c'est-à-dire** (555) **semblables, sont** (**554**) **entre eux comme les carrés des côtés, des rayons droits et obliques, des rayons et diamètres des cercles inscrits et circonscrits, ou de toutes autres lignes homologues que l'on pourrait mener dans ces figures**; c-à-d., les surfaces des polygones AEC, *a e c*, sont entre elles comme

$AB^2 : ab^2 :: OG^2 : og^2 :: OB^2 : ob^2 :: EB^2$ (ou $\overline{EO+OB}^2$) : eb^2 (ou $\overline{eo+ob}^2$) :: NG^2 (ou $\overline{NO+OG}^2$) : ng^2 (ou $\overline{no+og}^2$) :: etc.

(557) Cor. 3. Les cercles sont évidemment des figures semblables, pouvant être considérés (**430**) comme des polygones d'un même nombre de côtés assez petits pour qu'on puisse les regarder comme étant sensiblement des lignes droites ; et d'après les définitions que nous en avons données, les secteurs et segments qui sous-tendent des angles égaux au centre des cercles dont ils font partie, sont aussi des figures semblables. L'on désignerait aussi, zones et lunules semblables, celles dont les arcs concaves et convexes sous-tenderaient, au centre des cercles dont ces arcs font partie, des angles égaux ; or, dans tous ces cas, les circonférences entières ou arcs de cercle pouvant être considérés comme composés de parties de lignes droites, ces figs. peuvent être regardées comme autant de polygones rectilignes, et en cela sujettes au même raisonnement que celui que nous venons d'appliquer aux figs. rectilignes ; donc, **les cercles et les secteurs, segments, zones et lunules semblables, sont entre eux comme les carrés des diamètres, rayons, cordes ou autres lignes homologues de ces figures.**

(**558**) **Cor. 4.** Donc en général, **les figures planes semblables quelconques, soit rectilignes, curvilignes ou mixtilignes, sont entre elles comme les carrés de leurs côtés ou autres lignes homologues** ; car, toute figure, autre que celles déjà énumerées dans les défs. pouvant se décomposer en éléments rectilignes ou curvilignes de la nature de ceux dont on a jusqu'ici traité en détail, serait sujette au même raisonnement.

(**559**) **Cor. 5.** Il est clair aussi que **les périmètres de toutes figures planes semblables quelconques, rectilignes, curvili-**



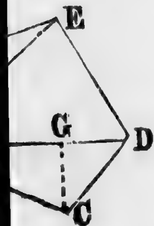
gnes ou mixtilignes, sont entre eux comme les côtés ou autres lignes homologues de ces figures.

Car, dans les figs. semblables, les côtés homologues sont proportionnels, et quelque soit le rapport entre deux quelconques des côtés homologues ; ce même rapport existera entre tous les autres côtés correspondants ou autres lignes homologues des ces figs. Si donc le côté $a\,b$, par exemple, est moitié, tiers, double, triple ou tout autre multiple ou sous-multiple de AB ; chaque autre côté de la première fig. sera le même multiple ou sous-multiple du côté correspondant de la seconde, et puisque (**102**) la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent à son conséquent ; il est évident qu'on aura le périmètre $a\,b\,c\,d\,e$ au périmètre ABCDE comme un côté quelconque $a\,b$ ou autre ligne homologue du premier au côté AB ou ligne homologue correspondante du second ; donc, etc.

(**560**) Cor. 6. **La figure plane, quelconque, décrite sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle ; est équivalente à la somme des figures, semblables entre elles et à la première, décrites sur les deux autres côtés du triangle.**

Car (**558**) les trois figures sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues ; c-à-d., aux carrés mêmes décrits sur les côtés du triangle, qui, d'après l'hyp., servent en même temps de côtés homologues aux figs. semblables dessus décrites ; or, le carré de l'hypoténuse équivaut à la somme des carrés décrits sur les deux autres côtés ; donc, etc.

(**561**) Cor. 7. **Si quatre lignes droites sont proportionnelles ; les figures semblables dessus construites seront proportionnelles : et si les figures décrites sur quatre lignes sont semblables et proportionnelles ; ces lignes seront proportionnelles ;** car, par hyp., ces lignes serviront de côtés homologues aux figs. dessus construites, et les figures semblables sont comme les carrés de leurs côtés homologues ; mais si les carrés de quatre quantités sont



proportionnels, les quantités elles-mêmes le seront, puisque si A : B :: C : D, l'on aura (**104**) $A^2 : B^2 : C^2 : D^2$, et que réciproquement, si $A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$, l'on aura A : B :: C : D.

(**562**) **En second lieu**, si les figures sont semblables et proportionnelles, elles seront entre elles comme les carrés des lignes sur lesquelles elles sont décrites. Ces carrés seront donc aussi proportionnels et les lignes elles-mêmes le seront, puisque si $A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$, l'on a (**104**) A : B :: C : D ; donc, etc.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que les quatre figs. soient semblables entre elles, mais seulement que chaque antécédent soit semblable à son conséquent.

(563) Cor. 8. Si trois lignes droites sont proportionnelles ; la première est à la troisième comme une figure quelconque décrite sur la première est à la figure semblable décrite sur la seconde.

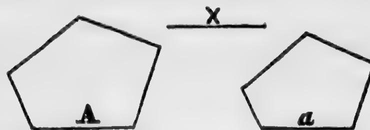
Soient A, B, C les trois lignes, telles que A : B :: B : C, et soient 2, 4, 8 les représentants numériques de A, B, C ; l'on aura 2 : 4 :: 4 : 8 ; or, les figs. semblables sont (**558**) entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues ; ce qui nous permettra de représenter par A^2 et B^2 les figs. décrites sur les lignes A et B. L'on doit donc avoir d'après l'énoncé du Cor., $A : C :: A^2 : B^2$ ou $2 : 8 :: 2^2 : 4^2$; mais $2^2=4$ et $4^2=16$ et 2 : 8 :: 4 : 16. En supposant à A, B, C toutes autres valeurs numériques proportionnelles quelconques, l'on prouverait de même $A : C :: A^2 : B^2$; donc, etc.

(564) Sco. 2. Prob. De là, pour **trouver le rapport des carrés ou autres figures semblables décrites sur deux lignes données** A, B ; il n'y a qu'à chercher (**517**) une troisième proportionnelle à ces deux lignes, telle que A sont à B comme B est à X ; vous aurez alors $A.X=B^2$, ou en multipliant de part et d'autre par A, $A^2.X=A.B^2$; d'où (**88**) $A^2 : B^2 :: A : X$.

(565) Sco. 3. Prob. Trouver deux lignes ayant entre

elles le même rapport que celui entre deux rectangles contenus par des lignes données.

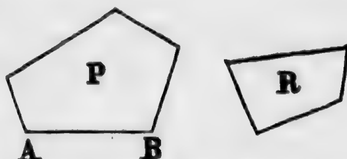
Soient A, B et C, D les côtés des rectangles ; ce qui donnera A.B et C.D. Aux trois lignes B, C, D, trouvez (**516**) une quatrième proportionnelle X, et le rapport de la ligne A à la ligne X sera le même que celui entre les rectangles donnés ; c-à-d. que l'on aura A : X :: A.B : C.D ; car, puisque par constr. B : C :: D : X, il suit (**86**) que C.D=B.X ; et (**82. Ax.**) les quantités égales ont à la même quantité le même rapport ; donc A.B : C.D :: A.B : B.X ; mais (**73. Ax.**) A.B : B.X :: A : X ; donc aussi (**75. Ax.**) A.B : C.D :: A : X.



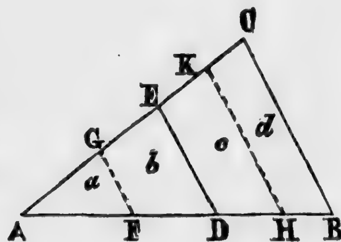
(**566**) **Sco. 4. Prob.** Si l'on avait à **décrire une figure** qui fût en même temps **semblable à deux autres figures semblables et équivalente à leur somme ou différence** ; il n'y aurait qu'a chercher (**306**) le côté X d'un carré équivalent à la somme ou (**309**) à la différence des carrés décrits sur deux quelconques A, *a* des côtés homologues des figs. données, et sur ce côté décrire, par la méthode du par. (**551**), une fig. semblable aux figs. données ; car les figures semblables sont comme les carrés de leurs côtés homologues ; et le carré de X étant équivalent à la somme ou différence des carrés décrits sur les côtés homologues A, *a* ; il s'en suit que la fig. décrite sur X sera équivalente à la somme ou différence des figures données décrites sur les côtés A, *a*.

(**567**) **Sco. 5. Prob.** Si l'on demandait à **décrire une figure B semblable à une figure rectiligne donnée A et ayant à cette figure un rapport donnée** M : N ; il est clair, d'après ce qui précède, qu'il faudrait trouver le côté homologue de B, tel que le carré de ce côté fût à celui du côté correspondant de la fig. donnée comme M à N ; ce qui se ferait par la méthode du par. (**538**). L'on décrirait alors par le méthode du par. (**551**), sur le côté ainsi trouvé, la fig. demandée B semblable à la fig. donné A.

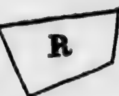
(568) Sco. 6. Prob. Décrire une figure semblable à une figure rectiligne quelconque P et équivalente à une figure donnée R. A cette fin, il faut d'abord trouver (376) M égale au côté d'un carré équivalent à la fig. P, et N égale au côté d'un carré équivalent à la fig. R, et faire M : N :: AB : X ; c-à-d., trouver (516) une quatrième proportionnelle X aux trois lignes M, N et AB. Décrivant alors sur le côté X, homologue à AB, une fig. semblable à P ; cette fig. sera aussi équivalente à la fig. R ; car, soit Y la fig. décrite sur le côté X, l'on aura (558) $P : Y :: AB^2 : X^2$, et par constr. AB : X :: M : N, ou (104) $AB^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; donc (75. **Ax.**) $P : Y :: M^2 : N^2$. Mais, par constr. l'on a aussi $M^2 = P$ et $N^2 = R$; donc P : Y :: P : R ; donc (72) Y=R ; donc la fig. Y est semblable à P et égale en surface à R.

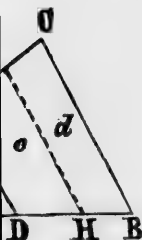


(569) Sco. 7. Prob. Partager un triangle donné ABC en deux parties ADE, DC, par une ligne DE parallèle à l'un BC de ses côtés, et de manière que ces parties soient entre elles comme deux lignes données N, R.



Puisque la ligne DE doit être parallèle à BC, les triangles ADE, ABC seront semblables et donneront (552) ADE : ABC : $AD^2 : AB^2$; mais il faut que ADE soit à DC :: N : R, ou, ce qui (97. **Cor. 2.**) est la même chose, que ADE soit a ADE+DC ou à ABC :: N : N+R ; et (75. **Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux ; donc il est nécessaire que l'on ait $AD^2 : AB^2 :: N : N+R$; or le par. (538) offre le moyen de trouver un carré AD^2 qui soit à un carré donné AB^2 comme une ligne donnée N à





une ligne donné N+R. Faisant alors AD= au côté du carré AD^2 et menant DE parallèle à BC; l'on aura ADE : DC :: N : R.

2° **Prob. Diviser un triangle donné ABC en un nombre quelconque de parties** *a*, *b*, *c*, etc. **égales, ou ayant entre elles des rapports donnés, par des lignes** FG, DE, HK, etc. **parallèles entre elles et à l'un** BC, **des côtés du triangle,** n'offrirait pas plus de difficulté que la division en deux parties. En effet, soient M, N, R etc. les lignes indiquant les rapports à observer entre les parties *a*, *b*, *c*, etc. du triangle donné ; il nous faut avoir AF^2 à AB^2 :: M :(M+N+R+ etc.), ce qui se fera, comme dans le dernier cas, par la méthode du par. (**538**). Portant alors sur AB, une longueur AF égale au côté de AF^2 et menant FG parallèle à BC, on aura la partie *a* du triangle dans le rapport voulu. Maintenant, pour obtenir FD, l'on fera (**538**) (M+N+R+etc.) : AB^2 :: (M+N) : AD^2 et AD—AF=FD. L'on procédera de même à trouver DH en faisant (**538**) (M+N+R+etc.) : AB^2 :: (M+N+R) : AH^2, et AH—AD donnera DH ; et ainsi de suite, quelque soit le nombre des divisions à faire ; le premier terme (M+N+R+etc.) restant invariable et étant composé comme on le voit de la somme des lignes indiquant les rapports voulus entre les surfaces *a*, *b*, *c*, etc. ; tandis que le troisième terme varie d'une de ces lignes, soit en plus ou en moins, suivant que l'on poursuit l'opération de gauche à droite ou de droite à gauche.

(570) Sco. 8. Si dans le problème du paragraphe (566) on connaissait le nombre d'unités de mesure dans les côtés homologues A, *a*, il est clair que **pour trouver le nombre d'unités de mesure dans la ligne** X, il n'y aurait qu'à extraire la racine carrée de la somme ou différence des carrés des nombres d'unités contenues dans A et *a* et procéder ensuite de la manière indiquée.

2° Dans **le problème du paragraphe** (**567**), soient *b* et *a* les côtés homologues. Le côté cherché *b* devant être tel

que b^2 soit à $a2$ :: M : N ; il est clair que l'on trouverait **arithmétiquement** $b^2 = \frac{a^2 \times M}{N}$ et $b = \sqrt{b^2}$ en carrant le nombre d'unités de mesure dans le côté d, puis multipliant ce carré par le nombre M ou par le nombre d'unités de mesure dans la ligne M, divisant le produit par N et extrayant la racine carrée du quotient.

(571) **Sco. 9. Dans le problème du paragraphe** (568) **l'opération arithmétique aurait sur l'opération géométrique un avantage très marqué**; car, supposant que R fût semblable à P et que X fût son côté homologue à AB, l'on aurait P : R :: AB^2 : X^2 ; puisque les figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues; d'où $X^2 = \frac{R \times AB^2}{P}$ et $X = \sqrt{X^2}$; c-à-d. que pour trouver le côté homologue X de la fig. cherchée, il faudrait multiplier le nombre d'unités de mesure dans la surface R par le carré du nombre d'unités dans AB, et après avoir divisé ce produit par le nombre d'unités dans la surface P, extaire la racine carré du quotient; tandis que par construction, il y aurait en réalité cinq problèmes à résoudre ; savoir : trouver un carré équivalent à la surfarce P, opération composée (370) de deux problèmes secondaires; puis, trouver un carré équivalent à la surface R, opération encore composée de deux problèmes secondaires; enfin, trouver (**516**) une quatrième proportionnelle à trois lignes.

2° Puisque (**552**) les surfaces des triangles semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, ce qui **dans le problème du paragraphe** (**569**) donne ABC : ADE :: AB^2 : AD^2 ; il est clair que **si les données** de ce prob. **étant numériques**, il n'y aurait d'abord qu'à diviser le nombre d'unités de mesure, dans la surface du triangle ABC en parties ayant l'une à l'autre le rapport voulu. Faisant alors ABC : ADE : AB^2 : AD^2 et extrayant la racine carrée de AD^2, on obtiendrait le nombre d'unités de mesure linéaires dans AD, et par là même le point D, par le quel menant DE parallèle à BC, le problème serait résolu.

LEMME.

Rem. Dans les problèmes précédents, comme dans ceux qui vont suivre, il peut arriver, suivant que l'ont veut faire une construction purement géométrique ou obtenir une solution numérique, que l'on ait à traduire les données pour les rendre propres aux opérations auxquelles on désire les soumettre.

1° **Prob.** **Les termes d'un rapport quelconque M : N,** par exemple, **étant numériques,** soit 3 : 5, si l'on désirait **remplacer ces nombres par des lignes ayant entre elles le même rapport** ; il n'y aurait qu'à prendre sur une ligne droite indéfinie, des longueurs respectivement égales à 3, 5 unités de mesure linéaires quelconques ; ce qui donnerait deux lignes dans le rapport voulu.

2° **Prob.** Mais s'il s'agissait au contraire de **trouver le rapport numérique existant entre deux lignes données** ; il y aurait à **obtenir** d'abord **la commune mesure ou le plus grand commun diviseur de ces deux lignes** ; ce qui se ferait évidemment d'une manière analogue au procédé arithmétique ; c-à-d., en divisant la plus grande des deux lignes par la plus petite, et si cette dernière était contenue un nombre exact de fois dans la première, on aurait de suite le rapport voulu de 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5, 1 : etc., suivant le cas. Mais si la première division laissait un reste, il y aurait encore à diviser par ce reste, la plus petite des deux lignes ; et si cette seconde division laissait un nouveau reste, on continuerait l'opération, en divisant toujours l'avant dernier par le dernier reste ; jusqu'à obtenir enfin un reste qui divisât exactement ou qui fût contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent. Ce dernier reste serait le commun diviseur cherché.

Portant alors sur chacune des deux lignes la commune mesure ainsi trouvée, le rapport entre ces lignes serait indiqué par le nombre de fois que chaque ligne contiendrait cette

unité. Par exemple, soient AB, *a b*, les lignes données. Supposons que AB contienne 2 fois *a b* avec un reste A *c*, et soit A *c* contenu 2 fois en *a b* avec un second reste *d b*; soit enfin *d b* contenu un nombre exact de fois en A *c*; *d b* est la commune mesure cherchee. Portant maintenant sur AB et *a b* l'unité de mesure *d b*, l'on trouvera qu'elle est contenue 12 fois dans la première de ces lignes et 5 fois dans la seconde; ce qui d'ailleurs se voit de suite, en faisant attention au nombre de divisions qu'il a fallu faire pour arriver au résultat désiré.

3° **Si les lignes données étaient incommensurables (50)**, c-à-d. telles que l'on ne pût jamais arrivier à un reste capable de diviser exactement le reste précédent; l'on se contenterait nécessairement d'un rapport approximatif, et ce dernier pourrait toujours être trouvé tel qu'il différât du rapport exact d'une quantité plus petite qu'aucune quantité assignable; car, si petite que fût cette dernière, il est évident qu'en continuant toujours à diviser par le dernier reste, le reste précédent, l'on obtiendrait enfin une unité linéaire plus petite que la moindre qu'il soit possible de concevoir.

4° **Prob.** Si l'on avait à **trouver le rapport numérique entre trois, quatre, cinq ou un nombre quelconque de lignes données**; l'on procéderait d'abord à trouver la commune mesure des deux premières, de la manière que l'on vient d'indiquer; puis à trouver le plus grand commun diviseur de cette commune mesure et de la troisième ligne donnée; enfin l'on chercherait l'unité de mesure capable de diviser exactement le commun diviseur en dernier lieu trouvé et la quatrième ligne; et ainsi de suite, prenant successivement pour diviseur la dernière unité ou commune mesure trouvée et pour dividende la ligne suivante.

5° **Prob.** S'il s'agissait de **trouver le rapport numérique**

entre deux figures rectilignes quelconques; il est clair que les nombres mêmes d'unités de mesure égales contenues dans leurs surfaces respectives, si on les connaissait, indiqueraient de suite leur rapport numérique. Autrement, il y aurait à reduire (**291** et **292**) ces figures en rectangles équivalents, pour trouver ensuite, par la méthode du par. (**565**), deux lignes ayant entre elles le rapport de ces rectangles; et enfin (2°) le rapport numérique entre ces lignes.

6° **Prob. Trouver trois lignes ayant entre elles le même rapport que celui entre trois figures rectilignes quelconques.** Il y aurait d'abord à réduire (**293**) ces figures en autant de rectangles équivalents, puis à trouver (**565**) deux lignes ayant entre elles le même rapport que celui existant entre deux des rectangles donnés. Soit $a.b$ le premier rectangle $=$A, $c.d$ le second rectangle $=$B, $e.f$ le troisième rectangle $=$C. L'on aura de cette manière $a.b : c.d :: a : x$ ou $A : B :: a : x$. Maintenant, a, x étant deux lignes ayant entre elles le rapport voulu de A à B, il est clair que pour trouver une troisième ligne y qui soit à x dans le rapport voulu de C à B, il faudrait que x fût un des côtés du rectangle B, de même que a était un des côtés du rectangle A; or, il n'y aura pour cela qu'à faire, par la méthode du par. (**300**), un nouveau rectangle égal en surface ou équivalent à B, et ayant un côté égal à la ligne x. Soit X ce nouveau rectangle et x, s, ses côtés; l'on obtiendra $x.s : e.f :: x : y$ ou $X : C :: x : y$.

7° **S'il y avait plus que trois figures auxquelles il fallût trouver des lignes proportionnelles**; il est évident que l'on procéderait d'une manière analogue, après les avoir remplacées par des rectangles équivalents, à réduire le rectangle C en un rectangle équivalent Y ayant un de ses côtés égal à la ligne y. L'on chercherait alors une quatrième ligne z, pour réduire ensuite le rectangle suivant D en un rectangle équivalent Z, ayant un côté égal à la ligne z; et ainsi de suite juisqu'au dernier.

8° **Rem. Observons de combien toutes ces opérations, auxquelles la rigueur géométrique nous force de donner tant d'extension, seraient simplifiées par l'usage d'une échelle divisée en un nombre suffisant de partiés égales ;** et l'on a indiqué au par. (**513**) le moyen d'opérer cette division de la ligne droite. Soit par exemple une échelle de pouces subdivisés en lignes et fractions de lignes ; il n'y aurait qu'à appliquer cette échelle à deux ligues droites données, pour déterminer de suite le nombre de pouces, lignes, etc. contenus par chacune d'elles, et de là le rapport existant entre leurs longueurs respectives ; c-à-d., le rapport des nombres d'unités de mesure contenues par ces lignes.

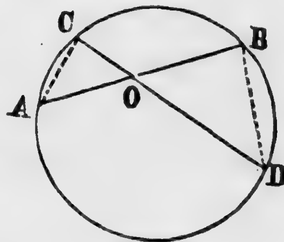
Si les lignes données étaient incommensurables, l'on obtiendrait encore (**51**) toute l'exactitude voulue par une subdivision continue de l'échelle en parties de plus en plus petites, et cela de manière à arriver enfin au résultat désiré à un centième, millième, dix-millième, ou à toute autre fraction ou décimale près, de l'unité prise pour mesure.

9° **Prob.** Rien de plus facile aussi, **au moyen d'une échelle** de cette sorte, que de **trouver le rapport entre deux ou plusieurs figures rectilignes quelconques ;** soit en les réduisant d'abord (**292**) en triangles équivalents, ou (**293**) en rectangles équivalents ; ou en les traitant directement de la manière indiquée au par. (**352**) ; c-à-d·, en mesurant leurs bases et hauteurs respectives avec une même unité de mesure, pour obtenir (**333**) leurs surfaces absolues (**334**) ou relatives (**336**) et de là le rapport numérique entre elles.

10° **Prob.** Enfin, pour ce qui est des **cercles, secteurs, segments, zones, lunules et autres figures planes, curvilignes ou mixtilignes ;** comme toutes ces figures peuvent se décomposer en triangles, si petits qu'il faille prendre ces triangles pour que chaque partie de la courbe devienne sensiblement une ligne droite ; il suffit de ce que l'on a déjà dit (**437**) pour faire comprendre de suite la manière de traiter ces figures afin d'en **déduire les surfaces relatives ou absolues et de là le rapport entre elles.**

PROP. LV. THÉOR.

(572) **Les segments de deux cordes** AB, CD **qui se coupent dans un cercle, sont réciproquement proportionnels ; c'est-à-dire** AO : DO :: CO : BO.

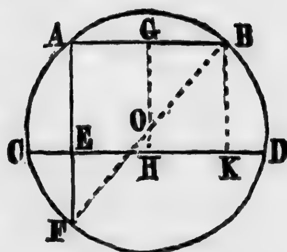


Ayant mené CA, BD ; dans les triangles AOC, BOD les angles en O sont égaux, parce qu'ils sont (**137**) opposés au sommet ; l'angle A est (**449**) égal à l'angle D, parce qu'ils sont tous deux à la circonférence et appuyés sur le même arc BC ; par la même raison l'angle C=B ; les triangles sont donc équiangles et semblables, et les côtés homologues donnent AO : DO :: CO : BO.

Cette conclusion est la même que celle déjà obtenue, d'une manière toute différente, au par. (**502**), et peut-être considérée dans ce cas comme plus legitime, pour ainsi dire, que dans l'autre cas ; puisqu'elle dépend de la propriété plus générale qu'ont les triangles équiangles d'avoir leurs côtés homologues proportionnels.

(573) **Cor. Si quatre lignes droites** AO, DO, CO, BO **sont proportionnelles ; le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyens ;** car si AO : DO :: CO : BO, l'on a (**86**) AO.BO=DO.CO ; **et si le rectangle contenu par deux lignes est égal au rectangle contenu par deux autres lignes, ces lignes seront proportionnelles ;** c-à-d., les deux côtés d'un des rectangles seront les extrêmes d'une proportion dont les deux de l'autre seront les moyens ; puisque si AO.BO=DO.CO l'on aura (**88**) AO : DO :: CO : BO.

(574) Sco. Prob. Trouver le rayon OB d'un cercle dont fait partie une zone quelconque AD, les seules données étant les deux cordes limitatives AB, CD et la distance AE entre ces cordes ou la largueur de la zone.



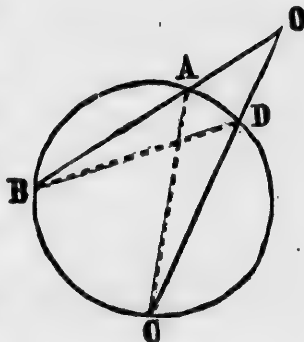
Les cordes AB, CD étant (**202**) parallèles, si l'on suppose BK parallèle à AE, l'on aura (parallèles entre parallèles) EK=AB ; et parceque (**408**) GH menée par le centre O du cercle, perpendiculaire aux cordes AB, CD, bissecte ces cordes, l'on aura AG=GB et CH=HD ; de plus, GH, AE, BK étant parallèles, l'on a EH=AG=GB=HK; d'où il suit que CH—EH=HD—HK=KD=EC ; donc EC est égale à la demi-différence entre les cordes parallèles AB, CD. Prolongeant AE jusqu'en F, AF devient une corde et CD, AF sont deux cordes quelconques qui se coupent dans un cercle. Or, par cette prop. l'on a AE : ED :: EC : EF; d'où (**90**) $EF=\frac{ED \times EC}{AE}$. En d'autres termes, EF est une quatrième proportionnelle aux trois lignes AE, ED, EC et peut se trouver géométriquement par la méthode du par. (**516**). Maintenant parceque (**142**) l'angle BAF est droit, la ligne FB est (**444** 2°) un diamètre et passe par le centre O du cercle, et puisque BAF est un triangle rectangle, l'on a (**305**) $FB^2=AB^2+AF^2$; d'où $FB=\sqrt{AB^2+AF^2}$, et OB le rayon cherché $=\frac{1}{2}$ FB. L'on obtiendrait (**306**) FB, par construction géométrique, égale au côté d'un carré équivalent à la somme des carrés sur AB et AF, et $OB=\frac{FB}{2}$.

PROP. LVI. THÉOR.

(575) Si d'un même point O hors d'un cercle, l'on mène deux sécantes OB, OC, à la circonférence con-

cave BC; **les sécantes entières seront réciproquement proportionnelles à leurs segments extérieurs** OA, OD ; c-à-d., l'on aura OB : OC :: OD : OA.

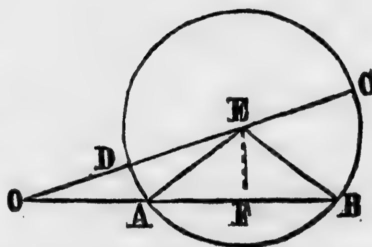
Menant AC, BD, les triangles ODB, OAC ont l'angle O commun. Les angles B et C appuyés sur le même arc AD sont (**449**) égaux et par suite (**260**) les angles restants sont aussi égaux ; donc, ces triangles sont semblables et l'on a (**520**) OB : OC :: OD : OA.



(**576**) **Cor. 1.** De là, le rectangle OA.OB est égal au rectangle OD.OC ; conclusion à laquelle on est déjà arrivé par la méthode du par. (**503**).

(**577**) **Sco. 1.** Observons l'analogie entre cette prop. et la dernière ; la seule différence étant que dans ce cas les deux cordes AB, AD se coupent en dehors du cercle au lieu de se couper en dedans. L'on peut aussi regarder la prop. suivante (**579**) comme un cas particulier de celle que l'on vient de démontrer.

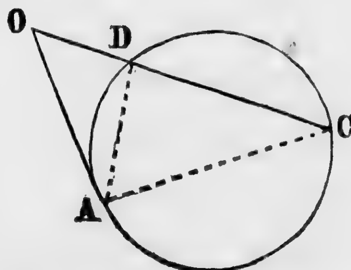
(**578**) **Cor. 2.** Soit OEB un triangle quelconque et EF la perpendiculaire menée du sommet E du plus grand angle à la base OB et partageant cette base en deux segments OF, BF. Si au point E comme centre, avec un rayon égal au plus petit EB des deux autres côtés OE, EB du triangle, l'on décrit un cercle DCB, et si l'on prolonge OE puisqu'en C, l'on aura OC=OE+EB, à cause des rayons égaux EC, EB ; c-à-d., OC sera égale à la somme des côtés OE,EB et OD



sera égale à la différence entre ces côtés, à cause des rayons égaux ED, EB. Il est clair aussi que OA sera égale à la différence entre les segments OF, BF de la base OB, à cause de AF=BF, la corde AB étant (408) bissectée en F par la perpendiculaire EF menée du centre. Cela posé, et voyant que OB, OC sont en même temps deux sécantes menées à un cercle, d'un point O situé hors de ce cercle; on aura, par la prop., OB : OC :: OD : OA; c-à-d.: **dans un triangle quelconque OEB, le plus grand côté** ou base OB **est à la somme** OE+EB (ou OC) **des deux autres côtés, comme la différence** OE−EB (ou OD) **entre ces côtés est à la différence** OF—FB (ou OA) **des segments de la base** formés par la perpendiculaire EF abaissée du sommet de l'angle apposé E sur cette base.

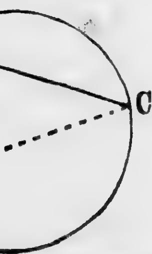
PROP. LVII. THÉOR.

(579) **Si du même point O endehors d'un cercle, l'on mène une tangente** OA **et une secante** OC; **la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière** OC **et son segment extérieur** OD; c-à-d., l'on aura OC : OA :: OA : OD.



Car, joignant AD, AC, les triangles OAD, OAC ont l'angle O commun. L'angle OAD formé par une tangente OA et une corde AD a pour mesure (486) la moitié de l'arc DA sous-tendu par la corde, et l'angle C à la circonférence appuyé sur l'arc DA a aussi pour mesure (442) la moitié de cet arc; d'où, l'angle OAD=C. Les triangles OAD, OAC sont donc (260) équiangles et semblables, et donnent OC : OA :: OA : OD; d'où (87) OA^2=OC. OD.

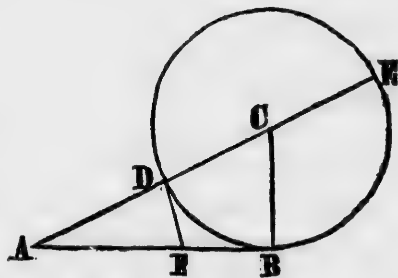
(580) **Cor. Si trois lignes droites** OC, OA, OD **sont**



proportionnelles, le rectangle contenu par les extrêmes est égal au carré du moyen, puisque le rapport OC : OA :: OA : OD donne (87) $OC.OD = OA^2$; **et si le rectangle contenu par deux lignes est égal au carré d'une autre ligne, ces trois lignes sont proportionnelles;** car, lorsque $OC.OD = OA^2$, il en resulte (89) OC : OA :: OA : OD.

(581) **Sco. 1. Prob.** Puisque la tangente OA est égale au côté d'un carré équivalent au rectangle OC.OD ; il est clair que cette prop. fournit un nouveau (488) moyen de **mener à un cercle une tangente OA d'un point donné O hors du cercle.**

A cet effet, menez du point donné O une sécante quelconque OC ; trouvez (376) OA égale au côté d'un carré équivalent au rectangle OC.OD et du point O comme centre avec un rayon OA, coupez le cercle en A qui sera le point de contact de la tangente cherchée. Joignez alors OA et vous aurez la tangente requise.



(582) **Sco. 2. Prob. Diviser une ligne donnée AB en deux parties AF, FB, telles que la plus grande AF soit moyenne porportionnelle entre la ligne entière AB et l'autre partie FB**: c-à-d., de manière que l'on ait AB : AF :: AF : FB.

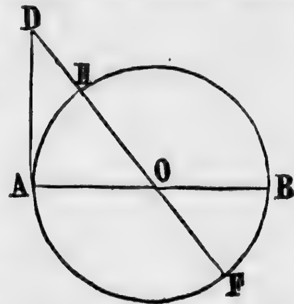
Au point B menez BC perpendiculaire et égale à la moitié de AB ; du point C comme centre, avec le rayon BC décrivez le cercle DBE ; joignez AC, coupant la circonférence en D et faites AF=AD ; la ligne AB sera alors divisée au point F de la manière requise ; car, AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon BC est (468) une tangente et AC prolongée jusqu'en E est une sécante ; ce qui, par la prop. donne AE : AB :: AB : AD et (96) par

division AE—AB : AB :: AB—AD : AD. Mais, puisque par constr. le rayon CB est moitié de AB, le diamètre DE est égal à AB et en conséquence AE—AB=AE—DE=AD=AF ; et puisque AD=AF, l'on a AB—AD=AB—AF=FB ; de là, AF : AB :: FB : AD (ou AF) et (93), mettant les extrêmes à la place des moyens, AB : AF :: AF : FB.

(583) **Sco. 3**. Cette espèce de division de la ligne AB est appelée **division en moyenne et extrême raison**. On en verra l'utilité dans la suite (**640**) de ce traité. L'on peut aussi remarquer que la sécante AE est divisée en moyenne et extrême raison au point D ; car AB étant =DE, l'on a AE : DE :: DE : AD.

2° Puisque par la prop., l'on a AB : AF :: AF : FB ou AB.FB=AF^2 il est clair que **le dernier problème équivaut à celui du paragraphe (381) où l'on demandait à diviser une ligne de manière que le rectangle de la ligne entière et de l'une des parties fût égal au carré de l'autre partie.**

(584) **Sco. 4. Prob. Faire un rectangle équivalent à un carré donné C et ayant la différence entre ses côtés adjacents égale à une ligne donnée AB.**

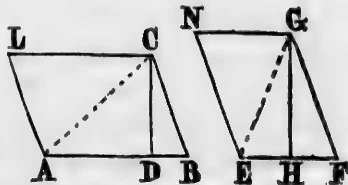


Autour de AB comme diamètre, décrivez le cercle AEF et (**468**) menez AD tangente au cerle au point A et égale au côté du carré donné C ; par le point D et le centre O, menez la sécante DF ; vous aurez DE, DF respectivement égaux aux côtés adjacents du rectangle demandé ; car, en premier lieu, la différence entre ces côtés est égale au diamètre EF ou AB, et en second lieu, le rectangle DE.DF est égal à AD^2 par la prop. (**579**) ; de là, ce rectangle est équivalent au carré donné C.

L'on se souviendra que ce problème est déjà résolu d'une manière toute autre au par. (**375**).

PROP. LVIII. THÉOR.

(585) **Les parallélogrammes équiangles LB, NF ont l'un à l'autre le rapport composé des rapports de leurs côtés, ou sont l'un à l'autre comme les produits ou rectangles de ces côtés**; c-à-d., LB : NF :: AB.CB : EF.GF.

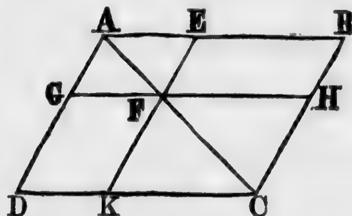


Soient CD, GH perpendiculaires sur AB, EF ; les triangles CDB, GHF seront semblables, à cause de l'angle droit D=H et de l'angle B=F. Ces deux triangles donnent donc CD : GH :: CB : GF, et si l'on multiplie les termes de ce rapport par ceux du rapport AB : EF :: AB : EF, l'on aura AB.CD : EF.GH :: AB.CB : EF.GF ; car (**103**) les produits des termes correspondants de deux séries de quantités proportionnelles sont proportionnels. Maintenant (**343**) les parallélogrs. quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs ; donc LB : NF :: AB.CD : EF.GH et l'on vient de voir que AB.CD : EF.GH :: AB.CB : EF.GF ; or, (**75 Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux ; donc, LB : NF :: AB.CB : EF.GF.

(586) **Cor.** Si deux quantités LB, NF ont l'une à l'autre un rapport donné, les multiples ou sous-multiples égaux de ces quantités auront aussi entre eux (**73 Ax.**) le même rapport ; or, les triangles ABC, EFG étant (**281**) moitiés de leurs parallélogrs. correspondants, auront entre eux le même rapport que ces parallélogrs ; c-à-d. que l'on aura ABC : EFG :: AB.CB : EF.GF ; donc, **les triangles quelconques, ayant chacun un angle égal, sont proportionnels aux produits des côtés qui comprennent les angles égaux** ; c-à-d. que leurs surfaces sont entre elles comme les rectangles de ces côtés.

PROP. LIX. THÉOR.

(587) Les parallélogrammes GE, KH autour du diamètre AC d'un parallélogramme DB, sont semblables au parallélogramme entier DB et par conséquent (209) semblables entre eux.



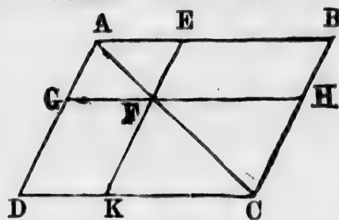
Parceque FH, FE sont respectivement parallèles à AB, BC, les triangles partiels FHC, AEF sont (148 ou 518) équiangles au triangle entier ABC et par conséquent (209) équiangles entre eux; pour la même raison les triangles FKC, AGF sont équiangles au triangle entier ADC et équiangles entre eux; or (205. Déf.) les triangles équiangles sont semblables; donc les parallélogrs. GE, DB, KH sont composés de triangles semblables; donc (207. Déf.) ces parallélogrs. sont semblables.

(588) Cor. Si deux parallélogrammes semblables GE, DB ont un angle A commun, et sont placés symétriquement, ils sont autour du même diamètre AC.

Car, si les parallélogrs. sont semblables, ils sont composés (207) de triangles semblables AEF, ABC, ayant leurs angles homologues EAF, BAC égaux l'un à l'autre; et toute direction ou inclinaison de diamètre AF autre que celle du diamètre AC donnerait évidemment (123) l'angle EAF inégal à son homologue ou correspondant BAC; ce qui ferait que les triangles EAF, BAC ne seraient pas semblables; or, ces triangles sont semblables, puisque par hyp. les parallélogrs. dont ils font partie le sont; donc AF, AC sont sur une seule et même ligne droite; donc, etc.

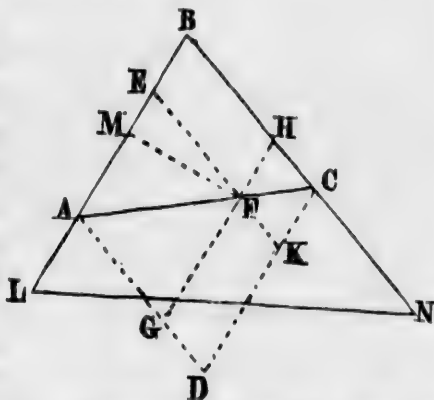
PROP. LX. THÉOR.

(589) **Chacun des compléments FB, FD des parallélogrammes GE, KH autour du diamètre AC d'un parallélogramme DB est moyen proportionnel entre ces parallélogrammes**; c-à-d. le parallélogr. FB ou FD est moyen proportionnel entre ceux GE, KH, ou GE: FB (ou FD) :: FB (ou FD) : KH, ou $GE \times KH = FB^2$ ou FD^2.



Parceque (**342**) les parallélogrs. de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, l'on a GE : FB :: GF : FH ; pour la même raison, DF : KH :: GF : FH ; mais (**75 Ax.**) les rapports égaux à un même rapport sont égaux entre eux ; donc GE : FB :: DF : KH ; or il a été démontré (**297**) que DF=FB ; substituant donc FB à son égal DF dans la dernière équation, il vient GE : FB :: FB : KH, et à FB substituant son égal DF, l'on a GE : DF :: DF : KH ; donc etc.

(590) **Sco. 1.** Quoiqu'il ne puisse y avoir de difficulté à concevoir qu'une surface FB soit moyenne proportionnelle entre deux autres surfaces GE, KH ; cependant, comme le rapport GE : FB :: FB : KH donne (**87**) $GE.KH = FB^2$, c-à-d., le produit des surfaces GE, KH, égal au carré de la surface FB, quantités d'une espèce telle qu'il parait d'abord difficile de les concevoir ; il est clair que ces quantités peuvent être regardées comme numériques, en les considérant simplement comme les résultats de la multiplication des nombres respectifs d'unités de mesure contenues dans les termes GE, FB, KH du rapport. Autrement, GE.KH peut-être regardée comme une surface GE prise autant de fois qu'il y a d'unités de mesure dans une autre surface KH, ou une surface KH prise autant de fois qu'il y a d'unités dans GE, et FB^2, comme une surface FB prise autant de fois qu'il y a d'unités de mesure dans FB.



(591) **Sco. 2. Prob.** Si l'on demandait à **partager un triangle quelconque BLN en deux parties égales ou proportionnelles ABC, A CNL, au moyen d'une ligne droite AC passant par un point donné F dans l'intérieur de la figure,** on y parviendrait en faisant application du raisonnement suivi dans ce théorème et dans les props. XXII. et XXIII.

Si l'on suppose que AC soit la ligne demandée et que par les points A, C et F on mène les lignes AD, EK HG et CD respectivement parallèles aux côtés BC, BA de la fig.; il est clair que BD sera un parallélogr. Les figs. EG, HK seront aussi des parallélogrs. autour du diamètre AC du parallélogr. BD et BF, DF seront les compléments de ces parallélogrs.

Ayant partagé dans le rapport voulu le nombre total d'unités de mesure contenues (**571. Lem.** 9°) dans la fig. BLN et obtenu de cette manière la surface relative de la partie ABC, l'on aurait à soustraire de ABC, le parallélogr. BEFH pour en déduire la somme des parties inconnues AEF, CFH. Maintenant le parallélogr. EG étant (**281**) double du triangle AEF et celui HK, double du triangle CFH, la somme de EG et de HK sera connue, et il vient d'être démontré que le complément BF des parallélogrs. EG, HK est moyen proportionnel entre ces parallélogrs.; c-à-d. que EG : BF :: BF : HK ou que $EG.HK=BF^2$. On a donc la somme EG+HK des quantités inconnues EG, HK et le rectangle au produit EG.HK de ces quantités, pour en déduire les quantités elle-mêmes; ce qui s'opérera de la manière indiquée au par. (**373**).

(592) En effet, **diviser une ligne donnée de manière que le rectangle de ses segments soit équivalent à un carré donné, n'est autre chose que diviser un nombre donné de manière que le rectangle ou produit de ses parties soit égal à un carré donné,** puisque à la ligne donnée l'on peut subtituer le nombre d'unités de mesure de cette ligne et opérer sur ce nombre comme sur toute autre quantité numérique. Considérant donc comme numériques les quantités EG+KH et EG.HK, l'on obtiendra séparément EG et HK en prenant leur demi somme, c-à-d. $\frac{EG+HK}{2}$, carrant cette demi-somme, ce qui donnera $\left(\frac{EG+HK}{2}\right)^2$ et de ce carré soustrayant le rectangle EG.HK, pour avoir le carré de la demi-différence. La racine carrée de ce dernier résultat sera la différence entre les surfaces EG et HK et comme on connait déjà la somme de ces quantités, l'on obtiendra EG, la plus grande, en ajoutant (**368**) la demi-différence à la demi-somme, et HK, la plus petite, en soustrayant cette demi-différence de la demi-somme ou en soustrayant EG de EG+HK.

Enfin, connaissant EG et se rappelant que (**349**) la surface d'un parallélogr. divisée par sa hauteur donne sa base, l'on obtiendra EA en divisant EG par la perpendiculaire FM abaissée du point donné F sur le côté BL de la fig. et l'on obtiendrait de même HC en divisant HK par la perpendiculaire abaissée du même point F sur le côté BN ; et la somme de AE et BE donne BA, c-à-d., la position du point A, par lequel et par le point F, menant AFC, cette dernière sera la ligne droite voulue et la surface BLN sera partagée par cette ligne de la manière proposée.

(593) **Sco. 3. Pour résoudre ce problème entièrement par construction** l'on aurait à faire (**376**) un carré AC

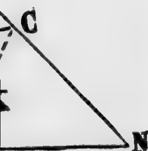
équivalent au triangle donné BLN. Partageant alors (**514**) AB, côté de ce carré en deux parties AD, DB ayant l'une à l'autre le rapport voulu (**571. Lem.**) des surfaces ABC, ACNL et menant DE parallèle à BC ou AF, on aurait le rectangle AE au rectangle DC dans le rapport désiré ; puisque (**330**) les rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Le rectangle AE sera donc équivalent en surface à la fig. ABC. Ayant ensuite réduit (**376**) le rectangle AE en un carré équivalent et le parallélogr. BF aussi en un carré équivalent et trouvé (**309**) un carré équivalent à la différence entre ces deux carrés ; c-à-d. équivalent à la différence entre le parallélogr. BF et le triangle ABC; ce dernier carré sera égal à la somme des parties inconnues AEF, CFH, et la somme de ces parties inconnues est (**281**) la demi-somme des parallélogrs. EG et HK auxquels le complément BF est moyen proportionnel. Il faut donc obtenir (**306**) un carré équivalent à la somme des parallélogrs. EG et HK, c-à-d. équivalent à deux fois le carré ci-dessus mentionné.

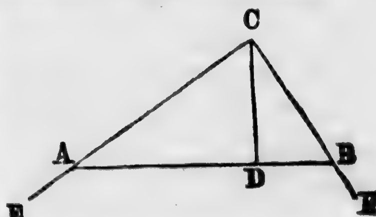
(**594**) Maintenant, après avoir obtenu une quantité géométrique équivalente à la somme des parties inconnues EG, HK, si l'on pouvait en obtenir une de même espèce équivalente au rectangle de ces mêmes parties ; l'on procèderait immédiatement à terminer la résolution du problème par la méthode du par. (**373**) ; mais **ne connaissant aucune quantité géométrique** de l'espèce EG.HK ou BF^2, c-à-d.

qui puisse représenter le rectangle ou produit de deux surfaces ou le carré d'une surface, (les seules quantités géométriques que l'on puisse concevoir étant, à part des points, les quantités linéaires, superficielles, solides et angulaires) **il faut** d'abord **remplacer ces quantités par d'autres auxquelles l'on puisse adapter le raisonnement géometrique ;** c-à-d., par des lignes.

(595) Or, on a vu (538) la méthode de trouver un carré qui soit à un carré donné comme une ligne donnée à une ligne donnée, et il est clair qu'il n'y aurait pas plus de difficulté à opérer l'inverse de ce problème, c-à-d., **trouver une ligne qui soit à une ligne donnée comme un carré donné à un carré donné.** Ou ce qui revient au même, trouver deux lignes ayant entre elles le rapport voulu.





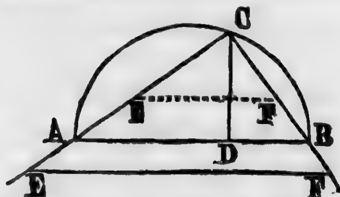


En effet, ayant disposé à angle droit deux lignes indéfinies CE, CF et porté sur ces lignes des longueurs CA, CB égales aux côtés des carrés équivalents à la somme des parallélogrs. EG et HK et au complément BF de ces parallélogrs. ; il n'y aurait plus qu'à joindre les points A, B par une droite et du sommet C abaisser sur AB la perpendiculaire CD qui couperait AB en D dans le rapport voulu de AC^2 à BC^2, puisque (537) $AC^2 : BC^2 :: AD : BD$.

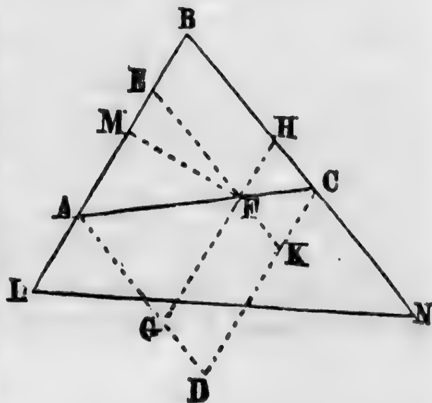
(596) Appelant P et Q les lignes AD, BD ainsi trouvées proportionnelles à EG+HK et à BF, l'on aura $EG+HK : BF :: P : Q$. Donc P représente la somme des parties inconnues EG, HK et Q^2, c-à-d. le carré fait sur la ligne Q, le rectangle de ces parties ; or, l'on trouvera par la méthode du par. (373) un rectangle équivalent au carré Q^2 et ayant la somme de ses côtés adjacents égale à la ligne P ; ou en d'autres termes, on divisera la ligne donnée P de manière que le rectangle de ses parties soit équivalent au carré Q^2 ;

et puisque la ligne P représente la somme des quantités inconnues EG, HK; il est clair que les segments ou parties de la ligne P trouvées comme susdit représenteront le rapport entre ces quantités.

(597) **Avec la somme EG+HK des parties inconnues et le rapport entre ces parties,** il sera facile de **touver ces parties** EG et HK **séparément.** Si l'on représente par R, S les parties ou segments de la ligne P trouvés comme ci-dessus, l'on aura R : S :: EG : HK et (95) componendo R+S : S :: EG+HK : HK et S+R : R :: HK+EG : EG; ce qui, réduit à une opération géométrique, veut dire qu'il faut prendre sur une ligne droite indéfinie AB, une partie AD=R+S=P et une partie DB=R; sur cette ligne, comme diamètre, décrire un demi-cercle BCA; au point D de jonction des parties AD, DB, ou R+S et R, élever la perpendiculaire DC; joindre CA, CB et s'il le faut les prolonger indéfiniment; sur CA ou CA prolongée, prendre CE égale au côté du carré équivalent à la somme de EG et HK, et par le point E, mener EF parallèle à AB, coupant CB ou CB prolongée en F; ce qui donnera (538) CF égale au côté d'un carré équivalent au parallélogr. EG. En faisant DB=S au lieu de R, l'on aurait CF égale au côté d'un carré équivalent à HK.

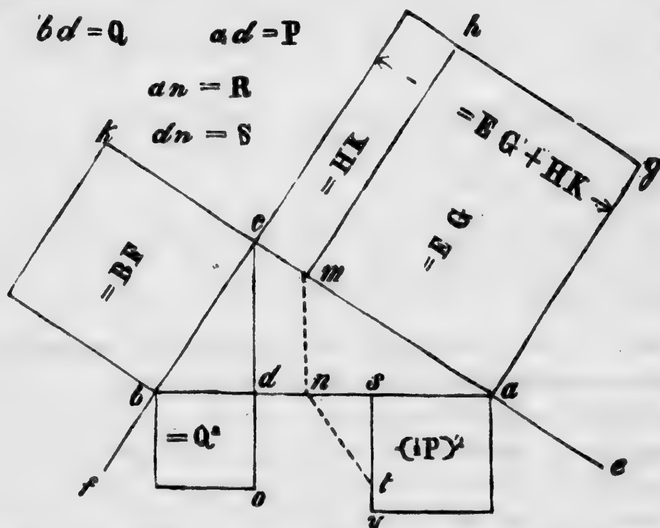


(598) **Enfin,** ayant fait (303) sur EF un parallélogr. EG, équivalent au carré en dernier lieu trouvé, et ayant un angle AEF= à l'angle donné B (puisque par constr. EF est parallèle à BC et que BA est une ligne droite); l'on aura AE+EB=AB égale à



l'un des côtés du triangle demandé ABC, et par les points A et F, menant la droite AFC, la partie ABC de la fig. entière BLN sera à la partie ACNL dans le rapport voulu.

(599) **Sco.** Il est à peine nécessaire de remarquer combien **la résolution arithmétique ou numérique de ce problème,** telle que donnée aux pars. (591 et 592) **est plus simple et concise que la construction géométrique** qui comprend la solution de pas moins de dix problèmes secondaires, comme ou peut le voir par le résumé suivant, qui aura aussi l'avantage de mieux faire saisir, d'un seul coup d'œil, à l'aide de la figure de ce paragraphe, l'ensemble des opérations plus amplement détaillées dans les paragraphes précédents; savoir :



1° Réduire (376) le triangle donné BLN en un carré équivalent.

2° Partager (593) ce carré en deux rectangles ayant l'un à l'autre le rapport des surfaces ABC, ACNL.

3° Réduire (376) en un carré équivalent le rectangle équivalent à ABC.

4° Réduire (376) le parallélogr. BF en un carré équivalent *a k*.

5° Faire (309) un carré équivalent à la différence des carrés équivalents à ABC et à BF.

6° Faire (306) un carré *c g* équivalent au double du dernier ; c-à-d. équivalent à la somme des parallélogrs. EG et HK.

7° Trouver (565 ou 595) deux lignes *a d*, *b d* (P et Q) ayant entre elles le rapport des surfaces EG+HK et BF ; c-à-d., proportionnelles aux carrés *c g* et *b k* équivalents à ces surfaces.

8° Diviser (373) la ligne *a d* (P) en *n* en deux segments *a n*, *d n* (R et S) tels que le rectangle *a n* . *d n* de ces segments soit équivalent au carré Q^2 de la ligne *b d* (Q) ; c-à-d. (596) en parties proportionnelles aux surfaces des parallélogrs. EG, HK.

9° Partager (593) le carré *c g* en deux rectangles *m g*, *c h* respectivement équivalents à EG et à HK ; c-à-d., proportionnels à *a n* et à *d n*.

10° Enfin, sur la ligne EF de la fig. donnée BLN, faire (303) un parallélogr. EG équivalent au rectangle *m g* et ayant un angle AEF égal à l'angle B.

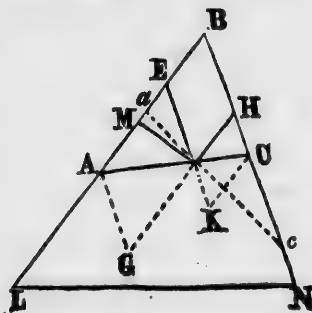
Sco. 1. L'on remarquera que **le point *n* de section de la ligne *a d* s'obtient** (373 ou 374) en portant sur *s v*, côté du carré $(\frac{1}{2}P)^2$, c-à-d du carré de la moitié de la ligne *a d*, une longueur *s t* égale au côté *b d* ou *d o* du carré Q^2 ou du rectangle *b o*. Du point *t* comme centre, avec un rayon *t n*= *a s* ou *v s* qui intersectera la ligne *a d* en *n*, l'on aura (309) *n s* égale au côté d'un carré équivalent à la différence entre les carrés Q^2 et $(\frac{1}{2}P)^2$; c-à-d. (374) que *n s* sera égale à la demi-différence des segments ou parties *a n*, *d n* (R,S) de la ligne *a d* (P) ; et cette demi-différence *n s* ajoutée à *a s*, moitié de la ligne *a d*, donne (367) *a n* le plus grand segment et par conséquent *d n* le plus petit.

Sco. 2. Observons aussi que **la méthode indiquée** (9°) **par la figure de ce paragraphe, de partager le carré** *c g* **en deux rectangles** *m g*, *c h* **équivalents aux parallélogrammes** EG, HK, **diffère de celle dont on a fait usage au paragraphe** (597) dans un but analogue, celui de trouver deux carrés qui fussent entre eux comme ces mêmes parallélogrs ; et il est indifférent que l'on se serve de l'une ou de l'autre méthode pour arriver aux surfaces requises EG et HK ; puisque la derniere opération (10°), celle de décrire sur la ligne donnée EF de la fig. BLN un parallélogr. EG d'une surface donnée et ayant un angle égal à un angle donnée B, ne diffère en rien de celle indiquée au par. (**598**) ; car la surface donnée et à la quelle le parallélogr. EG doit être équivalent, se prêtera à la construction requise, tout aussi bien sous la forme d'un rectangle *mg* que sous celle d'un carré équivalent à ce rectangle ou (**303**) de toute autre figure rectiligne équivalente.

Sco. 3. La méthode ici indiquée **d'opérer la division du carré** *c g* **en deux rectangles** *m g*, *c h* respectivement **proportionnels à** *an* et à *dn* est la même que celle déjà employée au par. (**593**) et nécessité seulement de mener la ligne *n m* parallèle à *c d*. Cette ligne intersectera le côté CA du carré donné *c g* en *m*, d'où, menant *m h* parallèle à *a g*, l'on aura (**330**) $mg : ch :: am : cm :: an : dn$, à cause (**518**) des triangles semblables *a n m*, *a d c*.

Sco. 4. Résumons aussi les quelques procédés de la solution numérique ; ce qui fera voir que ce problème est après tout assez simple à resoudre.

Ayant trouvé (**571. Lem.** 9°) le nombre d'unités de surface quelconques dans BLN, et divisé ce nombre en deux autres nombres ayant entre eux le rapport voulu des surfaces ABC à ACNL, en faisant la somme des termes du rapport (:) au terme qui représente ABC (::)

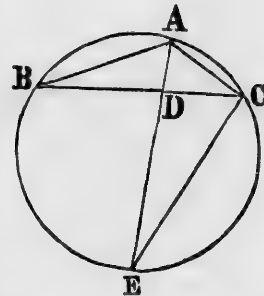


comme la surface entière BLN (:) à la surface relative de ABC; l'on procédera ensuite à trouver la surface relative de BF que l'on retranchera de ABC pour avoir la somme AEF+CFH des parties inconnues. L'on prendra ensuite EFH (moitié du parallélogr. BF) qui sera (**589**) moyen proportionnel entre AEF et CFH (moitiés des parallélogrs. EG et HK) puisque (**73. Ax.**) les moitiés sont comme les touts. On aura alors la somme AEF+CFH et le rectangle AEF.CFH (ou $\overline{EFH}^2$) des parties inconnues, pour trouver ces parties séparément; ce qui se fera (**374**) en prenant le carré $\left(\frac{AEF+CFH}{2}\right)^2$ de la demi-somme des parties, de ce carré soustrayant le rectangle AEF.CFH de ces mêmes parties, c-à-d. $(EFH)^2$, pour avoir le carré de la demi-différence entre elles. Cette demi-différence qui s'obtiendra en extrayant la racine carrée du carré en dernier lieu trouvé, étant ajoutée à la demi-somme, donnera (**368**) la plus grande des deux parties inconnues, et retranchée, donnera la plus petite. Enfin, la surface AEF divisée par la demi-perpendiculaire ou hauteur FM, donnera (**349**) la base AE et par suite le point A qui, avec le point donné F, fixera la position de la ligne demandée AC.

Sco. 5. Si l'on divisait la même surface AEF par la demi-perpendiculaire tombant du point F sur l'autre côté BN de la figure; il est clair que l'on obtiendrait une nouvelle base H*c* et par suite, une nouvelle position *ac* de la ligne de division requise; et si la division donnait une base EA ou H*c* plus grande que EL ou HN, il est évident que la ligne de division au lieu de tomber entre BL et BN, devrait changer tout à fait de direction et tomber soit entre BL et LN ou entre BN et LN; ce dont on s'assurerait aisément d'avance par un calcul ou une construction approximative, afin d'opérer de suite sur l'angle B ou L ou N de la fig. de manière à n'avoir pas à recommencer.

PROP. LXI. THÉOR.

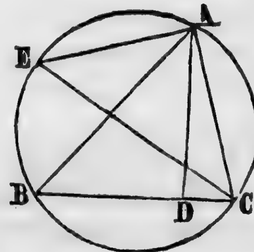
(600) **Si l'un quelconque A des angles d'un triangle ABC est bissecté par une ligne AD qui coupe aussi le côté opposé BC; le rectangle des côtés BA, AC qui comprennent l'angle bissecté est équivalent au rectangle des segments BD, DC du cọté ainsi coupé, plus le carré de la bissectrice AD; c-à-d. BA.AC=BD.DC+ AD^2.**



Inscrivez (**420**) le triangle ABC dans un cercle; prolongez la bissectrice AD pour rencontrer la circonférence en E et joignez CE. Vous aurez alors le triangle BAD semblable au triangle EAC; car, par hyp. l'angle BAD=EAC; et l'angle B=E, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AC. Or, les triangles équiangles ou semblables ont leurs, côtés homologues proportionnels; donc BA : AE :: AD : AC; donc BA.AC=AE. AD=(**357**) AD.DE+AD^2. Mais (**502**) AD.DE=BD.DC; donc BA.AC=BD.DC+AD^2.

PROP. LXII. THÉOR.

(601) **Dans tout triangle ABC, le rectangle de deux côtés BA, AC est équivalent au rectangle contenu par le diamètre CE du cercle circonscrit et la perpendiculaire AD menée de l'angle opposé A au troisième côté;** c-à-d. BA.AC=AD.CE.

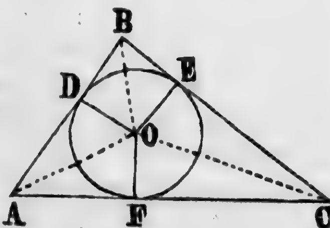


Parceque AD est perpendiculaire à BC, ADB est un triangle rectangle, et joignant AE, le triangle EAC sera aussi rectangle en A, à cause de l'angle A appuyé sur le diamètre EC. De plus, les deux triangles rectangles ADB, EAC ont l'angle B=E, parceque ces angles sont mesurés

par un même arc AC; ces deux triangles sont donc semblables et donnent AB : CE :: AD : AC; d'où (86) AB.AC=CE. AD.

(602) **Cor.** Si l'on multiplie ces quantités égales AB.AC, CE.AD par une même quantité BC, il en résultera (78. **Ax.**) $\overline{AB.AC.BC}=\overline{CE.AD.BC}$; mais (344) AD.BC est double de la surface du triangle ABC; donc **le produit continu** (41) **des trois côtés d'un triangle est égal au double de sa surface multipliée par le diamètre du cercle circonscrit,** ou ce qui est la même chose, à sa surface par deux fois le diamètre du cercle circonscrit.

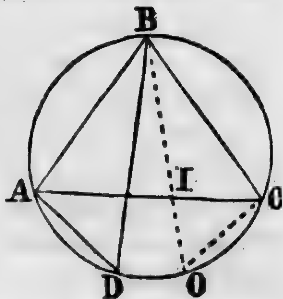
(603) **Sco.** Remarquons aussi, que **la surface d'un triangle ABC est égale à son périmètre multiplié par le demi-rayon du cercle inscrit**; car les triangles AOB, BOC, AOC qui ont un sommet commun en O, ont pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit; de là, la somme de ces triangles est égale à la somme des bases AB, BC, AC multipliée par la moitié du rayon OD; donc etc.



PROP. LXIII. THÉOR.

(604) **Dans tout quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle, le rectangle des deux diagonales AC, BD est équivalent à la somme des rectangles des côtés opposés AB, DC et AD, BC**; c-à-d. AC.BD=AB.DC+AD.BC.

Faisant l'arc CO=AD et menant BO qui rencontrera AC en I, on aura l'angle CBO ou CBI=ABD, parceque (449) les angles à la circonférence appuyés sur des arcs égaux sont égaux; l'angle ADB=ICB ou ACB appuyé sur le même arc AB; donc le triangle ABD est équiangle et semblable au triangle



IBC et on a le rapport AD : CI :: BD : BC ; de là, AD.BC=CI.BD. De plus, le triangle ABI est semblable au triangle DBC ; car, l'arc AD étant =CO, si à chacun de ces arcs on ajoute l'arc OD, on aura l'arc AO=DC ; de là, l'angle ABI est égal à DBC ; et l'angle BAI ou BAC=BDC, parce qu'ils sont appuyés sur le même arc BC ; donc les triangles ABI, DBC sont semblables, et les côtés homologues donnent le rapport AB : BD :: AI : CD ; donc AB.CD=AI.BD. Ajoutant les deux résultats obtenus, et remarquant que AI.BD+CI.BD=(AI+CI). BD=AC.BD (353), l'on aura AD.BC+AB.DC=AC.BD.

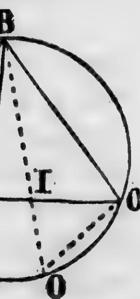
PROP. LXIV. THÉOR.

(605) Si du point C de bissection et des extrémités A, B d'un arc de cercle ACB, l'on mène des lignes CD, AD, BD à un point quelconque D sur la circonférence ; le rapport entre la somme des deux lignes AD, BD menées des extrémités de l'arc, et celle CD menée du centre de l'arc, sera le même que celui entre la corde AB de l'arc entier ACB et la corde AC ou BC de la moitié de cet arc ; c-à-d., AD+DB : CD :: AB : AC ou BC.



Puisque ADBC est un quadrilatère inscrit dans un cercle, et dont les diagonales sont AB et CD ; l'on aura par la derniere prop. AD.BC+AC.BD =AB.CD ; mais AD.BC+AC.BD= AD.AC+BD.AC, puisque AC=BC ; donc (68. **Ax.**) AD.AC+BD.AC= AB.CD ; c-à-d. (353) $\overline{AD+BD}$.AC= AB.CD. Et parceque (545) les côtés de rectangles (171) égaux sont réciproquement proportionnels, l'on a AD+BD : CD :: AB : AC.

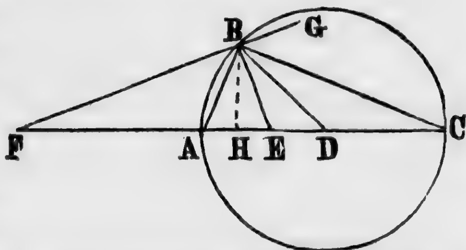
D'ailleurs (88) si le rectangle ou produit de deux quantités est égal au rectangle ou produit de deux autres quantités,



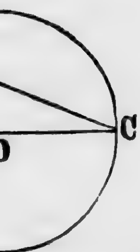
deux de ces quantités sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyens; donc, encore de cette manière, l'on obtient, en raison inverse, AD+BD : CD :: AC : AB, ou en raison directe, AD+BD : CD :: AB : AC; donc, etc.

PROP. LXV. THÉOR.

(606) Si, sur le diamètre AC prolongé d'un cercle ABC, l'on prend deux points E, F, tels que le rectangle contenu par les segments ED, FD interceptés entre ces points et le centre du cercle, soit équivalent au carré du rayon AD; et si de ces points l'on mène deux lignes droites EB, FB à un point quelconque B de la circonférence; le rapport entre ces lignes sera le même que celui entre les segments AE, AF compris entre les points en premier lieu mentionnés et la circonférence du cercle; c-à-d., si ED.DF=AD^2, l'on aura FB : BE :: FA : AE.



Joignez BD, et parceque ED.DF est égal au carré de AD, c-à-d. au carré de BD (rayons d'un même cercle), FD:BD :: BD: ED (89 ou 580). Dans les deux triangles FDB, BDE, les côtés qui comprennent l'angle commun D sont donc proportionnels; ces deux triangles sont donc (523) équiangles, l'angle DEB étant égal à l'angle DBF et DBE à DFB. Maintenant, puisque (520) les côtés qui comprennent ces angles égaux sont aussi proportionnels, FB : BD :: BE : ED, et alternativement (94) FB : BE :: BD : ED, ou FB : BE :: AD : ED. Mais, parceque FD : AD :: AD : ED, l'on a par divison (96) FD—AD : AD :: AD—ED : ED, ou FA : AD :: AE : ED, et alternando, FA : AE :: AD : ED; or, il a été démontré que FB : BE :: AD : ED; donc, (75. Ax.) FB : BE :: FA : AE.



(607) **Cor. 1.** Si l'on mène AB; parceque FB : BE :: FA : AE, l'angle FBE est bissecté (542) par AB. De plus, puisque FD : DC :: DC : ED, DC étant =AD, rayons d'un même cercle, l'on a par composition (95) FC : DC :: EC : ED et alternando, FC : EC :: DC : ED. Il a été démontré aussi que FA : AD ou DC :: AE : ED et alternando, FA : AE :: DC : ED; donc (75. **Ax.**) FA : AE :: FC : EC; mais FB : BE :: FA : AE; donc (75. **Ax.**) FB : BE :: FC : EC; c-à-d. que **si l'on prolonge FB jusqu'en G et si l'on mène BC, cette derniere bissectera (544) l'angle extérieur** EBG.

(608) **Cor. 2.** Puisque par hyp. ED.FD=AD^2, ou que (89) FD : AD :: AD : ED, l'on aura, convertendo (98) FD : FD—AD :: AD : AD—ED, c-à-d. FD : FA :: AD : AE. Maintenant convertendo et alternando (93 et 94) FA : AE :: FD : AD et dividendo (96) FA—AE : AE :: FD—AD : AD ou (83. **Ax.**) FA—AE : AE :: FA : AD, puisque FD—AD=FA; d'où il suit que AD est une quatrième proportionnelle à FA—AE, AE et FA; c-à-d., **le rayon AD du cercle ABC dont le centre D serait situé sur le prolongement de la base FE d'un triangle quelconque FBE, et dont la circonférence, passant par le sommet du triangle, couperait la base EF en parties FA, AE ayant entre elles le même rapport que celui entre les côtés FB, BE du triangle; est une quatrième proportionnelle entre la différence FA—AE des segments de la base, le plus petit segment AE et le plus grand segment FA.**

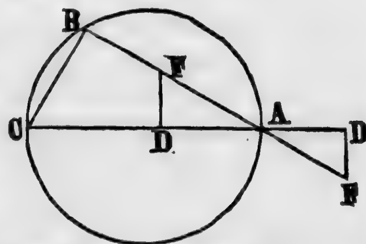
(609) **Sco. 1. Prob.** Il suit directement du dernier corollaire que **dans un triangle quelconque FBE, étant donné la surface, l'un FE des côtés et le rapport M à N entre les deux autres côtés FB, BE, pour construire le triangle;** il n'y a qu'à partager (514) le côté donné en A de manière que les segments FA, AE de ce côté soient entre eux dans le rapport voulu; puis trouver (516) AD, en faisant FA—AE : AE :: FA : AD. Du point D, avec le rayon AD, décrivant alors le cercle ABC, et prenant sur la circonférence de

ce cercle, un point B tel que la hauteur BH du triangle soit égale à sa surface divisée par sa demi-base ; les lignes menées des extrémités F, E du côté donné au point B seront les côtés inconnus du triangle et BFE sera le triangle voulu.

(610) **Sco. 2.** Si la surface du triangle FBE était donnée sous forme d'un carré ou de toute autre figure équivalente ; il est clair que pour **trouver par construction** BH **la hauteur du triangle voulu**, il y aurait à faire (304) sur la ligne donnée FE un rectangle égale en surface au carré ou autre fig. donnée, et à prendre BH égale au double du côté inconnu de ce rectangle. Menant alors à FE une parallèle à une distance de FE égale à la hauteur BH ainsi trouvée, cette parallèle intersecterait le cercle en B, sommet voulu du triangle.

PROB. LXVI. THÉOR.

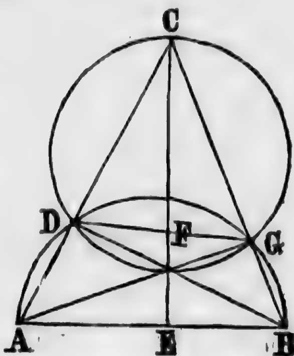
(611) **Dans un cercle, une ligne** DF **qui, étant perpendiculaire au diamètre, rencontre une corde** AB **menée de l'une** A **de ses extrémités ; coupe ce diamètre et cette corde ou ces deux lignes prolongées, de manière à ce qu'elles soient réciproquement proportionnelles aux parties** AD, AF **comprises entre la ligne de section et l'extrémité du diamètre ;** c-à-d. que si DF est perpendiculaire à AC ou à AC prolongée, l'on aura AC : AB :: AF : AD ou (86 et 573) AC.AD=AB.AF.



Ayant mené BC, l'on voit de suite que les triangles ABC, ADF sont semblables, ayant chacun un angle A en commun, et l'angle B, appuyé sur le diamètre AC, droit (444) et par conséquent égal à l'angle D, droit par hypothèse. Or, les triangles semblables ABC, ADF donnent AC : AB :: AF : AD ; donc, etc.

PROP. LXVII. THÉOR.

(612) Les perpendiculaires AG, BD, CE menées des trois angles d'un triangle quelconque aux côtés opposés, s'intersectent en un même point F.

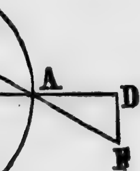


Soient d'abord AG, BD respectivement perpendiculaires à BC, AC ; le demi-cercle ADGB passera par les points D, G, puisque (444) tous les angles ADB, AGB dans un demi-cercle sont droits. Ayant mené la droite CFE, le cercle CDFG décrit sur CF, comme diamètre, passera aussi, pour la même raison, par les points D et G. Maintenant l'angle FGD appuyé sur l'arc DF est égal à l'angle FCD appuyé sur le même arc ; et l'angle FGD ou son égal AGD, appuyé sur l'arc AD, est égal à l'angle ABD appuyé sur le même arc ; donc (68. **Ax.**) l'angle ABD =ACE. Les triangles AEC, ADB ont donc les angles en C et B égaux et l'angle en A commun ; d'où il suit que l'angle CEA=BDA, et puisque BDA est droit par hyp., CEB est aussi droit et CE est perpendiculaire sur AB ; donc, etc.

(613) **Cor. Le triangle CDG est semblable au triangle entier ABC** ; car les triangles CDB, CGA sont semblables, ayant l'angle en C commun et les angles en D et G droits par hyp. ; ce qui donne CG : CD :: CA : CB ; or (523) deux triangles qui ont deux côtés de l'un proportionnels à deux côtés de l'autre, et l'angle compris par les côtés proportionnels, égal dans chaque triangle, sont semblables ; donc, etc.

PROP. LXVIII. THÉOR.

(614) Si de l'un quelconque A des angles d'un triangle ABC, l'on mène une perpendiculaire AD au côté opposé



BC, ou à ce côté prolongé s'il le faut ; le rectangle de la somme et différence des deux autres côtés AB, AC est équivalent au rectangle de la somme et différence des segments DB, DC de la base, faits par la perpendiculaire. C-à-d., $\overline{AC+AB}\times\overline{AC-AB}=\overline{DC+DB}\times\overline{DC-DB}$.

Du point A comme centre, avec le rayon AC, le plus grand des deux côtés, décrivez le cercle CFG ; prolongez AB jusqu'à sa rencontre avec la circonférence en E et F, et CB jusqu'en G. Maintenant, parceque AF=AC, rayons d'un même cercle, BF=AB+AC =la somme des deux côtés, et BE=AE—AB=AC—AB est égale à la différence entre ces côtés.

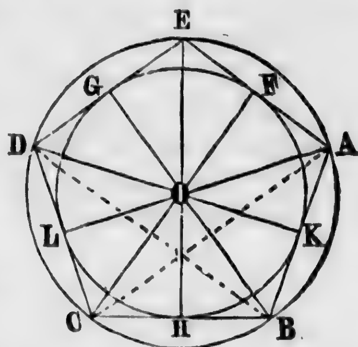
Il est clair aussi que BC=DB+DC est égale à la somme des segments de la base, et BG à la différence de ces mêmes segments, lorsque la perpendiculaire tombe en dedans du triangle ; et que BG=DC+DB est égale à la somme des segments de la base, et BC, à la différence entre ces segments, lorsque la perpendiculaire tombe en dehors de la base. Or, dans chacun de ces deux cas, CG et EF étant deux lignes qui se coupent dans un cercle, donnent (**572**) EB.BF=GB. BC ; c-à-d. (AC+AB) (AC—AB)=(CD+DB) (CD—DB).

PROP. LXIX. THÉOR.

(615) **L'on peut inscrire dans un cercle et circonscrire à un cercle un polygone régulier quelconque ; et réciproquement, l'on peut inscrire un cercle et circonscrire un cercle à un polygone régulier quelconque.**



La vérité de cet enoncé pourrait de suite se tirer des conclusions déjà établies (2° et 3°) au par. (**555**).



D'ailleurs, soit ECB un cercle dans lequel toutes les cordes AB, BC, etc. sont égales ; la fig. ABCDE sera (**175** Déf.) un polygone régulier.

En effet, parceque par hyp. la corde AB=BC=CD=etc. et que (**403**) dans un même cercle, les cordes égales soustendent des arcs égaux ; on a l'arc AB= l'arc BC=CD=etc. ; c-à-d. (**69**. **Ax.**) l'arc ABC=l'arc BCD, et la corde AC= celle BD, puisque (**403**) les arcs égaux dans un même cercle sont sous-tendus par des cordes égales. Les triangles ACB, DBC ont donc leurs côtés correspondants égaux, et par suite (**239**) leurs angles sont égaux. Donc l'angle B du pol. est égal à l'angle C, et l'on prouverait de même C=D, D=E et ainsi des autres ; donc le polygone ABCDE a tous ses angles égaux ; et ses côtés sont égaux par hyp., étant formés des cordes égales du cercle ECB ; donc il est régulier; et il est composé d'un nombre quelconque de cordes ou de côtés ; donc un polygone régulier quelconque peut être inscrit dans un cercle.

(**616**) **En second lieu**, parceque les cordes égales AE, ED, etc. sont (**461**) également éloignées du centre O du cercle ; les perpendiculaires OF, OG, etc. qui mesurent ces distances (**200**) sont égales, et un cercle décrit du centre O avec un rayon OF, toucherait le côté AE et tous les autres côtés du pol. aux points F, G, etc., milieux de ces côtés ; car (**407**) la perpendiculaire menée du centre sur une corde, bissecte la corde, et (**468**) le point de contact du cercle est situé à la rencontre de la tangente et de la ligne menée du centre perpendiculairement à cette tangente. Le cercle GHF est

donc inscrit dans le pol. et ce polygone est un pol. d'un nombre quelconque de côtés, (le nombre des cordes égales, AB, BC, etc. étant par hyp. indéfini); donc un cercle peut-être inscrit dans un polygone régulier quelconque.

(617) **En troisième lieu**, le pol. ABCDE est circonscrit au cercle GHF, puisque (616) ce cercle lui est inscrit; donc un polygone régulier quelconque peut-être circonscrit à un cercle.

(618) **En dernier lieu**, le pol. ABCDE étant inscrit dans le cercle ECB, ce même cercle est par conséquent circonscrit au pol; donc aussi, l'on peut circonscrire un cercle à un polygone régulier quelconque.

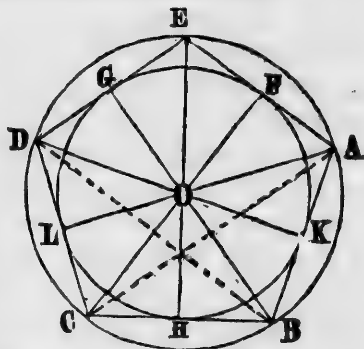
(619) **Cor. 1.** De ces conclusions il résulte que **si d'un centre commun l'on peut inscrire un cercle dans un polygone et lui circonscrire un cercle, ce polygone est régulier.** Car, si l'on suppose que ces cercles soient décrits, le cercle intérieur touchera tous les côtés du pol.; ces côtés sont donc (461) également éloignés du centre, et étant en même temps des cordes du cercle circonscrit, elles sont égales et contiennent des angles égaux, comme il est démontré (615) par la prop.; donc le polygone est en même temps équilatéral et équiangle, c-à-d. (175) régulier.

(620) **Sco. 1. Le** point O, **centre commun des cercles inscrit et circonscrit** (555, 2° et 3°) **peut aussi être regardé comme centre (175) du polygone**; et pour cette raison, l'angle AOB est appelé angle au centre, étant formé par deux rayons menés aux extrémités d'un même côté AB. Toutes les cordes étant égales, **tous les angles au centre du polygone régulier sont** aussi **égaux (404) et l'on trouvera en conséquence la valeur d'un de ces angles en divisant (24) quatre angles droits par le nombre des côtés du polygone.**

(621) **Sco. 2. Prob.** Pour **inscrire un polygone régulier quelconque dans un cercle**; il n'y a qu'à diviser la circonférence en autant de parties égales que le polygone a de

côtés; car, les arcs étant égaux, les cordes **seront auss** égales (**403**) et le pol. sera (**615**) régulier **par la prop.**

(**622**) **Cor. 2.** Les cordes AE, DE, etc. étant égales et les rayons OA, OE, OD, etc. égaux, **les triangles** AOE, DOE, etc. **qui composent le polygone régulier** ABCDE, **sont isocèles et égaux en toutes choses** (**239**); donc angle AEO = angle DEO; donc le rayon OE mené du centre à l'angle E du pol. bissecte cet angle; et l'on prouverait de même que le rayon OA bissecte l'angle A et ainsi des autres; donc **les lignes menées du centre aux angles d'un polygone régulier bissectent ces angles**; et réciproquement **les bissectrices des angles d'un polygone régulier se rencontrent en un même point qui est le centre du polygone**; car, les angles A, B, C etc. étant égaux, leurs moitiés sont aussi égales (**69. Ax.**) et les triangles AOE, DOE, etc. ayant tout leurs angles et un côté égaux, sont égaux en toutes choses (**238**); donc, l'on a OA=OE=OD= etc; d'où, O est évidemment le centre (**175**) du polygone.



(**623**) **Sco. 3. Prob.** Il suit que pour **circonscrire un cercle à un polygone régulier quelconque**; il n'y a qu'à bissecter deux des angles du pol., et au point de rencontre des bissectrices, avec un rayon égal à l'une d'elles, décrire le cercle voulu.

(**624**) **Sco. 4. Prob.** Il suit aussi que pour **inscrire un cercle dans un polygone régulier quelconque**; après avoir trouvé le centre du cercle, situé, comme il a été dit, à la rencontre des bissectrices de deux angles du pol., il n'y a qu'à abaisser de ce point une perpendiculaire OF sur l'un des côtés et prendre cette perpendiculaire pour rayon du cercle voulu.

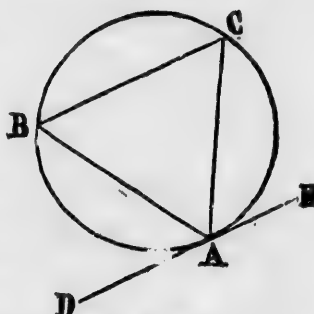
(625) **Sco. 5. Prob.** Les triangles AOE, DOE, etc. étant (622) égaux et isocèles, les angles au sommet O sont bissectés par les perpendiculaires OF, OG, etc. (235 et 236). Mais les angles au centre EOA, EOD, etc. sont égaux (620) et leurs moitiés sont aussi égales (69. **Ax.**); donc l'angle GOF=EOA ou EOD=FOK= etc.; car ces angles sont composés des moitiés égales KOA, FOA, FOE, etc. Or, les angles égaux au centre sous-tendent (399) des arcs égaux; donc, pour **circonscrire un polygone régulier quelconque à un cercle donné,** il n'y a qu'à diviser la circonférence en autant de parties égales GF, FK, etc. que le pol. a de côtés, mener ensuite les rayons OG, OF, etc. aux points de division G, F, etc. et aux extrémités de ces rayons, mener les perpendiculaires DE, EA, AB, etc. qui seront les côtés du pol. requis.

En effet, soient E, A, etc. les points où ces côtés se rencontrent; joignez OE, OA. Les angles GOF, FOK sont égaux, puisque les arcs GF, FK, etc. sont égaux par constr. Les tangentes EG, EF sont égales (493) ainsi que celles AF, AK, et les lignes OE, OA menées du centre à la rencontre E, A, de ces tangentes, bissectent (494) les angles formés par ces tangentes. Les deux triangles GOE, FOE sont donc égaux en toutes choses; donc angle EOG= angle $EOF=\frac{GOF}{2}$, et $FOA=KOA=\frac{KOF}{2}$; mais GOF= KOF par constr; donc aussi FOE=FOA, et les angles en F étant droits et le côté OF commun, la base FE= celle FA; d'où il suit que EA=2EF=2EG=ED=AB=etc.; donc le polygone est équilatéral; et il est aussi équiangle, car dans chacun des quadrilatères FOGE, FOKA dont la somme des angles intérieurs vaut (255) quatre angles droits, il y a deux angles droits en G et F et en K et F, et des quatre autres angles, les deux en O sont égaux par constr.; d'où, il est clair que les angles en E, A, sont aussi égaux.

On prouverait de même l'égalité des angles B, C, etc.; donc le polygone est équiangle, et il a été prouvé équilatère; donc il est régulier (175) et le problème est résolu.

(626) **Sco. 6.** Il est évident, d'après ce qui précède, que **l'on pourra toujours inscrire dans un cercle ou lui circonscrire un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, pourvu que l'on puisse diviser la circonférnce du cercle en le même nombre de parties égales que le polygone doit avoir de côtés.**

(627) **Sco. 7. Prob. Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle.**

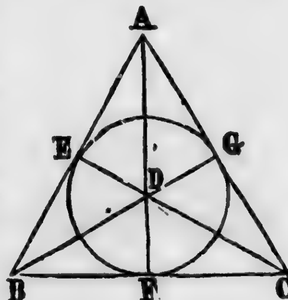


Par un point quelconque A sur la circonférence, ayant mené (488) une tangente DE, faites chacun des angles EAC, DAB égal au tiers de deux angles droits (263), c-à-d. égal à l'angle d'un triangle équilatéral, et joignez BC; ABC sera le triangle demandé, chacun des angles B, C dans les segments alternes ACB, ABC étant égal, respectivement (487) aux angles DAB, EAC formés par la tangente DE et les cordes AC, AB.

(628) **Sco. 8. Prob.** Il suit du dernier paragraphe que pour **inscrire dans un cercle un triangle quelconque équiangle à un triangle donné ;** l'on n'aurait qu'à faire les angles en EAC, DAB respectivement égaux à deux des angles du triangle donné, et joindre BC pour compléter la construction.

Rem. On se rappellera que la méthode de circonscrire un cercle à un triangle donné a déjà été demontrée au par. (420).

(629) **Sco. 9. Prob.** Pour **inscrire un cercle dans un triangle équilatéral,** on suivrait la méthode générale du par. (624), le triangle équilatéral n'étant autre chose qu'un polygone régulier de trois côtés.

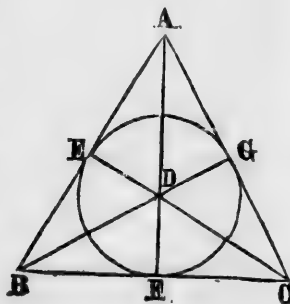


(630) **Sco. 10. Prob.** On procé-

derait tout de même à **inscrire un cercle dans un triangle donné quelconque**, puisque (494) les bissectrices AD, BD, CD passent toutes par le centre du cercle auquel les côtés AB, BC, CA doivent être tangents.

(631) **Sco. 11. Prob.** Puisque dans tout quadrilatère AEDG, la somme des angles intérieurs vaut (255) quatre angles droits et que les deux angles AED, AGD formés par les rayons DE, DG menés aux points de contact E, G des tangentes AB, AC, sont droits (466) ; il s'en suit que la somme des angles A et D du quadrilatère vaut aussi deux angles droits ; ces angles sont donc suppléments (130 Déf.) l'un de l'autre. Donc, pour **circonscrire à un cercle donné un triangle équilatéral ou polygone régulier de trois côtés** ; il n'y a qu'à mener les trois rayons DE, DF, DG formant l'un avec l'autre des angles EDG, EDF, GDF respectivement égaux aux suppléments des angles du triangle demandé, c-à-d., dans ce cas ci, égaux entre eux et chacun aux deux tiers de deux angles droits, ou au double d'un des angles du triangle équilatéral, et par les extrémités E, F, G de ces rayons, mener les perpendiculaires AB, BC, AC qui détermineront le triangle requis.

(632) **Sco. 12. Prob.** Si l'on avait **à circonscrire au cercle un triangle quelconque équiangle à un triangle donné** ; il est clair qu'il n'y aurait qu'à faire les angles EDG, EDF, GDF respectivement égaux aux suppléments des angles du triangle donné, et procéder ensuite comme ci-dessus pour résoudre le problème.



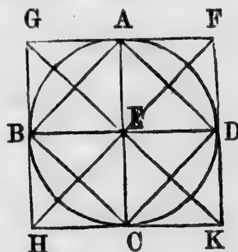
(633) **Sco. 13. Prob. Inscrire et circonscrire un cercle à un carré, et un carré à un cercle.**

En premier lieu, soit HF le carré donné pour y inscrire un cercle ABCD. Il est démontré (624) que pour inscrire



un cercle dans un pol. régulier quelconque, il n'y a qu'à bissecter deux des angles du pol. et avec un rayon égal à la perpendiculaire menée de la rencontre des bissectrices au côté du pol., décrire le cercle requis. Or, un carré est un pol. rég. de quatre côtés (**165 Déf**) et la règle donnée s'applique au carré comme à tout autre pol.; faisant attention seulement, comme il faut le faire, dans tout pol. ayant un nombre pair de côtés ou d'angles, que les deux angles bissectés ne soient pas opposés l'un à l'autre, puisque dans ce cas, les bissectrices ne s'intersecteraient pas et ne formeraient qu'une seule et même ligne droite, comme cela est évident pour le carré, où les deux bissectrices opposées HE, FE forment chacune partie de la diagonale HF.

(**634**) **Sco. 14. Prob.** Il est clair que **dans le carré, comme dans tout autre polygone ayant un nombre pair de côtés, le centre du polygone ainsi que celui des cercles inscrit et circonscrit, est situé au milieu d'une des diagonales menées entre deux de ses angles opposés, et peut s'obtenir en menant et bissectant dette diagonale.**



(**635**) **En second lieu,** soit ABCD le carré auquel il faut circonscrire un cercle. On voit de suite que l'intersection E des deux diagonales donne le centre du cercle voulu.

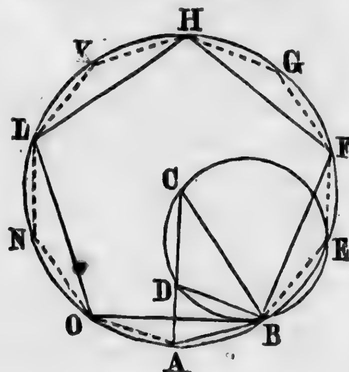
(**636**) **En troisième lieu,** si ABCD est le cercle auquel il faut inscrire un carré, il est évident qu'on partagera la circonférence du cercle en quatre parties égales, en menant dans le cercle deux diamètres AC, BD perpendiculaires l'un à l'autre. Joignant ensuite les points A, B, C, D, on aura (**621**) le carré requis.

(**637**) **En dernier lieu,** si ABCD est le cercle auquel il faut circonscrire un carré; ayant procédé comme ci-dessus, l'on menera aux extrémités A, C, B et D des diamètres AC, BD, les perpendiculaires GF, HK, GH et FK, qui formeront (**625**) le carré GHKF demandé.

(638) **Sco. 15.** Puisque le triangle AED est isocèle et rectangle, à cause des rayons égaux EA, ED qui se rencontrent à angle droit, l'on a (305) $AD^2 = AE^2 + DE^2$, et si le rayon AE=1, AD sera $= \sqrt{2}$; **donc le côté du carré inscrit est au rayon comme la racine carrée de 2 est à l'unité,** ou AD : AE :: $\sqrt{2}$: 1.

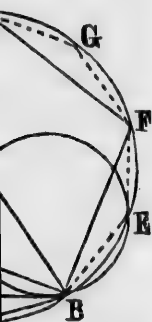
PROP. LXX. THÉOR.

(639) **L'angle C au centre d'un décagone régulier AGL est moitié de l'angle BAC ou ABC compris entre le rayon oblique CA ou CB et le côté AB du décagone.**



En effet, l'angle C au centre du décagone vaut un dixième de quatre angles droits, puisque tous les angles que l'on peut faire autour d'un point C ne valent ensemble (140) que quatre angles droits, et que (620) tous les angles au centre d'un polygone régulier quelconque sont égaux, étant appuyés sur les côtés égaux du pol. qui sont en même temps des cordes égales du cercle circonscrit et sous-tendent des arcs égaux, mesures (425) de ces angles.

Mais (255) la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque vaut autant de fois deux angles droits que la fig. a de côtés moins deux, c-à-d. autant de fois deux angles droits que la fig. a de côtés moins quatre angles droits; donc l'angle A ou B du décagone, c-à-d. l'angle OAB ou EBA formé par deux côtés adjacents du décagone vaut un dixième de cette somme. Or, dix fois deux angles droits, moins quatre angles droits, font seize angles droits; donc l'angle A du décagone vaut un dixième de sieze angles droits, et l'on vient de voir que l'angle C au centre vaut un



dixième de quatre angles droits ; donc l'angle C est le quart de l'angle A, c-à-dire la moitié de l'angle CAB, puisque (622) la ligne CA menée du centre à l'angle A du pol. bissecte cet angle.

(**640**) **Sco. 1. Prob.** L'angle C au centre du décagone régulier étant, comme on vient de le démontrer, moitié de l'angle CAB ou CBA, ou quart de l'angle A à la base ; il est clair que si l'on peut faire un triangle isocèle ACB, dont l'angle C au sommet soit moitié de l'angle à la base, CAB ou CBA, cette base AB sera le côté d'un décagone régulier inscrit dans un cercle ayant pour rayon le côté AC ou BC du triangle isocèle.

Or, l'on parvient à ce résultat en faisant (**381** ou **582**) AB=CD telle que AB^2 ou CD^2 soit égal au rectangle AC. AD. Soit donc **à inscrire un décagone régulier** ABEFG etc. **dans un cercle** OFL. Ayant mené en un point quelconque A de la circonférence un rayon CA et partagé ce rayon en D de manière que CD^2=CA.AD, l'on portera (**225**) sur la circonférence une longueur AB=CD qui sera un des côtés du décagone voulu.

En effet, ayant joint BD et inscrit (**420** ou **628**) le triangle DBC dans un cercle CDE, l'on voit que AB est tangente à ce cercle au point B, puisque (**507**) si le carré d'une ligne AB menée à un cercle, d'un point quelconque A hors de ce cercle, est égal au rectangle d'une sécante AC menée du même point et de la partie AD de cette sécante hors du cercle, cette ligne AB est tangente à ce cercle.

Maintenant, parceque l'angle ABD formé par une tangente AB et une corde BD est égal (**487**) à l'angle C dans le segment alterne du cercle, le triangle ABD est équiangle à ACB et par conséquent isocèle, à cause des rayons CA, CB, car l'angle ABD=C et l'angle A est commun à chacun des triangles ; donc l'angle ADB=ABC (**260**). Le triangle ABD étant isocèle donne BD=BA=DC ; donc le triangle BDC est aussi isocèle, et l'angle DBC=C ; mais l'angle

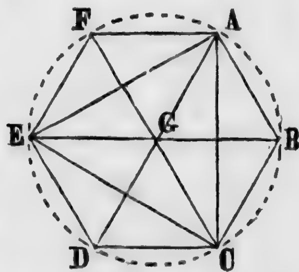
extérieur ADB=C+DBC=2C ; donc aussi, l'angle CAB ou CBA=2C ; donc le triangle ACB est tel que chacun des angles à la base est double de l'angle au sommet ; donc, etc. Portant enfin sur la circonference dix fois la corde AB, on aura le décagone régulier demandé par le problème.

(641) **Sco. 2. Prob.** S'il s'agissait d'un **pentagone regulier** BFHLO **à inscrire dans un cercle** ; on voit de suite qu'il n'y aurait qu'à porter sur la circonférence cinq longueurs BF chacune égale à la corde d'une arc BEF double de l'arc BA du décagone.

(642) **Sco. 3. Probs.** Ayant démontré la manière de diviser une circonférence de cercle, soit en dix ou en cinq parties égales ; il est clair que pour **circonscrire à un cercle un décagone ou pentagone régulier**, il n'y a qu'à suivre la méthode générale indiquée au par. (**625**) ; les paragraphes (**623**) et (**624**) indiquant le moyen de **circonscrire et inscrire un cercle à ces mêmes polygones.**

PROP. LXXI. THÉOR.

(643) **Le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon du cercle.**



Il a été démontré (**620**) que tous les angles au centre d'un polygone régulier quelconque sont égaux ; or, l'hexagone ayant six côtés et par conséquent six angles au centre, chacun de ces angles AGB, BGC, etc. vaut un sixième de quatre angles droits ou un tiers de deux angles droits ; mais le triangle AGB est isocèle, à cause des rayons égaux AG, BG, et les angles A, B, à la base du triangle sont donc aussi égaux (**229**) l'un à l'autre, et valent ensemble les deux tiers de deux angles droits ; d'où il suit que chacun de ces angles pris séparément vaut le tiers de deux angles droits. Le triangle AGB est donc équilatéral et le côté AB=AG=BG ; donc, etc.

(644) **Sco. 1. Prob.** Donc, pour **inscrire un hexagone régulier dans un cercle,** il n'y a qu'à porter (**225**) le rayon six fois sur la circonférence.

(645) **Sco. 2. Prob.** Il est à peine nécessaire de rappeler que pour **circonscrire un hexagone régulier à un cercle ;** il n'y aurait qu'à diviser la circonférence en six parties égales, de la manière indiquée par la prop., puis mener des rayons GA, GB, etc. aux points de division, et à l'extrémité de ces rayons, mener des lignes perpendiculaires qui, aux endroits de leurs intersections, détermineraient les angles du pol., le tout tel que démontré au par. (**623**).

(646) **Sco. 3. Probs.** Pour **inscrire ou circonscrire un cercle à un hexagone régulier,** l'on procéderait de la manière déjà indiquée aux pars. (**624**) et (**625**).

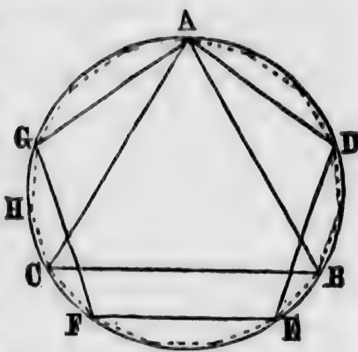
(647) **Sco. 4. Prob.** En joignant les points alternes A, C, E de l'hexagone régulier, il est évident que l'on **a un autre** (627) **moyen d'inscrire un triangle équilatéral dans un cercle.**

(648) **Sco. 5.** Puisque $AB=BC=CG=AG$, la fig. ABCG est un rhombe (**168 Déf.**) ; donc (**394**) $AC^2+BG^2=4AB^2$; et parceque $BG=AB$, $AC^2=3AB^2$; d'où, $AC^2 : AB^2 :: 3 : 1$ ou $AC : AB :: \sqrt{3}\ 1$; de là, **le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon comme la racine carrée de 3 est à l'unité.**

(649) **Sco. 6. Prob.** La combinaison des méthodes indiquées aux pars. (**640**) et (**644**) fournit le moyen de **diviser la circonférence du cercle en quinze parties égales** et par conséquent d'**inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle.**

En effet, après avoir trouvé (**643**) la sixième partie de la circonférence, égale à l'arc sous-tendu par le rayon, si l'on en trouve ensuite (**640**) la dixième partie, il est clair que la différence entre ces arcs sera égale à la quinzième partie de cette même circonférence, puisque $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$.





(650) **D'ailleurs**, l'on verra peut-être d'une manière plus évidente que si ABC est un triangle équilatéral inscrit, et ADEFG un pentagone régulier inscrit, l'arc AGC qui est le tiers et celui AG le cinquième de la circonférence, contiendront respectivement, le premier, cinq, le second, trois des parties égales dont la circonférence entière contiendra quinze. Par suite, retranchant l'arc AG de l'arc AGC, il reste l'arc GC égal aux deux quinzièmes de la circonférence, lequel étant bissecté (**415**) en H, donnera enfin l'arc GH ou CH égal à un quinzième de la circonférence. Menant GH et HC et portant autour du cercle (**225**) des lignes CF, etc. chacune égale à GH ou HC, on aura le quindécagone voulu.

(651) **Sco. 7. Probs.** Ayant inscrit dans un cercle un polygone régulier quelconque; si l'on bissecte (**415**) les arcs sous-tendus par ses côtés, les cordes de ces demi-arcs formeront un nouveau pol. régulier d'un nombre double de côtés. C'est ainsi qu'en **ayant un carré inscrit, l'on peut successivement inscrire des polygones de 8, 16, 32, 64, etc. côtés. Avec l'hexagone on peut former des polygones de 12, 24, 48, 96, etc. côtés. A l'aide du décagone, on aura des polygones de 20, 40, 80, etc. côtés; et au moyen du pentédécagone, l'on peut inscrire des polygones de 30, 60, 120, etc. côtés.**

(652) Il est évident que l'on pourrait inscrire dans un cercle un polygone régulier quelconque, pourvu que l'on pût diviser sa circonférence en un nombre quelconque de parties égales; mais cette division de la circonférence, comme la trisection d'un angle, qui en dépend, est un problème qui n'a pas encore été résolu. **Il n'y aucun**

moyen d'inscrire dans un cercle un heptagone régulier, ou, ce qui revient au même, la circonférence ne peut-être divisée en sept parties égales par aucun moyen jusqu'à présent connu.

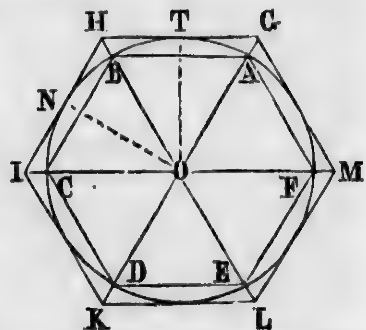
(653) On avait longtemps supposé, qu'à part les polygones déjà enumérés, l'on ne pouvait en inscrire aucun autre par les opérations de la géométrie élementaire, ou ce qui revient au même, par la résolution d'équations du premier et du second dégrés; mais M. Gauss prouva enfin, dans ses "Disquisitiones arithmeticæ," que **la circonférence d'un cercle peut se diviser en un nombre quelconque de parties égales capable de s'xprimer par la formule 2^n+1, pourvu que ce soit un nombre premier, c-à-d. ne pouvant se résoudre en facteurs.**

Le nombre 3 est le plus simple de cette catégorie, étant la valeur de la formule lorsque $n=1$. Le nombre premier suivant est 5, contenu aussi dans la formule lorsque $n=2$. Mais les polygones de 3 et 5 côtés ont déjà été inscrits. Le nombre premier suivant exprimé par la formule est 17; de sorte **qu'il est possible d'inscrire dans un cercle un polygone régulier de 17 côtés, puis de 257 côtés, puis de 6537 côtés, et ainsi de suite, suivant la série 2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1, $2^{16}+1$, $2^{etc.}+1$,** doublant successivement l'exposant.

(654) Il est évident qu'**un polygone inscrit quelconque est moindre que le polygone inscrit ayant un nombre double de côtés,** puisque (84 Cor.) une partie est moindre que le tout.

PROP. LXXII. THÉOR.

(655) **On peut circonscrire à un cercle un polygone régulier quelconque capable de lui être inscrit; et réciproquement, l'on peut inscrire à un cercle un polygone régulier quelconque capable de lui être circonscrit.**

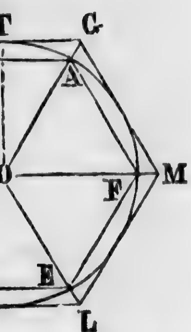


La vérité ce cet énoncé découle assez directement du raisonnement suivi au par. (555).

D'ailleurs, soit ACE un pol. régulier d'un nombre quelconque de côtés inscrit dans un cercle ; prolongeant indéfiniment les rayons OA, OB, etc. et par les points T, N, etc., milieux des arcs AB, BC, menant aux rayons OT, ON, etc., les perpendiculaires GH, HI, etc. à la rencontre des rayons prolongés en G, H, I, etc., la fig. GIL sera un pol. circonscrit semblable au pol. ACE.

En effet, les rayons OT, ON menés du centre aux points milieux des arcs AB, BC sont (**407**) perpendiculaires aux cordes AB, BC, et bissectent ces cordes et les angles au centre sous-tendus par ces cordes. Maintenant GH, HI sont perpendiculaires par constr. aux mêmes rayons OT, ON ; d'où (**150**) GH est parallèle à AB et HI à BC ; les triangles GOH, HOI sont donc équiangles et semblables aux triangles AOB, BOC ; mais OA=OB=etc. ; donc OG=OH=OI=etc. et un cercle décrit du centre O avec un rayon OG passerait par les points G, H, I, etc. Les côtés GH, HI, etc. sont donc des cordes du cercle circonscrit au pol. GIL, et étant sous-tendus par des angles égaux au centre GOH, HOI, sont égaux entre eux.

De plus, les angles G, H, I, etc. du pol. circonscrit sont égaux à ceux A, B, C, etc. du pol. inscrit, à cause des parallèles AB, GH et BC, HI ; donc le pol. circonscrit a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux ; donc il est régulier ; et il est semblable au pol. inscrit ACE, étant composé d'un même nombre de triangles semblables GOH, AOB et HOI, BOC, etc., situés d'une manière correspondante dans chaque figure (**207**).



(656) **En second lieu,** si GIL est un pol. régulier circonscrit au cercle, il est clair, d'après le raisonnement qu'on vient de faire, qu'en menant les rayons OG, OH, etc. aux angles du pol., et joignant ensuite les points A, B, C, où ces rayons rencontrent le cercle, on aura un pol. inscrit ACE semblable au pol. circonscrit au cercle.

(657) **Sco. 1. Probs.** Ce que l'on vient de dire indiquera de suite la méthode à suivre pour **inscrire dans un cercle un polygone régulier quelconque semblable au polygone circonscrit à ce cercle,** ou pour **circonscrire à un cercle un polygone régulier semblable au polygone inscrit dans ce cercle.**

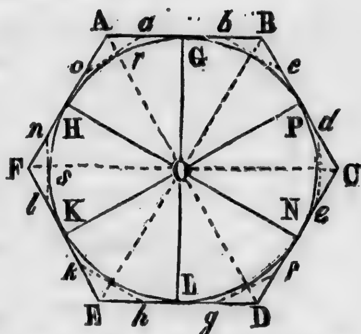
(658) **Sco. 2.** Il est clair, puisque OT et ON bissectent respectivement (**655**) les côtés égaux GH, HI, du pol., que HN+HT=HT+TG=HG, l'un des côtés du polygone.

D'ailleurs, HN, HT sont deux tangentes menées d'un point à un cercle; ce qui (**493** ou **506**) les rend égales; or HT=TG; donc HG=2HT=HT+HN, comme auparavant.

PROP. LXXIII. THÉOR.

(659) **Etant donné un polygone régulier quelconque AEC circonscrit à un cercle, on demande à circonscrire à ce cercle un polygone régulier** *a b c d e* **etc. ayant un nombre de côtés double du premier.**

Nous avons démontré (**625**) que pour circonscrire un pol. rég. quelconque à un cercle, il suffit de diviser la circonférence en autant de parties égales que le pol. a de côtés, mener ensuite des rayons aux points de division, et aux extrémités de ces rayons, mener des perpendiculaires ou tangentes pour déterminer le pol. voulu.



Or, le cercle GKN est déjà divisé en parties égales aux points G, H, K, etc. puisque les angles GOH, HOK, etc. sont (**625**) égaux. Bissectant ces angles égaux en *r*, *s*, etc. ce qui bissectera en même temps (**405**) les arcs GH, HK, etc. et menant aux extrémités *r*, *s*, etc. des rayons O*r*, O*s*, etc. les tangentes *oa*, *bc*, *de*, etc., on aura le pol. rég. demandé *a b c d e* etc ayant un nombre de côtés double de celui du pol. donné ABCDE.

(**660**) **Sco. 1.** Il est clair que le pol. AEC est plus grand en surface que le pol. *a b c d* etc, puisque les triangles A *o a*, B *c b*, etc. compris dans le premier sont en dehors du second ; et si l'on circonscrit au cercle un pol. d'un nombre de côtés double de celui du pol. *a b c d*, l'on voit de même que sa surface sera plus petite que celle du pol. *a b c d*; donc, en général, **tout polygone régulier circonscrit est plus grand qu'un polygone régulier circonscrit ayant un nombre double de côtés.**

(**661**) **Sco. 2.** Il est clair aussi que le pol. AEC est plus grand en perimètre que le pol. *a b c d*, puisque le côté *a o* du dernier est plus petit que la somme des parties correspondantes A *a*, A *o*, du premier, la somme de deux côtés quelconques d'un triangle étant (**161**) plus grande que le troisème côté.

Si l'on circonscrivait au cercle un troisème pol. ayant un nombre de côtés double de celui du pol. *a b c d*, l'on prouverait de même que le périmètre de ce dernier est plus petit que celui du second, et ainsi de suite; donc, en général, **tout polygone régulier circonscrit est plus grand en périmètre qu'un polygone circonscrit ayant un nombre double de côtés.**

(**662**) **Sco. 3.** Il n'est pas moins évident que **tout polygone régulier inscrit est plus petit en périmètre qu'un polygone inscrit ayant un nombre double de côtés.**

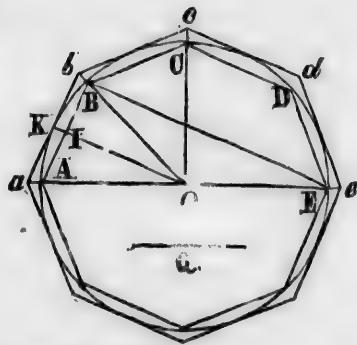
(663) **Sco. 4.** On a vu (603) que la surface d'un triangle est égale à son périmètre multiplié par le demi-rayon du cercle inscrit, et l'on voit de même que **la surface d'un polygone régulier quelconque AEC est égale à son périmètre multiplié par le demi-rayon du cercle inscrit, c'est-à-dire par le demi-rayon droit** (175 **Déf.** c[t] 555 3°) **du polygone**; car, tous les triangles AOB, BOC, etc. sont égaux, puisqu'ils ont des bases égales AB, BC, etc. et des hauteurs égales OG, OP, etc. Mais la surface du triangle $AOB = AB \times \frac{1}{2}OG$ (348) et celle du triangle $BOC = BC \times \frac{1}{2}OP$ ou $\frac{1}{2}OG$; donc la surface des deux triangles pris ensemble est égale à $(AB+BC) \times \frac{1}{2}OG$; et en continuant ainsi la même opération pour les autres triangles COD, etc., on trouve enfin la surface entière du polygone égale à $(AB+BC+CD+\text{etc.}) \times \frac{1}{2}OG$; donc, etc.

PROP. LXXIV. THÉOR.

(664) **L'on peut toujours faire deux polygones réguliers** ABCD etc. *abcd* etc. **d'un même nombre de côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, différant l'un de l'autre d'une quantité moindre qu'aucune surface assignable.**

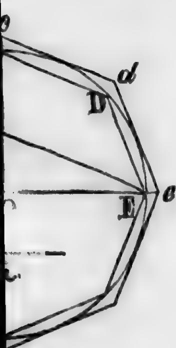
Soit Q le côté d'un carré égal à la surface donnée. Bissectez AC, quart de la circonférence, et procédez ainsi, bissectant toujours l'un des arcs formés par la dernière bissection, jusqu'à ce que vous obteniez un arc dont la corde AB soit moindre que Q. Comme cet arc sera une partie exacte de la circonférence, si l'on applique des cordes AB, BC, etc. chacune égale à AB, la dernière terminera en A, et l'on aura un polygone régulier ABCD etc. inscrit dans le cercle.

Décrivant maintenant (**657**) autour du cercle un pol. $a\,b\,c\,d$ etc. semblable au premier, la différence entre ces deux polygones sera moindre que le carré de Q. En effet, des points a et b menez les lignes a O, b O, au centre O ; elles passeront (**655**) par les points A et B. Menez aussi OK au point de contact K ; elle bissectera (**407**) AB en I, et lui sera perpendiculaire, puisque (**466**) elle est perpendiculaire à la tangente $a\,b$ qui est parallèle à AB. Prolongez AO jusqu'en E et menez BE. Soit P le polygone circonscrit et p le pol. inscrit ; alors, parceque les triangles a O b, AOB sont des parties correspondantes de P et p, l'on aura (**73. Ax.**) $a\text{O}b : \text{AOB} :: \text{P} : p$; mais les triangles étant semblables donnent (**552**) $a\text{O}b : \text{AOB} :: \text{O}a^2 : \text{OA}^2$ (ou OK^2) ; d'où il suit (**75. Ax.**) que $\text{P} : p :: \text{O}a^2 : \text{OA}^2$ (ou OK^2). De plus, puisque les triangles OaK, EAB sont semblables, leurs côtés KO, BE étant respectivement parallèles, à cause des angles droits AIO, ABE, (**444**) l'on a $\text{O}a^2 : \text{OK}^2 :: \text{AE}^2 : \text{EB}^2$; d'où, $\text{P} : p :: \text{AE}^2 : \text{EB}^2$ ou par conversion (**98**) $\text{P} : \text{P} - p :: \text{AE}^2 : \text{AE}^2 - \text{EB}^2$ ou : AB^2.



Mais P est moindre (**660**) que le carré décrit sur le diamètre AE ; donc P—p est moindre que le carré décrit sur AB, c-à-d. moindre que le carré donné sur la ligne Q ; de là, la différence entre les polygones circonscrit et inscrit peut toujours être faite moindre qu'une surface donnée, si petite quelle soit.

(**665**) **Sco. 1.** Un polygone régulier circonscrit ayant un nombre donné de côtés, est plus grand que le cercle, parceque le cercle ne forme qu'une partie du polygone ; et pour une raison semblable, le polygone inscrit est moindre que le cercle. Mais en augmentant le nombre de côtés du pol.



circonscrit, le polygone diminue en surface (660) et par conséquent sa surface se rapproche de celle du cercle ; et en augmentant le nombre de côtés du polygone inscrit, le polygone augmente (654) et se rapproche aussi du cercle.

Maintenant, si **l'on augmente indéfiniment le nombre de côtés des polygones circonscrit et inscrit, la longueur de chaque côté deviendra indéfiniment petite, et les polygones deviendront enfin égaux l'un à l'autre et en conséquence égaux au cercle.**

Car, si les polygones ne deviennent pas enfin égaux, soit D leur plus petite différence ; or, on vient de démontrer (664) que la différence entre les polygones inscrit et circonscrit peut-être faite moindre qu'aucune quantité assignable, c-à-d., moindre que D ; de là, la différence entre les polygones serait en même temps égale à D et moindre que D, ce qui est absurde ; donc les polygones deviennent enfin égaux. Mais lorsqu'ils sont égaux, l'un à l'autre, chacun d'eux doit être égal au cercle, puisque le polygone circonscrit ne peut entrer dans le cercle et que celui qui lui est inscrit ne peut en sortir.

(666) **Sco. 2.** Puisque le polygone circonscrit a le même nombre de côtés que le polygone correspondant inscrit, et que les deux polygones sont réguliers, ils sont (555) semblables (**207 Déf.**) et en conséquence, quand ils deviendront égaux, ils coincideront exactement et auront un périmètre commun. Mais comme les côtés du polygone circonscrit ne peuvent tomber en dedans du cercle, et que ceux du polygone inscrit ne peuvent tomber en dehors, il suit que **les périmètres des polygones se réuniront sur la circonférence du cercle et lui deviendront égaux en longueur.**

(667) **Sco. 3.** Lorsque le nombre des côtés du polygone inscrit est indéfiniment augmenté, et que le polygone coincide avec le cercle, la ligne OI menée du centre O perpendiculaire au côté du polygone, deviendra un rayon du cercle, et une partie quelconque ABCD du polygone deviendra le secteur OAKBC, et la partie AB+BC du périmètre deviendra l'arc AKBC.

(668) **Sco. 4.** Le problème de la quadrature du cercle consiste à trouver un carré égal en surface à celle d'un cercle dont on connait le rayon. Or, il a été démontré (**431**) que le cercle est équivalent en surface à un triangle ayant pour hauteur le rayon et pour base une ligne égale en longueur à la circonférence du cercle ; et ce triangle peut-être réduit (**291**) en un rectangle équivalent, puis (**376** ou **535** 2°) en un carré.

Carrer le cercle n'est donc **autre chose que trouver la circonférence quand on connait le rayon ; et pour ce faire, il suffit de connaître le rapport de la circonférence à son rayon ou à son diamètre**

Jusqu'à présent, le rapport en question n'a jamais été déterminé qu'approximativement ; mais l'approximation a été portée si loin, qu'une connaissance du rapport exact n'offrirait aucun avantage réel sur celui du rapport approximatif. En conséquence, ce problème qui occupa si profondément les géomètres, lorsque leurs moyens de rapprochement étaient moins parfaits, est maintenant réduit à ces questions oiseuses dont personne ne s'occupera, pourvu qu'il possède la moindre teinture de science géométrique.

Archimède montra que le rapport du diamètre à la circonférence est compris entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{10}{70}$; de là, $3\frac{1}{7}$ ou $\frac{22}{7}$ offre de suite une approximation assez correcte du rapport voulu ; et la simplicité de ce premier rapprochement a fait que l'usage en est devenu très général. **Métius**, pour le même rapport trouva la valeur $\frac{355}{113}$ qui est beaucoup plus exacte que la dernière. Enfin d'autres calculateurs trouvèrent cette même valeur, développée jusqu'à un certain ordre de décimales, de 3.141,592,653,589,793,2 etc.

En 1590, Ceulen qui vivait du temps de Métius étendit le calcul jusqu'à 36 chiffres que l'on fit graver sur sa tombe. Il parvint à ce résultat en calculant les cordes d'arcs successifs, dont chacun était moitié du précédent, le dernier arc dans ce cas étant le côté d'un polygone de 36,893,488,147,419,103,232, côtés.

La méthode de calculer fut ensuite de beaucoup simplifiée par Snell qui porta l'approximation jusqu'à 55 chiffres, à l'aide d'un polygone n'ayant que 5,242,880 côtés.

Par d'autres mathématiciens le calcul fut continué, atteignant successivement, pendant le dernier siècle, 75, 100, 128 et 140 décimales.

Bien que Lambert en 1761, et plus tard Legendre, dans ses éléments de géométrie, aient prouvé que le rapport du diamètre à la circonférence ne peut être exprimé en nombres ; le désir de satisfaire ceux qui cherchaient encore à obtenir l'expression exacte de ce rapport, engagea d'autres mathématiciens à continuer d'ajouter à ces chiffres. En 1846 l'on obtint correctement 200 décimales et l'année suivante 250. En 1851, le nombre fut porté à 315, puis à 350. M. Shanks porta bientôt ce nombre a 527 décimales et en 1853, à 607 décimales.

Lorsqu'il devint évident que l'expression arithmétique était impossible, plusieurs espérèrent encore obtenir le rapport par construction géométrique ; mais l'on admet généralement aujourd'hui que ce dernier moyen est impraticable, et il faut avouer qu'il n'a résulté que peu d'avantage du temps et du travail énormes dévoués à ce fameux problème.

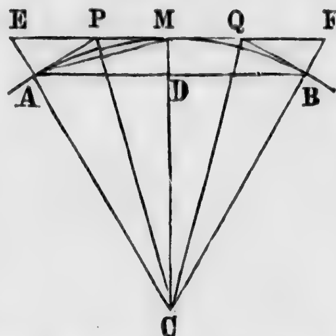
L'Académie des sciences en 1775 et bientôt après, la Société Royale de Londres, pour décourager cette recherche et d'autres aussi futiles, refusa d'examiner par la suite tout travail ayant trait à la quadrature du cercle, la trisection d'un angle, la duplication du cube et le mouvement perpétuel.

Une approximation de 600 chiffres décimaux et même de moins équivaut à une exactitude parfaite, puisque comme on la déjà dit (53), il suffit d'en faire entrer 17 en compte pour éviter une erreur de la millième partie d'un pouce sur les 200 millions de lieues qui forment la longueur de la circonférence de d'orbite de la terre autour du soleil ; et dans aucun cas on ne connait d'une manière plus exacte la racine d'une puissance imparfaite.

Le problème suivant indiquera une des méthodes élémentaires les plus simples d'obtenir ces rapprochements.

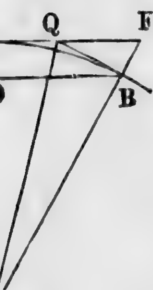
PROP. LXXV. PROB.

(669) Etant données la surface d'un polygone régulier inscrit, et celle d'un polygone semblable circonscrit; trouver les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit ayant un nombre double de côtés.



Soit AB un côté du pol. inscrit donné, EF parallèle à AB, un côté du pol. correspondant circonscrit, C le centre du cercle. Si on mène la corde AM et les tangentes AP, BQ, AM sera (659) un côté du pol. inscrit ayant un nombre double de côtés, et (658) AP+PM=2PM (ou PQ) sera un côté du pol. semblable circonscrit. Maintenant, comme la même construction aura lieu à chacun des angles égal à ACM, il suffira de considérer ACM par lui même; les triangles ACD, ACM étant évidemment l'un à l'autre comme les polygones entiers dont ils font partie (622 et 102). Soit donc A la surface du pol. inscrit dont le côté est AB, B celle du pol. semblable circonscrit, A′ la surface du pol. dont le côté est AM, et B′ celle du pol. semblable circonscrit. A et B sont donnés pour trouver A′ et B′.

En premier lieu, les triangles ACD, ACM ayant le sommet commun A, sont l'un a l'autre (**344**) comme leurs bases CD, CM; ils sont aussi entre eux comme les polygones A et A′ dont ils font partie; d'où (**75 Ax.**) A : A′ :: CD : CM. Puis, les triangles CAM, CME, ayant le sommet commun M sont entre eux comme leurs bases CA, CE; ils sont aussi entre eux comme les polygones A′ et B dont ils



font partie ; donc $A' : B :: CA : CE$. Mais puisque AD et ME sont parallèles, l'on a $CD : CM :: CA : CE$; de là, (**75 Ax.**) $A : A' :: A' : B$; d'où, le polygone A', l'un de ceux qu'on demande, est moyen proportionnel entre les deux polygones A et B, et en conséquence $A' = \sqrt{A \times B}$.

En second lieu, la hauteur CM étant commune, le triangle CPM est au triangle CPE comme PM est à PE ; mais puisque CP bissecte (**622**) l'angle MCE, l'on a (**541**) $PM : PE :: CM : CE :: CD : CA :: A : A'$; de là, $CPM : CPE :: A : A'$ et en conséquence (**95**) $CPM : CPM+CPE$ (ou CME) $:: A : A+A'$. Mais CMPA ou 2CPM et CME sont l'un à l'autre comme les polygones B et B', dont ils font partie ; donc $B' : B :: 2A : A+A'$. Or, A' a déjà été déterminé ; cette nouvelle proportion servira donc à déterminer B' et donnera $B' = \frac{2A.B}{A+A'}$; et de cette manière, au moyen des polygones A et B il est facile de trouver les polygones A' et B' ayant un nombre double de côtés.

PROP. LXXVI. PROB.

(**670**) **Trouver le rapport approximatif de la circonférence au diamètre.**

Soit le rayon du cercle $=1$; le côté du carré inscrit sera $=\sqrt{2}$ (**638**) et celui du carré circonscrit sera égal au diamètre 2 ; de là, la surface du carré inscrit est 2 et celle du carré circonscrit est 4. Mettant alors $A=2$ et $B=4$, on trouvera, par la dernière proposition, l'octogone inscrit $A' = \sqrt{8} = 2.8284271$, et l'octogone circonscrit $B' = \frac{16}{2+\sqrt{2}} = 3.3137085$. Ayant de cette manière déterminé les octogones inscrit et circonscrit, on déterminera facilement à l'aide de ces derniers, les polygones ayant un nombre double de côtés. On n'a dans ce cas qu'à poser $A=2.8284271$, $B=3.3137085$; on trouvera $A' = \sqrt{A.B} = 3.0614674$, et $B' = \frac{2A.B}{A+A'} = 3.1825979$.

Ces polygones de 16 côtés fourniront à leur tour le moyen de trouver les polygones de 32 côtés ; et l'on peut poursuivre l'opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de différence entre les polygones inscrit et circonscrit, ou au moins jusqu'au nombre de décimales où se termine le calcul, c-à-d. jusqu'à la septième décimale dans cet exemple. Arrivés à ce point, on en concluera que le dernier résultat exprime la surface du cercle, lequel, puisqu'il doit toujours se trouver entre les polygones inscrit et circonscrit et parceque ces polygones s'accordent jusqu'à un certain ordre de décimales, doit nécessairement s'accorder avec chacun d'eux jusqu'à ce même nombre de décimales.

Nous donnons ici le calcul de ces polygones continué jusqu'à ce qu'ils aient sept décimales communes.

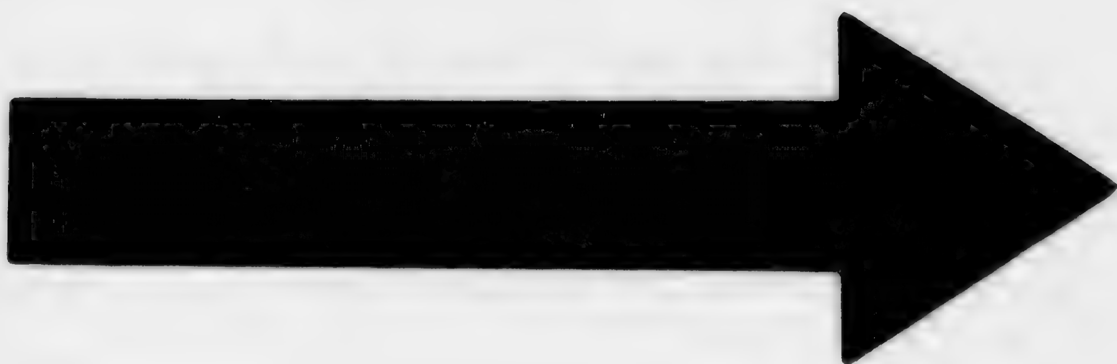
Nombre de côtés.	Polygone inscrit.	Polygone circonscrit.
4	2.0000000	4.0000000
8	2.8284271	3.3137085
16	3.0614674	3.1825979
32	3.1214451	3.1517249
64	3.1365485	3.1441184
128	3.1403311	3.1422236
256	3.1412772	3.1417504
512	3.1415138	3.1416321
1024	3.1415729	3.1416025
2048	3.1415877	3.1415951
4096	3.1415914	3.1415933
8192	3.1415923	3.1415928
16384	3.1415925	3.1415927
32768	3.1415926	3.1415926

D'où l'on conclut que la surface du cercle est égale à 3. 1415926 quand le rayon est 1.

Comme il pourrait exister un doute sur l'exactitude du dernier chiffre décimal, par suite d'erreurs provenant des parties omises, l'on fera remarquer que le calcul a été continué avec une décimale de plus pour que le dernier résultat ici donné fût absolument correct jusqu'à la septième décimale près.

(671) **Cor.** Puisque la surface du cercle est égale (431) à la demi-circonférence multipliée par le rayon, la demi-circonférence doit être 3.1415926 quand le rayon est 1; ou la circonférence entière doit être 3.1415926 quand le diamètre est 1; de là, le rapport de la circonférence au diamètre que l'on designera par 𝔓 est égale à 3.1415926. Le nombre 3.1416 est celui qu'on employe généralement.

(672) **Sco.** On a déjà eu occasion de parler (53) de **l'incommensurabilité du diamètre et de la circonférence du cercle**, et l'on voit évidemment qu'en continuant à doubler le nombre des côtés des polygones, on ne fait qu'approcher de plus en plus du rapport réel, sans pouvoir jamais l'atteindre; car, quelque soit le dégré de rapprochement auquel l'on parvienne, il sera toujours possible (659) de continuer à doubler le nombre des côtés du polygone sans jamais en finir, et sans autre résultat que celui d'ajouter continuellement aux 600 chiffres décimaux déjà trouvés sans arriver jamais à une limite; de même que pour le côté et la diagonale d'un carré (398) l'on trouve après chaque subdivision un nouveau reste, sans pouvoir jamais arriver au rapport exact entre les quantités données.



PROBLÈMES.

APPLICATION

DES

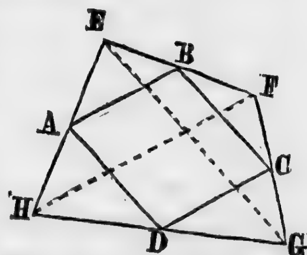
PROPOSITIONS PRÉCÉDENTES

A LA SOLUTION

DE QUELQUES PROBLÈMES.

---

(673) Prob. Inscrire (184 Déf.) un parallélogramme ABCD dans un quadrilatère quelconque EFGH.

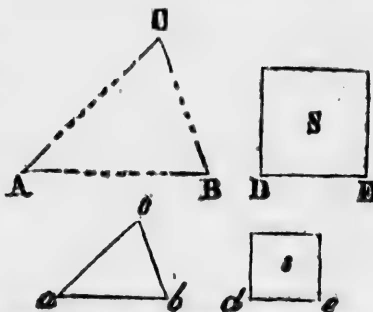


A cet effet, joignez les points milieux A, B, C, D des côtés du quadrilatère donné, et le problème sera résolu.

Car, la construction donne (519) BC et AD respectivement parallèles à la diagonale EG, base commune des triangles EFG, EHG; et on a, de même,

AB, DC parallèles à la diagonale HF, base commune des triangles HEF, HGF.

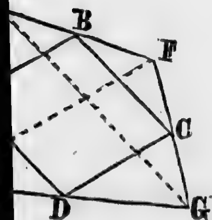
(674) Prob. Etant donnés la surface et les angles d'un triangle quelconque ; trouver les côtés ?



Soient A, B, C les angles donnés, et S la surface, sous forme d'un carré équivalent au triangle. Supposons à l'un quelconque AB des côtés cherchés, une longueur arbitraire *a b*, et avec cette longueur et les angles donnés, construisons (266) un triangle *a b c*. Ce dernier sera évidemment équiangle et par conséquent semblable à ABC. Réduisons maintenant (376) ce second triangle en un carré équivalent *s*, et on aura (552) $s : S : ab^2 : AB^2$, ou (104) $\sqrt{s} : \sqrt{S} :: ab : AB$; c-à-d. (40) le côté *d e* du carré *s* (:) est au côté DE du carré S (::) comme le côté supposé *a b* (:) est au côté requis AB. Donc AB est quatrième proportionnelle à *d e*, DE et *a b*, et se trouvera par la méthode du pagraphe (516).

(675) Sco. 1. Si, dans le dernier problème, on connaissait le nombre d'unités de surface (24) du triangle ABC et la racine ou côté (40 et 334) d'une de ces unités ; on procéderait, tout de même, à poser la ligne *a b* composée d'un nombre arbitraire d'unités linéaires, chacune égale à cette racine, et à faire sur *a b* un triangle équiangle à ABC. On aurait ensuite à touver (571 Lem. 9°, et 344) la surface relative de *a b c* et à faire surf. abc : surf. $ABC :: ab^2 : AB^2$. Extrayant alors la racine carrée de AB^2, on obtiendrait AB, longueur d'un des côtés du triangle, et par suite (266) les autres côtés voulus.

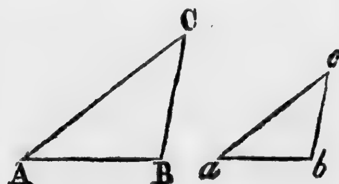
(676) Sco. 2. Si la nature, c-à-d. la grandeur de l'unité de surface était inconnue ; on prendrait *a b* égale en lon-



gueur à un nombre arbitraire d'unités quelconques de mesure linéaire; et sur $a\,b$, faisant comme auparavant, un triangle équiangle à ABC, on mesurerait la hauteur de ce triangle, au moyen de la même échelle qui aurait servi à déterminer sa base. Il y aurait ensuite à trouver (**344**) la surface de ce triangle et à poser $a\,b\,c : ABC :: a\,b^2 : AB^2$; c-à-d., le nombre calculé d'unités de surface dans $a\,b\,c$ (:) au nombre donné d'unités de surface dans ABC (::) comme le carré du nombre d'unités linéaires dans $a\,b$ (:) au carré du nombre d'unités linéaires dans AB. La racine carrée du résultat serait évidemment la longueur de AB en unités linéaires de dimensions égales à la racine ou côté d'une des unités de surface données.

(**677**) **Sco. 3.** Il est clair aussi qu'on obtiendrait une **solution numérique du prob.** (**674**) en mesurant (**571, Lem** 9°) les côtés *de* et DE des carrés *s* et S, au moyen d'une même unité de mesure, de longueur arbitraire, pour faire ensuite $e\,d : ED :: a\,b : AB$; car (**552**) $e\,d^2$ ou surf. $a\,b\,c : ED^2$ ou surf. $ABC :: a\,b^2 : AB^2$; ce qui donne (**104**) $e\,d : ED :: ab : AB$.

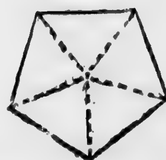
(**678**) **PROB. Etant donnés la surface d'un triangle quelconque ABC et le rapport entre ses côtés; trouver ces côtés.**



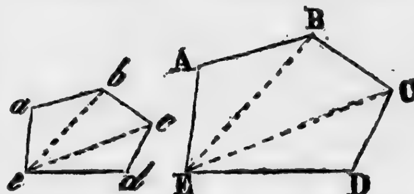
Soient M : N : R les lignes ou nombres exprimant les termes du rapport. Il suffira de se servir de ces termes mêmes (**571 Lem.**) ou de toutes autres longueurs ayant entre elles le rapport donné, pour construire un triangle $a\,b\,c$, dont les angles seront par là même (**522**) respectivement égaux à ceux du triangle ABC; ce qui réduit le prob. à celui du par. (**674**).

(**679**) **PROB. Si on avait à trouver le côté d'un polygone régulier quelconque lorsqu'on en connait la surface;** il est évident que le prob. se réduirait à celui du par. (**674**)

puisque (622) tout pol. rég. est composé de triangles isocèles égaux en toutes choses; et on obtiendrait la surface d'un de ces triangles en divisant la surface entière du pol. par le nombre de côtés.



(680) **PROB. S'il s'agissait d'un polygone irrégulier quelconque AD, dont on eut la surface, et** les angles formés, tant par les côtés eux mêmes, que par les côtés et diagonales du pol., c-à-d. **les angles des triangles composants,** ABE, EBC, etc., (car, il ne suffit pas comme on l'a vu (526) de connaître les angles formés par les côtés du pol. irrégulier pour en déterminer la forme ou le rapport entre les côtés) **pour en obtenir les côtés**; l'on procéderait encore à supposer à l'un quelconque ED des côtés du pol. une longueur arbitraire ed sur laquelle, comme base, on construirait par la méthode du par. (551) un pol. ad équiangle et par conséquent semblable à AD. Ayant ensuite calculé (571 Lem. 9°) la surface de ad, on ferait surf. ad: surf. AD :: $ed^2 : ED^2$ dont on extrairait la racine carrée pour avoir ED.

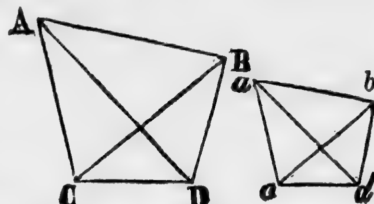


(681) **PROB.** Il serait aussi aisé d'**obtenir les côtés d'un polygone irrégulier quelconque, au moyen de sa surface et du rapport entre les côtés de ses triangles composants;** puisqu'il suffirait (678) de se servir des termes mêmes du rapport, ou de longueurs proportionnelles à ces termes, afin de déterminer les angles du pol. et par suite (680) les dimensions de ses côtés.

(682) **Rem.** Dans ces problèmes, pour éviter les répétitions, et la nécessité d'indiquer, dans chaque cas, la différence entre les procédés à suivre afin d'obtenir une construction purement géométrique ou une solution numérique; il suffira de se rappeler ce qui a été dit au par. (571 Lem.)

sur la manière de traduire les données, pour les rendre propres aux opérations requises.

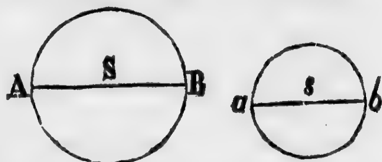
(683) **PROB. Soit à déterminer dans un quadrilatère quelconque AD trois de ses côtés, lorsqu'on n'a pour données que le quatrième côté AB et les angles en C et D opposés à ce côté, formés par les trois côtés inconnus et les deux diagonales.**



Il s'agit encore ici d'une hypothèse à faire, et comme on voit, c'est évidemment sur le côté qui est adjacent aux angles donnés qu'il faut opérer, pour obtenir un résultat quelconque. Or ce côté est CD; et il est clair que si on lui assigne une valeur quelconque cd, et que sur cd, comme base, on forme les triangles cda, cdb équiangles à CDA, CDB, pour mener ensuite ab, on aura un quadrilatère ad en tout semblable à AD. Mesurant alors ab, on fera (548) $ab : AB :: cd : CD :: bd : BD :: ac : AC$.

(684) **PROB. Etant donnée la surface d'un cercle; trouver son diamètre.**

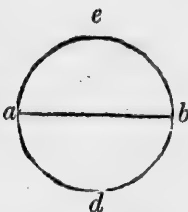
On se rappellera (671) que quand le diamètre d'un cercle est 1, sa circonférence est 3.14159 etc., et sa surface est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon ou le quart du diamètre; or $3.1416 \times \frac{1}{4} = .7854$; c-à-d. que la décimale .7854 représente la surface d'un cercle dont le diamètre est égal à l'unité. Mais les cercles sont (557) des figures semblables, et leur surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs diamètres ou autres lignes homologues.



Soit S le cercle donné et s celui dont le diamètre ab $=1$ et la surface $=.7854$. On fera surface s : surface S :: $ab^2 : AB^2$, ou $.7854 : S :: 1^2 : AB^2$; mais $1^2=1$ et on ne change en rien une quantité donnée en la multipliant par 1; donc $AB^2 = S \div .7854$ ou $\frac{S}{.7854}$;

c-à-d. que le diamètre d'un cercle quelconque s'obtient en divisant sa surface par .7854 et en prenant la racine carrée du quotient.

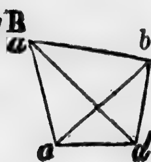
(685) **REM.** Cette manière de trouver le diamètre d'un cercle dont on connait la surface, n'est autre que celle de trouver les côtés d'un triangle dont on connait les angles et la surface ; car il est clair qu'on pourrait supposer à $a\,b$ une longueur quelconque, calculer ensuite la surface s et faire, comme auparavant, $s : S :: a\,b^2 : AB^2$.

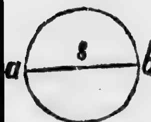


(686) **PROB.** Il est à peine nécessaire de dire, puisque (**671**) le rapport du diamètre à la circonférence est **1 : 3.1416**, que pour **trouver la circonférence d'un cercle dont on connait le diamètre,** il n'y a qu'à poser $1 : 3.1416 :: a\,b : a\,d\,b\,e$. On obtiendrait encore le résultat désiré, mais avec moins d'exactitude, en se servant du rapport 7 : 22 qu'on doit à Archimède (668) ou de celui de Métius, 113 : 355 ; mais on ne manquera pas d'observer en même temps que le premier rapport est celui qui exige le moins de travail, puisqu'un de ses termes est l'unité ; ce qui, dans le cas actuel, exempte la division et réduit l'opération à une simple multiplication ; car, $\frac{3.1416 \times a\,b}{1} = 3.1416 \times a\,b = a\,d\,b\,e$, tandisque l'emploi des autres rapports exige qu'on multiplie d'abord par 22, pour diviser ensuite par 7 ou qu'on multiplie d'abord par 355 pour diviser ensuite par 113.

(687) **PROB.** On conçoit aussi que s'il s'agit de **trouver le diamètre** $a\,b$ **d'un cercle dont on connait la circonférence** ; on a seulement à renverser (93) les termes du rapport pour avoir $3.1416 : 1 :: a\,b\,d\,e : a\,b$.

(688) **PROB. On a les angles d'un triangle quelconque pour en déduire le rapport entre les côtés.** A cet effet, il suffit de supposer (**17**) à l'un des côtés une valeur quelconque, afin d'en obtenir par construction la valeur corres-

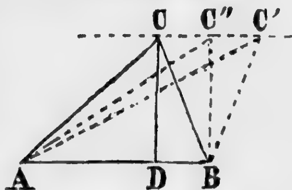




pondante des autres côtés, et de là le rapport entre eux (**525**).

(689) **PROB. Trouver le rapport entre les côtés d'une figure rectiligne quelconque, quand on ne connait que les angles des triangles composants,** n'est autre chose que répéter, autant de fois qu'il y a de triangles, l'opération indiquée au dernier par. On supposera donc à l'un quelconque des côtés de la fig. donnée, une longueur arbitraire, et sur ce côté, comme base, on construira (**551**) avec les angles donnés, une fig. qui lui sera équiangle et semblable, et dont les côtés seront (**548**) entre eux dans le rapport voulu. Mesurant ensuite chacun des côtés ainsi obtenus, au moyen d'une échelle (**571 Lem.** 6°) de parties égales, on obtiendrait une expression numérique pour la longueur relative de chaque côté de la fig., c-à-d. pour chacun des termes du rapport cherché.

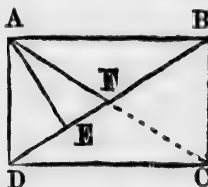
(690) **PROB. Etant donnés la surface et deux côtés d'un triangle quelconque; trouver le troisième côté.**



Soient AB, CB les côtés donnés; et supposons (**17**) que ABC soit le triangle voulu. On obtiendra CD, hauteur du triangle, en divisant (**349**) sa surface par sa demi-base. Dans le triangle BDC, on aura alors en D un angle droit, et deux côtés CD, CB, pour trouver (**321**) l'angle ABC, et par suite (**243**) le côté AC.

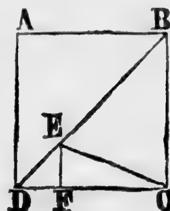
Observons que le triangle ABC′ répond aussi (**286** et **320**) au problème, CC′ étant parallèle à AB et l'angle ABC′ supplément de ABC; et il y a toujours de même deux réponses, si ce n'est dans le cas où la surface divisée par l'un des côtés donne une longueur égale à l'autre côté. Dans ce dernier cas, il est clair qu'il n'y a qu'un seul triangle ABC″ qui réponde au prob. et que ce triangle est rectangle.

(691) **PROB. Dans un rectangle quelconque AC, on a la surface et la diagonale DB pour trouver les côtés.**



La perpendiculaire AE est égale (**349**) à la demi-surface (**270**) ADB du rectangle, divisée par la demi-base ou diagonale DB. On a vu (**283**) que les diagonales d'un parallélogr. se bissectent mutuellement; et ces diagonales sont évidemment égales dans le rectangle; donc la demi-diagonale AF=DF et le triangle DFA est isocèle. Dans le triangle rectangle AEF, on a donc AE, AF pour trouver (**321**) l'angle AFD, et par suite, AD et AB.

(692) **PROB. Trouver le côté d'un carré AC, quand on ne connait que la différence DE entre le côté et la diagonale.**

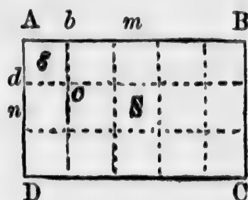


Puisque DE=DB−BC, on a BE=BC. Le triangle EBC est donc isocèle; l'angle EBC étant égal à la moitié d'un angle droit, et chacun des angles à la base, à la demi-somme de deux angles droits moins l'angle EBC. Ayant mené EF parallèle à BC et par conséquent perpendiculaire à DC, on à $EF=DF=\sqrt{\frac{1}{2}DE^2}$ (**310**) c-à-d. égale au côté d'un carré dont DE serait la diagonale. Dans le triangle rectangle EFC, on a donc un côté EF et l'angle FEC égal à son alterne ECB, pour trouver FC. Enfin DF+FC=DC le côté voulu.

(693) **REM.** On ne doit pas s'attendre à trouver dans les démonstrations et explications, ici données, des indications complètes de tous les détails de la méthode à suivre dans chaque cas, soit pour obtenir une solution numérique, ou pour résoudre un problème par construction. Les dimensions de ce traité ne le permettent pas; et d'ailleurs il est bon que l'étudiant ait à se reposer un peu sur ses propres ressources, pour s'habituer de bonne heure à faire lui-même, l'application des propositions précédentes, à la solution des problèmes qu'on pourrait lui soumettre, ou de ceux qu'il pourrait lui-même imaginer.

L'étudiant fera bien aussi de tenter lui-même la solution de chacun des problèmes ici donnés; s'aidant, au besoin, soit d'une simple inspection de la fig. ou, si cela ne suffit pas, de la lecture d'une partie seulement du texte.

(694) **PROB. Etant donnés la surface d'un rectangle quelconque AC et le rapport $m:n$, entre ses côtés; trouver ces côtés.**

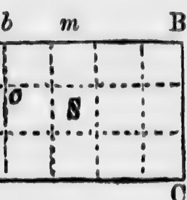


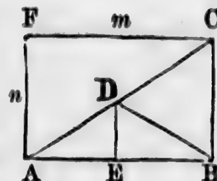
Si les termes du rapport contenaient des fractions, on les réduirait d'abord en unités égales de la plus petite espèce, pour faire disparaitre les dénominateurs; c'est ainsi que $1\frac{1}{4}:3\frac{1}{8}$ donnerait $\frac{10}{8}:\frac{25}{8}$ ou $10:25$, et $\frac{3}{4}$ à $1\frac{1}{4}$ donnerait $\frac{3}{4}$ à $\frac{5}{4}$ ou $3:5$. Cela posé, il y aurait à faire le produit $m\times n$ des termes du rapport et à diviser par ce produit la surface donnée S, pour avoir la surface s d'une unité du rapport. Cette dernière est un carré Ac, à cause de Ab=Ad et pourrait être soit plus grande ou plus petite qu'une unité de la surface S; mais, dans l'un ou l'autre cas, il est clair que la racine carrée du nombre d'unités de surface contenues dans s donnerait la longueur du côté du carré Ac en unités linéaires de l'espèce voulue; et ce dernier nombre multiplié respectivement par m et n donnerait AB et AD, côtés du rectangle.

Tout ce que'on vient de dire se résume comme suit, savoir: trouver $s=\frac{S}{m\times n}$; puis, faire $AB=\sqrt{s}\times m$ et $AD=\sqrt{s}\times n$.

Observons que le problème pourrait aussi se résourdre, par la méthode du par. (681), et en général il y a plus d'une manière de résoudre un grand nombre de problèmes ; comme on a pu d'ailleurs s'en convaincre dans l'étude de ce traité.

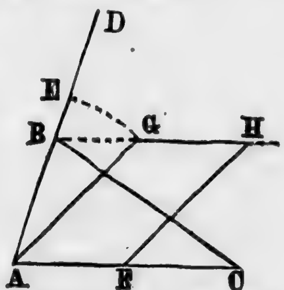
(695) **PROB.** Soit à **trouver les côtés d'un rectangle** BF **dont on connait la différence** AD **entre un côté** BC **et la diagonale** AC **et le rapport** m **à** n, **entre les côtés.**





Ayant mené DE parallèle BC, on aura le triangle rectangle AED semblable à ABC; ce qui donnera AE : DE :: m : n. Avec ce rapport, on trouvera facilement les angles en A et D et par suite, les côtés AE, DE. Maintenant ayant joint DB, le triangle DCB sera isocèle, à cause de DC=BC par hyp.. L'angle ACB est égal à son alterne ADE et chacun des angles CDB, CBD à la base, à la moitié de deux angles droits moins DCB. L'angle EDB= son alterne CBD. On a donc, dans le triangle rectangle DEB, un côté DE et les angles, pour trouver EB; et EB+AE=AB, l'un des côtés requis.

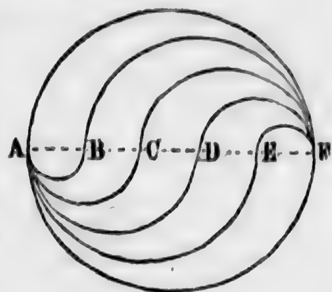
(696) **PROB. Faire un parallélogramme AH égal en surface et en périmètre à un triangle donné ABC.**



Prolongez AB d'une quantité égale à BC et bissectez AD en E. Menez BH parallèle à AC, et avec A comme centre et un rayon égal à AE (demi-somme des côtés AB, BC du triangle) coupez BH en G. Joignez AG et par le point F, milieu de AC, menez FH parallèle à AG; AGHF est le parallélogramme demandé. En effet, puisque (270) AG=FH et que $AG=\frac{AD}{2}=\frac{AB+BC}{2}$; il suit que AG+FH=AB+BC. De plus AF=FC par constr., et AF=GH (270); donc AF+GH=AC; donc le périmètre du parallélogr. est égal à celui du triangle. Quant à la surface du parallélogr. il est clair (289) qu'elle est aussi égale à celle du triangle, puisque ils sont entre mêmes parallèles et que la base du parallélogr. est moitié de celle du triangle.

(697) **PROB. Diviser un cercle en un nombre quelconque de parties égales en surface et en périmètre.**

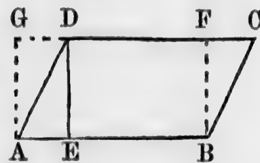
Ayant divisé le diamètre en autant de parties égales AB, BC, etc., que le cercle doit contenir de parties équivalentes ; on n'a qu'à décrire sur AB, AC, etc., comme diamètres, les demi-circonférences indiquées par la fig. et en faire autant du côté opposé du diamètre sur EF, DF, etc.



Ce problème ne pouvant guère se présenter dans la pratique, peut se considérer comme étant purement de fantaisie. La démonstration en est donc laissée à l'étudiant, auquel il suffira de rappeler que les demi-cercles sont (557) des figures semblables, et que, comme telles, leurs surfaces et périmètres sont sujets aux mêmes conditions que celles qui régissent toutes autres figs. semblables ; c-à-d., que leurs périmètres sont (559) comme (::) leurs diamètres, et (557) leurs surfaces comme (::) les carrés de ces diamètres.

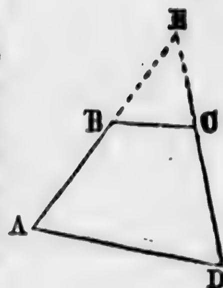
(698) **PROB. On a dans un parallélogramme AC, la surface, le périmètre et la différence entre la base AB et la perpendiculaire DE, pour construire la figure.**

Il faut d'abord trouver (375 ou 377) un rectangle ABFG qui réponde à la surface donnée et à la différence entre la base et la perpendiculaire, c-à-d. entre la base et le côté ; après quoi, il ne restera plus qu'à trouver le dégré d'inclinaison à donner au côté AD, pour que sa longueur ajoutée à la base AB soit égale au demi périmètre donné. Or, dans le triangle rectangle AED, on connait ED=AG, côté du rectangle GB, et on connait AD égal au demi périmètre donné moins AB pour trouver l'angle ou l'inclinaison voulue DAB.



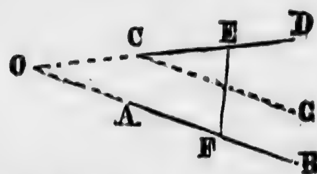
(699) **PROB. On a, dans un trapèze quelconque BD, deux côtés opposés BC, AD et trois angles B, C et D ou A, pour trouver la surface.**

Ayant prolongé les côtés inconnus AB, DC jusqu'à leur rencontre en E ; on a dans le triangle supplémentaire EBC, un côté BC et les angles adjacents EBC, (supplément de ABC), ECB (supplément de DCB) pour trouver (266) la surface. Dans le triangle EAD, on a un côté AD et les angles adjacents D et (255) A, pour trouver la surface ; et surf. EAD— surf. EBC= surf. BD.

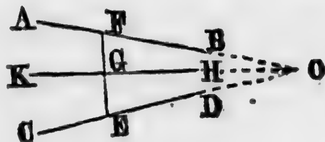


(700) **PROB**. On demande à **trouver sur chacune de deux lignes indéfinies** AB, CD, **inclinées l'une à l'autre, au point** F, E **également éloigné du point** O **où ces lignes se rencontreraient si elles étaient suffisamment prolongées.**

Supposez la chose faite ; le triangle EOF sera isocèle et donnera E=F= demi-supplément de O, que l'on obtiendra en menant CG parallèle à AB. De là, donc, un moyen de résoudre le problème.

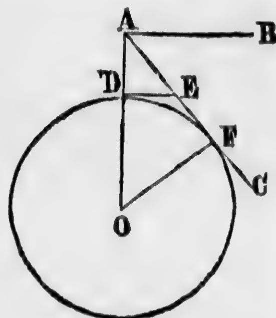


(701) **PROB.** S'il s'agissait de **bissecter l'espace angulaire formé par deux lignes indéfinies** AB, CD **inclinées l'une à l'autre, ou ce qui est la même chose, mener une ligne** KH qui, **étant prolongée, tomberait au point** O **de rencontre des deux lignes données** ; ayant pris sur une des lignes un point quelconque E, et mené EF telle que l'angle $E=F=\frac{\text{suppl. } O}{2}$; il ne resterait plus qu'a faire passer par le point milieu G de la ligne EF, une perpendiculaire KH qui résoudrait (236) le problème.



(702) **PROB. On a l'angle** BAC **formé par la perpen-**

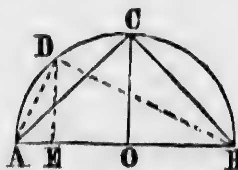
diculaire AB et la tangente AC menées d'un point A quelconque sur le rayon prolongé AO d'un cercle, et la distance AD de ce point au cercle, pour trouver le rayon.



Ayant mené OF au point de contact F de la tangente AC, et DE tangente au cercle au point D; le triangle AFO sera (466) rectangle en F et on aura (506) tangente ED = tangente EF. Maintenant dans le triangle rectangle ADE, on a l'angle A, complément de l'angle donné BAC, et le côté AD, pour trouver AE et ED, et puisque EF =ED, l'on a AF=AE+ED. On a donc, dans le triangle rectangle AFO, le côté AF et les angles pour trouver OF, rayon du cercle.

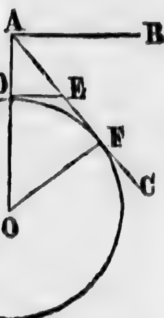
(703) **Sco.** L'étudiant verra comment, en pratique, on ferait application de ce problème pour trouver le rayon de la terre, si on connaissait AD, hauteur d'une montagne élevée et l'angle BAC formé par une ligne horizontale AB et une autre ligne AC tangente à la surface, le tout dans un même plan (115).

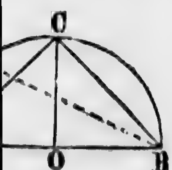
(704) **PROB. Trouver le plus grand triangle rectangle qu'on puisse faire sur une base donnée AB.**

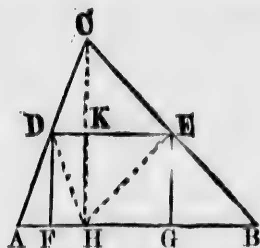


La base étant donnée, il est clair que le triangle qui, sur cette base, aura la plus grande surface, sera celui dont la hauteur sera la plus grande possible; or le triangle doit être rectangle (444), et il est évident que la hauteur OC est la plus grande possible, quand le sommet C est au milieu de la demi-circonférence, la hauteur étant, dans ce cas, moitié de la base.

(705) **PROB. Inscrire dans un triangle donné ABC, le plus grand rectangle possible.**



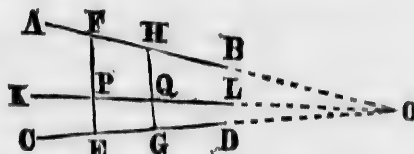




Soit CH la hauteur du triangle; il n'y a qu'à mener DE par le point milieu K de la hauteur et à faire DF, EG parallèles à CH ou perpendiculaires à AB, pour compléter la fig. Cette construction donne DE ou FG$=\frac{1}{2}$AB. L'étudiant verra aussi que le triangle ext. EGB=EGH, DFA=DFH, DKC =DKH et EKC=EKH; c-à-d., que la somme des parties extérieures au rectangle, est égale à la somme des parties composantes du rectangle, ou en autres mots, que la surface du rectangle ainsi trouvé est moitié de celle du triangle donné.

On peut encore laisser à l'étudiant le soin de prouver l'exactitude de cette solution; lui rappelant seulement qu'à périmètre égal, le plus grand rectangle est (**372**) celui dont les côtés, ou la base et la hauteur, approchent le plus de l'égalité.

(706) **PROB. Mener par un point donné P une ligne KL qui étant prolongée rencontrerait deux autres lignes indéfinies AB, CD au point O de leur intersection.**



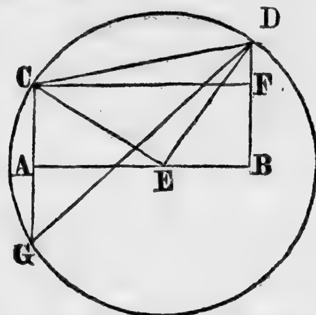
Par le point donné P, menez la droite EF et à une distance quelconque de EF, menez GH parallèle à EF. Divisez alors (**514**) GH en Q, de manière à avoir GQ à HQ comme EP à FP. Par le points P, Q menez KL qui sera la ligne demandée.

Pour preuve, supposez la chose faite; vous aurez les triangles semblables OQG, OPE et OQH, OPF qui donneront GQ : EP :: OQ : OP et HQ : FP :: OQ : OP; d'où (**75 Ax.**) GQ : EP :: HQ : FP.

Si le point donné P au lieu d'être entre les lignes AB, CD

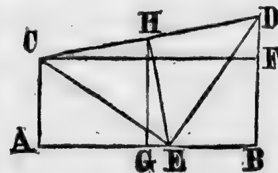
se trouvait en dehors de l'espace renfermé par ces lignes; il est clair qu'une construction analogue résoudrait le problème.

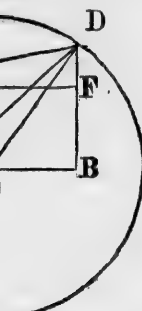
(707) **PROB. Dans un trapèze (172) rectangulaire** ABDC, **étant donnés la base** AB **et les perpendiculaires ou côtés parallèles** AC, BD; **trouver sur la base la position d'un point** E **qui soit également éloigné des sommets ou extrémités** C et D **des côtés parallèles.**

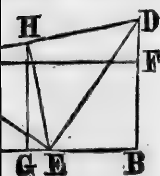


Puisque EC doit être égale à ED; si, du point E, comme centre, avec rayon ED, on décrit une circonférence de cercle; cette circonférence passera par le point C. Ayant prolongé AC jusqu'en G, vous aurez AG=AC (408) et CG=2AC. Menez CF parallèle à AB; alors dans le triangle rectangle CFD, vous avez CF=AB (271) et DF=BD−AC, pour trouver CD et l'angle DCF. Ajoutant à l'angle droit FCG, l'angle FCD que vous venez de trouver, vous avez dans le triangle DCG, deux côtés CG, CD et l'angle inclus DCG pour trouver (243) l'angle G. Maintenant (440) l'angle au centre CED est égal au double de l'angle G à la circonférence, appuyé sur le même arc; donc, dans le triangle isocèle CED vous avez la base CD et les angles en C et D, chacun égal au demi-supplément de E, pour trouver CE ou DE. Enfin, dans l'un ou l'autre des triangles rectangles EBD, EAC, vous avez l'hypoténuse et un côté pour trouver EB ou EA.

(708) **Autre solution du dernier problème.** On a, comme anparavant, CF parallèle et égale à AB, et DF=BD−AC; d'où on obtient CD. Par le point milieu H de CD, ayant mené HG parallèle à AC ou BD, on a (325) $HG=\frac{AC+BD}{2}$. L'angle GHE est (322)

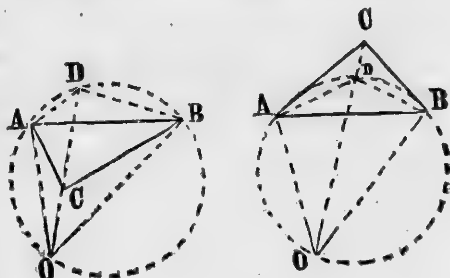






égal à l'angle DCF, les côtes de l'un étant perpendiculaires à ceux de l'autre ; savoir : HG à AB ou CF et EH à CD (**236**). Dans le triangle rectangle EGH, on connait donc un côté GH et les angles, pour trouver EG ; c-à-d. la distance du point cherché E au centre G de la base.

(709) **PROB. Etant donnés les distances AB, AC, BC entre trois points A, B, C situés non en ligne droite et les angles AOC, BOC sous-tendus en un quatrième point O par les lignes AO, BO, CO menées de ce point aux trois points donnés ; trouver la position du quatrième point.**

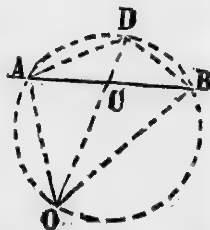


Dans ce problème, il semble d'abord que les données soient suffisantes pour obtenir une solution, et en effet, elles le sont ; mais la difficulté à surmonter est que la position relative de ces données ne fournit pas de moyen immédiat de faire entrer en compte les angles en O, qui sont adjacents à aucune des lignes données. Or, on a vu (**443**) que tous les angles inscrits dans le même segment de cercle, c-à-d. appuyés sur le même arc, sont égaux ; et puisqu'il en est ainsi, on est porté à croire que l'usage du cercle fournira un moyen d'arriver au résultat désiré. En effet, ayant inscrit (**450**) les trois points A, O, B, dans une circonférence, et prolongé s'il le faut, OC pour rencontrer la circonférence en D ; on mènera AD, BD qui donneront (**443**) l'angle ABD égal à AOD appuyé sur le même arc AD et BAD égal à BOD appuyé sur le même arc BD. Les angles en O qui étaient opposés à AB peuvent donc maintenant être regardés comme adjacents à cette ligne et fournissent le moyen de trouver, dans le triangle ADB, le côté AD ou BD. Dans le triangle ABC, on connait les trois côtés, pour trouver (**222**) l'angle A qui, étant

ajouté à BAD ou BAD soustrait de cet angle, suivant que le point C tombe en dedans ou en dehors du cercle, donnera l'angle CAD. Alors dans le triangle CAD, on a les côtés AC, AD et l'angle inclus CAD pour trouver l'angle ADC ou ADO. Enfin dans le triangle ADO, on a un côté AD et les angles ADO, AOD, pour trouver AO, et par suite CO et BO.

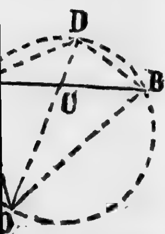
(710) **Sco. Si les données du dernier problème étaient** AC, BC **et l'angle inclus** ACB, il n'y aurait qu'à compléter (**243**) le triangle ACB pour réduire l'opération à celle qu'on vient d'indiquer. Observons aussi que si le point C tombait sur la circonférence, le problème serait indéterminé, puisque l'angle ACB serait alors supplément de O et que dans ce cas toute position du point O sur la circonférence donnerait les mêmes angles AOC, BOC.

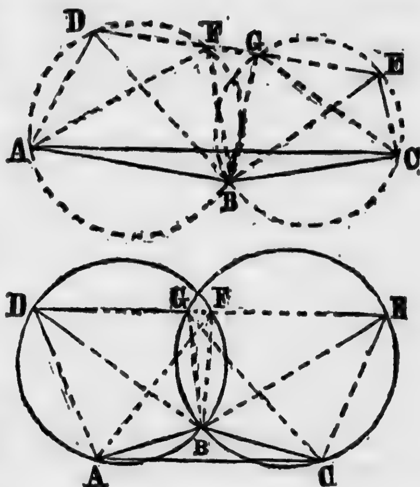
(711) **PROB. Quand les trois points du dernier problème sont situés en ligne droite et qu'on a les distances entre ces points.**



Inscrire AOB dans un cercle, prolonger OC jusqu'en D et mener AD, BD. Alors dans le triangle ADB, on a AB=AC+CB, angle ABD=AOD sur le même arc et angle BAD=BOD sur même arc, pour trouver AD ou BD. Puis dans le triangle ACD ou BCD, on a deux côtés et l'angle inclus pour trouver l'angle D, ce qui dans le triangle AOD, nous donne AD et les angles en O et D, pour trouver AO et par suite BO.

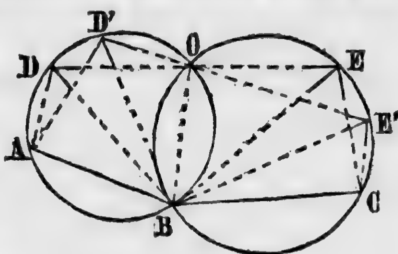
(712) **PROB. Etant donnés les distances** AB, BC, AC **entre trois points situés non en ligne droite** (**ou ce qui** (**243**) **revient au même, deux distances** AB, BC, **et l'angle inclus** ABC) **et les angles sous-tendus en deux autres points** D **et** E **par la ligne** DE **menée d'un de ces points à l'autre et celles** DA, DB **et** EC, EB **menées de chacun de ces points respectivement aux points en premier lieu mentionnés; trouver la position de ces deux autres points.**





Dans ce prob., comme dans celui du par. (709) l'usage du cercle nous permettra de rendre adjacents aux côtés, des angles qui, dans la position qu'ils occupent dans l'énoncé, ne peuvent se prêter directement au résultat voulu. Ayant donc circonscrit (450) dans un cercle les trois points ABD et dans un autre cerle, les trois points CBE et mené des points d'intersection F, G, les lignes FA, FB et GC, GB ; on voit que l'angle FAB, adjacent à AB, est appuyé sur le même arc que l'angle FDB qu'on connaît, et qu'il est en conséquence égal à ce dernier. De même, GCB est égal à GEB appuyé sur le même arc GB ; de plus, angle BGC=BEC et BFA=BDA. On a donc dans le triangle BCG un côté et les angles pour trouver (266) GB et dans le triangle BAF, un côté et les angles pour trouver FB. Dans le triangle FBG, on a maintenant les côtés FB, GB et l'angle inclus $FBG=ABC-\overline{ABF+CBG}$, quand FG tombe en dehors des cercles, et $FBG=\overline{ABC+ABF+CBG}-$ 4 angles droits, quand FG tombe en dedans, pour trouver (243) les angles en F, G. Cela posé, on a dans le triangle FBD, le côté FB, l'angle donné FDB et l'angle DFB= sup. GFB, pour trouver DB. Dans ABD on a deux côtés AB, DB et l'angle D opposé à l'un d'eux, pour trouver (321) DA. Une opération analogue du côté opposé donnera EB, EC. Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'on établira enfin le point E à l'intersection des arcs décrits sur la base BC, avec les rayons EB, EC, et les distances DB, AD serviront de même à poser le point D.

(713) **Sco. Si les deux cercles intersectaient la ligne DE en un même point** O, ou en autres mots, si la somme des angles ADE, CED était égale à la différence entre l'angle donné ABC et 4 angles droits, le problème serait dans ce cas indéterminé ;

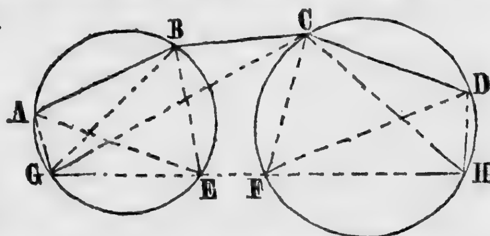


car toute autre position D', E' des points D, E donnerait les mêmes angles.

(714) **Rem. Ces sortes de problèmes**, dans la solution desquels le cercle joue un rôle si important, **se présentent fréquemment** dans le relevé des plans des côtes maritimes et des récifs, bancs de sable, îlots et autres objets de cette espèce.

(715) **PROB. Les données sont** AB, BC, CD, **avec les angles** ABC, DCB **et il s'agit d'établir la position des points** E, F **à l'aide des angles** AEF, AEB et DFE, DFC.

Inscrivez dans un cercle les points ABE ; c-à-d. sur la base AB décrivez (**450**) un cercle capable de l'angle AEB. Répétez



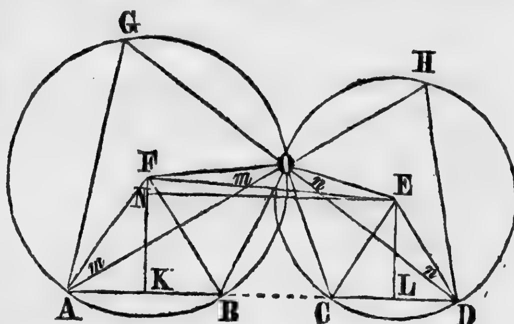
l'opération pour l'angle DFC ; prolongez EF pour rencontrer les cercles en G, H et menez les autres lignes indiquées dans la fig. Vous avez dans le triangle AGB, angle AGB= AEB, angle ABG=AEG= sup. AEF, pour trouver GB. Puis, dans GBC vous avez GB, BC et l'angle inclus GBC= ABC—ABG, pour trouver GC et les angles. Procédez, dans l'autre cercle, à trouver HC et vous aurez alors dans GCH les côtés GC, HC et l'angle inclus GCH=BCD—BCG —DCH ou DFH pour trouver GH et les angles en G et H.

Dans GEB, vous avez maintenant GB, angle GEB=AEB+AEG, angle BGE=BGC+CGH, pour trouver EB, EG. D'une manière analogue, dans HFC, trouvez FC, FH : alors EF=GH$-\overline{\text{EG+FH}}$; etc.

(716) **Sco. Pour obtenir par construction graphique la position des points** E, F ; ayant posé AB, BC, CD dans les conditons voulues, faites l'angle ABG=AEG= sup. AEF et DCH=DFH=sup. DFE. Sur AB et CD respectivement, décrivez les cercles contenant les angles AEB, DFC. Ces cercles couperont BG, CH en G, H, par lesquels menant la droite GH, cette dernière établira la position des points E, F à l'endroit de ses intersections.

(717) **PROB. Quatre points A, B, C, D, sont situés en ligne droite. On connait la distance AB du premier au second et celle CD du troisième au quatrième ; on a de plus les trois angles AOB, BOC, COD sous-tendus en un cinquième point O par les lignes menées de ce point aux quatre autres points ; on demande de fixer à l'aide de ces données la position du cinquième point et à trouver la distance BC du second au troisième.**

Le cercle parait encore devoir être ici de quelque utilité. Sur AB je décris (**450**) un cercle capable de l'angle AOB, et sur CD un cercle contenant l'angle COD.

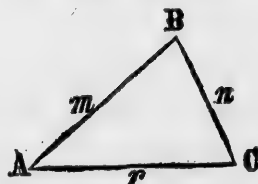


Je prolonge DO et AO jusqu'en G et H et je joins AG, DH. Les angles opposés AOG, DOH sont égaux entre eux et chacun au supplément de AOD, somme des trois angles donnés. Dans le quadrilatère ABOG, l'angle A est (**446**) supplément de BOG ; de même dans le quadrilatère CDHO,

D est supplément de COH. Maintenant dans le polygone ADHOG je connais les angles en A, D et O et par suite (256) la somme des angles en G et H. Or la somme des angles G, H à la circonférence me donne la demi-somme des angles au centre AFO, DEO appuyés sur mêmes arcs ABO, DCO. Dans les triangles isocèles AFO, DEO, je connais donc la somme des angles F, E au sommet pour trouver celle des angles m, m, n, n à la base. Mais $\overline{m+n}$ vaut la demi-somme de $2m+2n$ et si à la somme AOD des trois angles donnés, j'ajoute $\overline{m+n}$, j'obtiens l'angle FOE compris par les rayons OF, OE des deux cercles. J'ai donc dans le triangle FOE deux côtés OF, OE et l'angle inclus pour trouver FE et l'angle OFE. Ayant mené FK, EL, respectivement perpendiculaires à AB,CD et NE parallèle à AD ; je connais dans le triangle rectangle FNE l'hypoténuse FE et un côté FN=FK—EL, pour trouver NE et l'angle NFE. Enfin, dans le triangle isocèle AFO, je connais les côtés AF, OF (rayons du cercle) et l'angle inclus $AFO=\overline{OFE+NFE+AFK}$ ou $\frac{1}{2}AFB$ pour trouver AO et par suite BO, CO ou DO deux desquelles suffiront pour fixer la position du point O. Il est clair aussi que BC=KL (ou 271 NE)—KB—CL, c-à-d. (408) $BC=KL-\frac{AB+CD}{2}$.

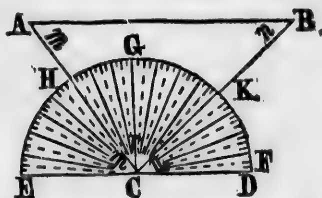
(718) **PROB. On a le périmètre d'un triangle ABC et le rapport m à n à r entre les côtés ; trouver les côtés.**

Faire $\overline{m+n+r}:m$ :: pér. : AB ; $\overline{m+n+r}:n$ :: pér. : BC, et AC= pér.— $\overline{AB+BC}$.



(719) **PROB. Si on avait les angles et le périmètre d'un triangle pour en trouver les côtés ;** on obtiendrait de la manière indiquée au par. (688) le rapport entre les côtés, pour procéder ensuite comme dans le dernier par.

(720) PROB. Etant donné le rapport $m:n:r$ entre les trois angles d'un triangle ABC : trouver les angles.



On se rappellera ce qui a déjà été dit (**24** et **PROP. XXXIV**) au sujet de l'unité de mesure d'un angle ou d'un arc, et on verra que par des bissections successives (**416**) de la circonférence ou d'une partie aliquote quelconque de la circonférence, il sera facile d'arriver à une unité de mesure angulaire DCF, si petite qu'elle soit, qui permette d'exprimer avec toute l'exactitude désirable le rapport entre deux ou plusieurs angles donnés.

Soit EGD un demi cercle divisé comme susdit, et pouvant servir en conséquence d'échelle applicable à la mesure et comparaison des espaces angulaires; ayant disposé cette échelle de manière que le centre C corresponde à l'un C des sommets du triangle donné, et que le diamètre ED soit parallèle au côté opposé AB du triangle; il est clair qu'on aura l'angle DCB égal à son alterne B et ECA égal à son alterne A, et que les nombres respectifs d'unités angulaires DCF contenus dans chacun des angles indiqueront de suite le rapport entre eux. Delà, donc, pour construire le triangle ou trouver les angles, quand on en a le rapport, il n'y a qu'à diviser le nombre total d'unités contenues dans l'échelle dans le rapport voulu et à mener par les points de division HK les lignes CB, CA qui complèteront la construction. En menant, à une distance arbitraire de ED une ligne AB parallèle à ED, on aurait un triangle ACB équiangle au triangle voulu.

(721) PROB. Dans un triangle, soit à trouver les côtés lorsqu'on connait la surface, un angle et le rapport entre la base et la hauteur, ou la somme de la base et hauteur, ou encore leur différence.

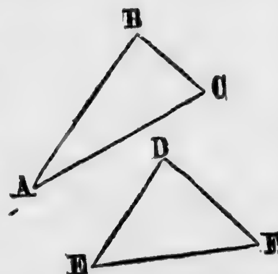
Il est clair que dans les trois cas, on n'a qu'à doubler la



surface, pour procéder ensuite comme il est indiqué aux pars. (**694**), (**373**), (**375**) et (**698**), c-à-d. comme s'il s'agissait d'un rectangle ou d'un parallélogramme.

(**722**) **Sco. La surface jointe à la somm. et au rectangle** (**340**) **de deux côtés d'un triangle, ou d'un parallélogramme, fourniront encore le moyen d'établir les côtés et angles de ces figures,** et l'on pourrait encore varier de bien des manières les données ; mais les connaissances déjà acquises à l'étudiant lui suffiront pour tous les cas qui peuvent se présenter.

(**723**) **PROB. Etant donnés, dans un triangle** ABC, **la surface, la somme** AB+BC **de deux côtés et l'angle inclus** B ; **trouver les côtés.**



Pour résoudre ce prob. par la méthode du par. (**373**) il nous faudrait avoir au lieu de l'angle B, le rectangle $\overline{AB \cdot BC}$ des côtés cherchés. Or, le par. (**547**) fournira le moyen d'arriver à ce résultat. Soit EDF un triangle de surface égale à ABC et ayant angle D=B. Pour simplifier, supposons que ED=FD, ce qui donnera les angles E, F chacun égal au demi-supplément de D, pour trouver ensuite (**674**) ED ou FD. Cela fait, on a (**547**) AB : ED :: DF : BC, d'où (**86** ou **573**) AB.BC=ED.DF. On a donc maintenant AB+BC et AB.BC pour trouver (**373**) la demi-différence entre les côtés=$AB-BC=\sqrt{\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2-AB.BC}$.

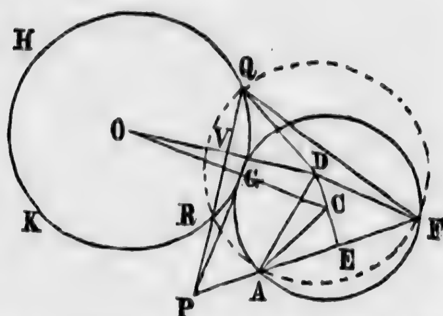
(**724**) **PROB. Etant données, dans un triangle quelconque** ABC, **la surface, la base** AB **et la somme** AC+BC **des autres côtés, pour construire le triangle.**

On a (**349**) CD= surf. $\div \frac{AB}{2}$, et par le point C ayant mené EP parallèle à AB, il est clair que le sommet C du triangle se trouvera sur cette ligne.

Supposons le problème résolu, afin d'obtenir par analyse ou décomposition les éléments nécessaires à sa solution. Du point B, comme centre, avec un rayon BH=BG égal à la somme des côtés AC, BC, décrivons un arc HGK. Du point C comme centre avec AC pour rayon, décrivons un autre arc AGF. On voit que l'arc AGF touche nécessairement l'arc HGK au point G puisque CG forme partie de BG. Il est donc apparent que le point C, sommet du triangle, se trouvera à cet endroit de la parallèle EC où cette ligne sera intersectée par celle menée du point B de la base au point de contact G des deux cercles. C'est donc à trouver le point de contact G que consistera toute la difficulté de la solution. Puisque CG=CA il est clair que l'arc AGF passera par le point A ; mais deux points A et G ne suffisent pas pour déterminer le trajet ou le rayon d'un arc ; il en faut au moins trois; à cet effet menez AF=2AE, et puisque EF=AE, il suit (**408**) que AF est une corde du cercle AGF et que F est un troisième point par lequel doit passer le cercle décrit du centre C. Le probleme est donc maintenant réduit à celui de :

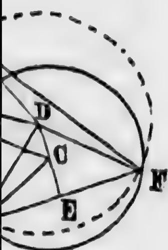
(725) **PROB. Décrire un cercle AFG qui soit tangent à un cercle donné HGK et qui passe par deux points donnés.**

L'étudiant mènera les lignes OA,OQ qui manquent dans la figure.



Supposons le problème résolu. Alors HKG étant le cercle donné, et AFG le cercle requis, G sera (**475**) le point de contact. Il n'y a de commun à ces deux cercles que la tangente PG (**469**) dont la longueur$=\sqrt{PF.PA}$ (**505**). Il est clair que si on connaissait PF, on obtiendrait de suite PG en faisant PF : PG :: PG : PA (ou PF—AF) et il serait facile de trouver PF à l'aide du cercle AFG ; cependant ne connaissant pas encore le cercle AFG on est porté à croire que tout autre cercle passant par les points donnés AF et d'un rayon assez grand pour intersecter le cercle donné pourra nous tirer d'embarras, puisque PF sera pour ce nouveau cercle une sécante, comme elle l'était pour le premier ; et en effet, ayant, avec un rayon arbitraire AD décrit le cercle auxiliaire RFQ, la sécante menée par les points QR et indéfiniment prolongée, tombera en P point d'intersection de la tangente PG et de la sécante PF ; puisque PG est commune au cercle donné, au cercle cherché et au cercle auxiliaire, les rectangles PF.PA, PQ.PR étant (**503**) égaux l'un à l'autre et (**504**) au carré de la tangente. Donc, si au moyen du cercle auxiliaire, on peut trouver PF ou PQ, on aura aussi PG. A cet effet ayant joint FQ et mené les autres lignes indiquées dans la figure, les données sont AO distance du centre du cercle donné à l'un A des deux points donnés, AF distance entre ces points et l'angle inclus OAF pour trouver le reste.

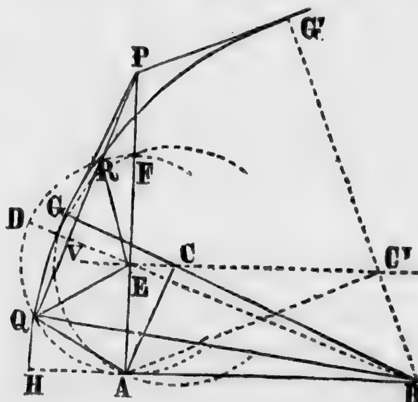
Dans le triangle isocèle ADF, on a la base AF et les côtés, rayons du cercle auxiliaire, pour trouver (**222**) les angles ; dans AOD, on a AO, AD et l'angle inclus OAD=OAF—DAF pour trouver OD et l'angle ODA ; dans ODQ, on



a OD distance entre les centres des deux cercles et les rayons OQ, DQ, pour trouver l'angle ODQ ; dans le triangle rectangle (**495**) DVQ on a DQ et l'angle VDQ pour trouver VQD ; dans le triangle isocèle QDF, on a les côtés QD, FD et l'angle inclus QDF= 4 angles droits moins $\overline{FDA+ODA+ODQ}$, pour trouver FQ et les angles à la base ; enfin, dans le triangle PQF, on a FQ, angle F=DFQ+DFA et angle Q= DQF+DQP, pour trouver PQ ou PF.

La construction se réduira à prendre sur la perpendiculaire ED élevée au centre E de la corde AF, un point quelconque D d'où l'on puisse décrire un cercle capable d'intersecter le cercle donné. Par les points d'intersection Q, R on mènera ensuite la sécante PQ qui déterminera, à l'endroit de son intersection P avec la sécante PF, le point par lequel il faudra mener au cercle donné la tangente PG. Cette dernière fixera à l'endroit G de son contact, le point par lequel on fera passer la ligne OG qui étant prolongée coupera la perpendiculaire ED en C, centre du cercle cherché.

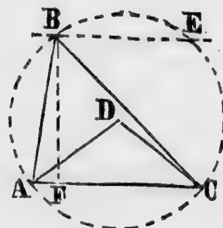
(**726**) **Sco. On a supposé dans le dernier problème le contact extérieur des deux cercles ; mais** dans l'application de ce prob. à la solution de celui du par. (**724**) **les cercles se touchent intérieurement** ; ce qui modifiera quelque peu le raisonnement à suivre pour arriver au résultat voulu.



En effet, ABC étant le triangle voulu, BG =BH le rayon du cercle donné égal à la somme AC+BC des côtés inconnus, HGG' le cercle décrit avec ce rayon et du point B comme centre, AE la hauteur du triangle = surf.÷½AB, AF=2AE la distance entre les

points A, F de trajet du cercle cherché, G le point de contact voulu, E le centre du cercle auxiliaire ADF ; on a dans le triangle rectangle EAB la base et hauteur, pour trouver BE et l'angle AEB ; dans EBQ, on a EB, EQ=AE et BQ=BG, pour trouver l'angle BEQ ; dans le triangle isocèle AEQ on a les côtés et l'angle inclus AEQ=BEQ—AEB, pour trouver la base AQ et les angles à la base ; dans le triangle rectangle EVQ, on a EQ et l'angle VEQ=2 angles droits —BEQ, pour trouver l'angle EQV ; enfin dans le triangle PQA, on a la base AQ et les angles à la base A et Q=EQA +EQP pour trouver AP, et par suite la tangente PG.

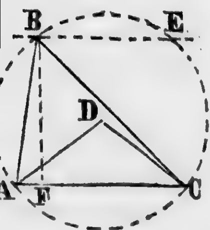
(727) PROB. Dans un triangle ABC les données sont AC la base, la surface et l'angle vertical B ; former le triangle.

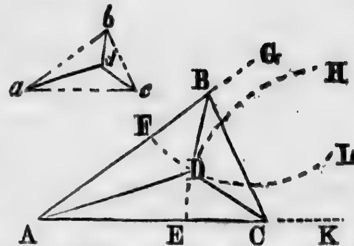


Puisque l'angle B est invariable et qu'il est appuyé sur une base donnée, l'idée nous vient d'un angle à la circonférence appuyé sur un arc donné ; car tous les angles à la circonférence et appuyés sur même arc sont égaux. Il est donc évident que si on décrit (450) sur la base AC un cercle capable de l'angle B, le lieu de cet angle sera sur la circonférence ; mais il y a une autre condition à remplir, c'est que la hauteur du triangle soit telle qu'étant multipliée par la base, leur demi-produit soit égal à la surface donnée ; pour cela on n'a qu'à mener la parallèle BE à une distance de la base AC égale au quotient de la superficie divisée par la demi-base ; cette parallèle intersectera le cercle en deux points B et E chacun desquels répondra au sommet voulu du triangle.

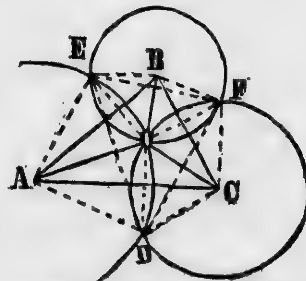
Il est clair que si au lieu de la surface, la perpendiculaire BF était donnée, on résoudrait tout de même le problème.

(728) PROB. On a dans un triangle *a b c* les trois angles et les trois distances *ad*, *bd*, *cd* de ces angles à un point intérieur *d*, pour trouver les côtés.





Supposons à *ac* une longueur quelconque AC, et sur AC faisons un triangle ABC semblable au triangle donné. Divisons (**514**) AC en E et AB en F dans le rapport de *ad* : *cd* et de *ad* à *bd* ; faisons maintenant (**608**) AE—EC : EC :: AE : EK et AF—FB : FB :: AF : FG ; ce qui nous donnera les rayons EK, FG de deux cercles tels que les côtés AD, CD et AD, BD, des triangles ADC, ADB seront entre eux dans les rapports respectifs de AE : EC et de AF à FB, c-à-d., dans le rapport de *ad* à *cd* et de *ad* à *bd*. Les triangles ADC, ADB seront alors (**522**) respectivement semblables à *adc* et à *adb* et on n'aura plus qu'à faire AD : *ad* :: AC : *ac* :: AB : *ab*.

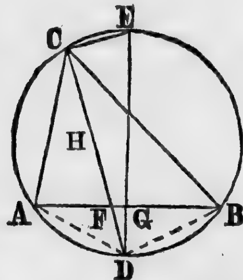


Autre solution. Soit ABC le triangle voulu ; avec AO, BO, CO comme rayons et des points A, B, C comme centres, décrivez des cercles ; joignez leurs points d'intersection et menez les rayons AD, CD, etc. L'angle EAB=OAB (**495**, **407** et **399**) et DAC=OAC ; d'où EAD=2BAC ; on a donc dans le triangle isocèle EAD les côtés et l'angle inclus EAD pour trouver ED et les angles à la base. On trouvera de même DF, EF, et par suite les angles E, D, F du triangle EDF. On aura alors dans ADC les côtés AD, CD et l'angle inclus D égal à la somme des angles ADE, EDF, CDF pour trouver AC. On trouvera de même AB et BC dans les triangles AEB, CFB.

D'où il suit que pour opérer une construction du triangle ABC, il faut trouver séparément les côtés ED, EF, DF d'un triangle auxiliaire EDF, en faisant chacun de ces côtés res-

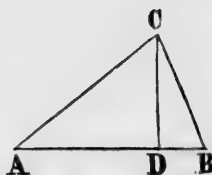
pectivement égal à la base d'un triangle isocèle dont les côtés soient égaux aux distances données et l'angle inclus au double de l'angle correspondant du triangle. Avec ces trois bases ainsi trouvées, on construira DEF, sur les côtés duquel on formera les triangles EAD, EBF, DCF dont on joindra les trois sommets A, B, C pour avoir le triangle demandé ABC.

(729) **PROB. Déterminer un triangle ABC dont on n'a que la base AB, l'angle vertical C et la bissectrice CF de l'angle vertical.**



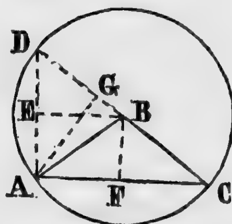
Pour fixer le lieu du sommet C, décrivez (**450**) sur AB un cercle capable de l'angle donné; la bissectrice CF sera en même temps celle de l'arc ADB; donc ADB est isocèle et l'angle ABD à la base $=ACD=\frac{1}{2}ACB$ pour trouver DG. La perpendiculaire DG prolongée est un diamètre du du cercle et est en conséquence connu; l'angle ECD appuyé sur le diamètre est droit; le quadrilatère CEGF peut (**446**) être inscrit dans un cercle, l'angle en G étant droit; d'où, (**575**) $CD.DF=ED.DG$. **Maintenant**, H étant le point milieu de CF, on a (**378**) $HD=\sqrt{CD.DF+FH^2}$ et $DF=DH-FH$. Dans le triangle rectangle FGD on a donc FD et GD pour trouver l'angle FDG, c-à-d. l'angle CDE dont le côté CD fixera sur la circonférence la position du point C.

(730) **PROB. Dans un triangle ABC, on a les segments AD, DB de la base et la somme AC+CB des deux autres côtés, pour trouver ces côtés.**



On a (614) $\overline{AC+CB}\times\overline{AC-CB}=\overline{AD+DB}\times\overline{AD-DB}$; d'où (88) $\overline{AC+BC}:\overline{AD+DB}::\overline{AD-BD}:\overline{AC-CB}$; donc $AC-CB=\frac{\overline{AD+DB}\times\overline{AD-DB}}{AC+CB}$. Alors $AC=$ (367) $\frac{\overline{AC+CB}}{2}+\frac{\overline{AC-CB}}{2}$ et $CB=\overline{AC+CB}-AC$.

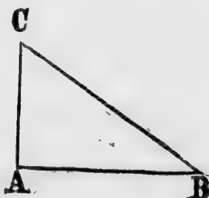
(731) **PROB. On a la surface et les côtés AB, BC d'un triangle isocèle ABC, pour trouver la base AC.**



Supposons sur AC un cercle ayant pour rayon AB; ayant prolongé CB jusqu'en D, joint AD et mené EB parallèle à AC, on voit que la surface du triangle rectangle DAC=2ABC; d'où on obtient la perpendiculaire AG=4ABC÷DC. On a alors dans le triangle rectangle AGB les côtés AG, AB pour trouver l'angle ABG supplément de ABC.

Il est clair aussi que ABD est un autre triangle isocèle qui répond au problème et les deux triangles sont tels que l'angle inclus de l'un est supplément de l'angle inclus de l'autre.

(732) **PROB. On a la surface d'un triangle rectangle ABC et la somme AB+AC de ses côtés, pour trouver l'hypoténuse.**

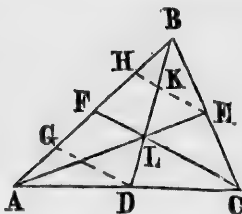


La figure est un demi rectangle (281) ce qui donne AB.AC=2ABC et (374) $\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2=AB.AC+\left(\frac{AB-AC}{2}\right)^2$; or $\left(\frac{AB-AC}{2}\right)^2=\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2-AB.AC$, et

$$\frac{AB-AC}{2}=\sqrt{\left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2-AB.AC}.$$

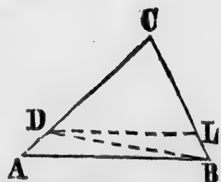
(733) **PROB. Dans un triangle ABC, étant données les trois bissectrices BD, AE, CF des côtés opposés, trouver les côtés.**

L'étudiant prouvera d'abord que les trois bissectrices s'intersectent en un même point L.



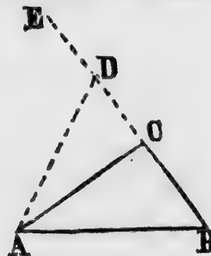
Soient EH, DG parallèles à CF; on voit que BH : HF :: BE : EC; d'où BH=HF; pour la même raison AG =GF=HB=HF=$\frac{1}{4}$AB; donc BK= KL=LD=$\frac{1}{3}$BD. On prouverait de même que AL=$\frac{2}{3}$AE et CL=$\frac{2}{3}$FC; on a donc dans le triangle ALC deux côtés AL, CL et la bissectrice LD du côté AC pour trouver AC; or on a vu (393) que $AL^2+CL^2=2AD^2+2LD^2$, ou $2AD^2=AL^2+CL^2-2LD^2$ et $AC=2AD=2\sqrt{AD^2}$. BC, BA se trouveront d'une manière analogue.

(734) **PROB. Ayant la différence AD entre les côtés d'un triangle ABC, sa base AB et la différence entre les angles à la base; construire le triangle.**



Faites CD=CB, joignez BD et menez DL parallèle à AB; alors DBA= la demi-différence des angles à la base; car CDL=CAB=CDB—LDB et CBA =CBD+DBA. On a donc, dans ADB les côtés AB, AD et l'angle DBA pour trouver BD et l'angle D; dans BCD (isocèle) on a DB, CDB= sup. ADB, etc.

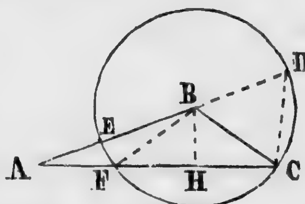
(735) **PROB. Dans un triangle rectangle ABC, on a un côté AC et la différence entre l'hypoténuse AB et la somme AB+CB des autres côtés, pour trouver le reste.**



Soit CE=AC et BD=AB, ED sera la différence entre AB et AC+CB; ABD est isocèle, à cause de BD=AB par construction et angle DAB=ADB; CD= CE—ED. On a donc dans le triangle rectangle ACD, les côtés AC, CD pour trouver l'angle BDA et le côté AD, etc.

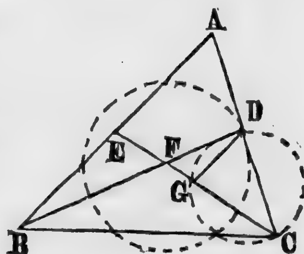
Par construction, prenez sur une droite EB, ED= $\overline{AC+CB}$—AB et EC=AC; menez AC perpendiculaire, joignez AD et faites angle DAB=ADB; ACB est le triangle voulu.

(736) **PROB. Dans un triangle** ABC **on a l'angle vertical** B, **la différence entre les segments de la base et la différence entre les côtés, pour trouver le reste.**



Soit BE=BC, on a FH=HC; donc AE=AB—BC est la différence entre les côtés, AF=AH —HC est la différence entre les segments de la base; dans le triangle AEF on a les côtés AE, AF et angle AFE= sup. EFC=ADC=$\frac{1}{2}$ABC pour trouver EF, ce qui, dans le triangle isocèle EBF donne EF, angle BEF= sup. AEF pour trouver BE=BC; etc.

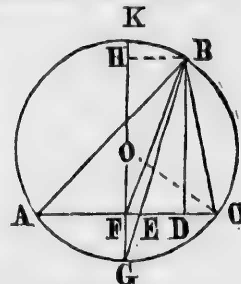
(737) **PROB. On a, dans un triangle** ABC, **l'angle vertical** A **et les bissectrices** CE, BD **des côtés qui le comprennent; construire le triangle.**



On connait (733) FC=$\frac{2}{3}$CE; prenant CG=$\frac{1}{2}$CE, on décrit sur CG un cercle contenant un angle D=A; le point D est dans le cercle CGD; du point F, on décrit un cercle avec le rayon FD=$\frac{1}{3}$BD; l'intersection des deux cercles fixe le point D et l'angle DFC. On mènera alors par les points D et F une ligne BD égale en longueur à la bissectrice donnée, on fera FE=$\frac{1}{2}$FC et les lignes menées par les points B, E et C, D se rencontreront en A sommet du triangle.

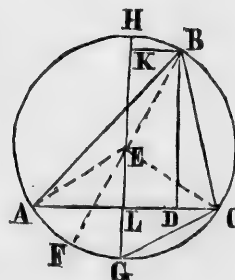
(738) **PROB. Dans un triangle** ABC **étant données la hauteur ou perpendiculaire** BD, **la bissectrice** BE **de**

l'angle vertical B et la bissectrice BF de la base ; trouver les côtés.

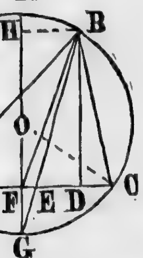


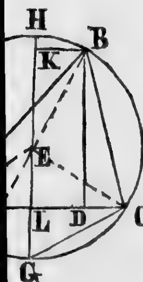
Supposons le triangle fait et inscrit dans un cercle ; ayant prolongé BE jusqu'en G, on a GC=GA. Joignez GF et prolongez jusqu'en K ; GK est alors un diamètre ; car F est le centre de AC et G le centre de l'arc AGC qui mesure l'angle vertical ABC, puisque BG bissecte l'angle vertical et en même temps l'arc qui lui sert de mesure. Dans le triangle rectangle FDB, on a FB, BD pour avoir FD et l'angle FBD. Dans le triangle rectangle EDB on a BE, BD pour trouver ED et l'angle EBD. Maintenant dans le triangle rectangle GFE on a un côté EF et un angle EGF égale à son alterne EBD pour trouver FG. Menez, BH parallèle à AC et en conséquence perpendulaire à GK et égale à DF. On a GH=FH+FG, et HB pour faire GH : HB :: HB : HK et $\frac{GH+HK}{2}$= rayon OC du cercle circonscrit. Dans le triangle rectangle OFC, on connait maintenant OC, OF=OG—FG, pour trouver FC moitié de la base du triangle demandé. Dans BFC on a donc BF, FC et angle BFC= complément de FBD, pour trouver BC.

(739) **PROB. Dans un triangle ABC, on a la base AC, l'angle vertical B et le rectangle AB.BC des côtés ; trouver le reste.**



La base et l'angle vertical étant donnés, on trouve de suite (**450**) le rayon EC du cercle circonscrit. On a vu (**601**) que AB.BC=FB.BD ; et comme on connait AB.BC et FB, on trouvera BD= $\frac{AB.BC}{BF}$. Maintenant on a dans le triangle rectange LCG un côté CL=AL=½AC, et l'angle





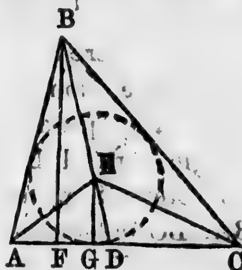
LCG ou ACG=$\frac{1}{2}$ABC pour trouver GL ; or $\overline{KG=KL}$ (ou BD)+GL et KH=GH−KG ; LD ou BK= $\sqrt{GK.KH}$, puisque (539) GK.KH=BK^2. Enfin DC=LC−LD et dans le triangle rectangle BDC on a BD, DC pour trouver BC, d'où AB=$\frac{AB.BC}{BC}$.

(740) PROB. Lorsque dans un triangle ABC on a les segments AD, DC de la base, formés par la perpendiculaire tombant du sommet, et le rapport entre les côtés AB, BC ; trouver les côtés.



Ayant divisé la base en E dans le rapport de AB : BC, on fera AE − EC : EC :: AE : EF ; ce qui nous donnera (608) EF rayon d'un cercle servant de lieu au point B, et l'intersection de ce cercle avec la perpendiculaire menée du point D fixera le sommet B du triangle demandé.

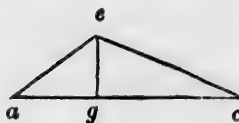
(741) PROB. Dans un triangle ABC, on a la somme AC+CB+AB des trois côtés ou le périmètre, la perpendiculaire BF et l'angle vertical B, pour trouver les côtés.



Supposons d'abord que ABC soit le triangle, tel que voulu ; les bissectrices AE, BE, CE des trois angles se rencontrent (494 ou 630) en un même point E.

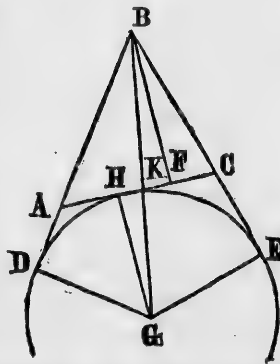
Puisque BD bissecte l'angle B, on a (541) AD : DC :: AB : BC ou compo. (96 Cor. 2) AD : AD+DC :: AB : AB+BC et alt. AD : AB :: AC : AB+BC ; mais la bissectrice AE nous donne ED : EB :: AD : AB ; donc (75 Ax.) ED : EB :: AC : AB+BC, ou alt. EB : ED :: AB+BC : AC, ou compo. EB+ED : ED :: AB+BC +AC : AC ; c-à-d., BD ED :: per. ABC : AC. Maintenant, soit EG parallèle à BF, on aura, à cause des triangles sem-

blables EGD, BFD, BF : EG :: BD : ED ; donc (**75 Ax.**) per. ABC : AC :: BF : EG ou alt., per. ABC : BF :: AC : EG.

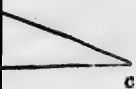


Supposons à AC une longueur quelconque *ac*, et on aura le rapport de *eg* à *ac* en faisant per. ABC : BF :: *ac* : *eg*. L'angle *aec*=AEC= ABC+$\frac{A+C}{2}$ puisque A, C sont bissectés par AE, CE ; **on a donc dans le triangle** *aec* **la base, la perpendiculaire et l'angle vertical pour trouver les angles** en *a* et *c* par la méthode du par. (**727**). Or, les angles *a*, *c* sont égaux respectivement à EAC, ECA et les angles A, C aux doubles de ces derniers. Donc, on a maintenant dans le triangle ABC, le pér. et les angles pour trouver les côtés par la méthode du par. (**719**) ou encore, dans les triangles rectangles AFB, CFB, on a un côté BF et un angle en A, C pour trouver AB, BC, etc.

La construction se réduirait, après avoir trouvé *a* et *b*, à faire sur la ligne donnée BF l'angle ABF= au complément de 2*a* et l'angle CBF au comp. de 2*c* ; on mènerait alors par le point F une perpendiculaire qui couperait les côtés BA, BC en A, C, établissant ainsi la forme et les dimensions du triangle requis.



(742) Autre solution. Soit ABC le triangle, dont on connait le pér., la perpendiculaire BF et l'angle vertical B, pour trouver les côtés. Supposons les côtés BA, BC indéfiniment prolongés et que DKE soit un cercle touchant la base en H et les côtés prolongés en D et E. Il résultera de ces hypothèses que CE sera égale à CH et AD à AH, puisque les tangentes menées d'un même point à un cercle sont égales ; on aura de même

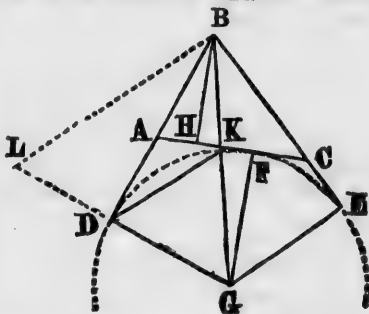




tangente BE=tangente BD=$\frac{1}{2}$ pér. ABC; BG bissectera (**494**) l'angle B et dans le triangle BDG on aura BD, l'angle droit (**466**) BDG et l'angle DBG=$\frac{1}{2}$B, pour trouver le rayon DG du cercle et la bissectrice BG. Les triangles rectangles semblables BFK, GHK donneront GH : GK :: BF : BK ou alt. GH : BF :: GK : BK ou comp. GH+BF : BF :: GK+BK : BK. Ayant obtenu de cette manière le point d'intersection de la base AC et de la bissectrice BG, il est clair qu'une ligne menée par ce point, tangente au cercle donné DKE, coupera les tangentes BD, BE de manière à donner le triangle voulu ABC.

La construction dans ce cas, consistera à prendre BD= au demi-pér. ABC, faire l'angle DBG=$\frac{1}{2}$B et mener DG perpendiculaire pour rencontrer BG en G; diviser ensuite (**514**) BG dans le rapport de BF à GH et par le point de division K mener la tangente AC au cercle décrit du centre G avec le rayon GD; cette tangente rencontrera BD, BE en A, C et ABC sera le triangle voulu.

(**743**) **Sco. Pour diviser** BG **en** K **dans le rapport voulu** de BH : GF, il n'y a qu'à prolonger GD d'une quantité DL=BH, joindre BL et mener par le point D la ligne DK parallèle à BL. Ceci est évident; car GD= GF, ce qui donne alors GD : DL :: GF : BH :: GK : BK.



(**744**) **PROB. Dans un triangle** ABC, **on a la surface, l'angle vertical** B **et un point** F **en dehors du triangle, dans la direction ou l'alignement de la base** AC, **pour former le triangle.**

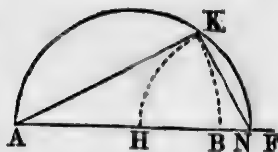
On voit de suite que ce problème est analogue à celui du par. (591) ; car, partager un triangle BLN en deux parties, de surfaces données, n'est autre chose qu'enlever au triangle ou séparer du triangle une partie, de surface donnée. Ce qui, en d'autres termes, se réduit à mener une ligne qui avec deux autres lignes données en position, renferme une surface voulue.

Ayant mené FH, FE respectivement parallèles à AB, BC et trouvé de cette manière la surface du parallélogramme HE ; on a (589) EG : AH :: AH : BD ; mais pendant que dans le cas du prob. (591) on connaissait la moyenne proportionnelle et la somme des parties inconnues, on connait ici une des parties BD=2 surf. ABC et la somme EH de la moyenne proportionnelle AH et de l'autre partie EG. C'est donc à diviser cette somme EH en deux parties AH, EG telles que l'une d'elles AH soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie EG et la partie donnée BD que consistera toute la difficulté de la solution. Cette opération faite, on aura la surf. du parallélogr. EG qu'on divisera par sa base FE=BH pour avoir sa hauteur AM. On mènera enfin une ligne AG parallèle à EF et à une distance de cette dernière égale à la hauteur AM ; cette ligne coupera BL en A, et par les points F,A on mènera la droite FAC qui résoudra le problème.

La division du parallélogr. EH en deux parallélogrs. AH, EG ayant entre eux un rapport donné, ou en deux surfaces proportionnelles à une surface donnée, peut se réduire, comme on l'a déjà vu (594) à la division d'une ligne dans les mêmes conditions. Ayant donc trouvé (**571 Lem.** 5°)

deux lignes qui aient entre elles le rapport de EH à BD, l'on procédera comme dans le problème suivant.

(745) **PROB. Diviser une ligne donnée AB en deux parties telles que l'une d'elles BH soit moyenne proportionnelle entre l'autre partie AH et une autre ligne donnée BF.**



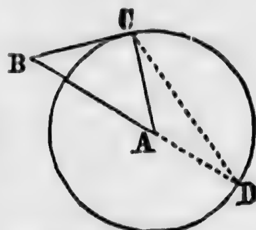
Ayant disposé bout à bout les deux lignes données AB, BF comme dans la fig., on prendra le point milieu N de BF et sur AN comme diamètre on décrira le demi-cercle AKN. Du point A avec un rayon = AB on coupera la demi-circonférence en K et du point N avec un rayon = KN on coupera AN en H; BH sera la moyenne proportionnelle voulue.

En effet, l'angle AKN dans un demi-cercle est droit et on a $AN^2=AK^2+KN^2=AB^2+HN^2$: mais (359) $AN^2=AB^2+BN^2+2AB.BN$, d'où $HN^2=BN^2+2AB.BN$; or (359) $HN^2=HB^2+BN^2+2HB.BN$; donc (68 **Ax.**) $BN^2+2AB.BN=HB^2+BN^2+2HB.BN$ et en biffant le facteur BN^2 commun aux deux côtés de l'équation, il reste $2AB.BN=HB^2+2HB.BN$; mais $2AB.BN=2HB.BN+2AH.BN=2HB.BN+HB^2$ et en faisant disparaitre les facteurs communs 2HB.BN de la dernière équation, il reste $HB^2=2AH.BN$; c-à-d., $HB^2=AH.BF$, puisque $BF=2BN$ par construction.

(746) **Sco.** Si on avait les nombres respectifs d'unités de mesure contenues par AB et BF ou par les surfaces représentées par ces lignes, on obtiendrait une **solution numérique** en ajoutant au nombre à diviser la moitié de l'autre nombre donné. On ferait le carré de la somme et de ce carré on soustrairait le carré du nombre à diviser. On extrairait la racine carrée du reste, et cette racine diminuée de la moitié de l'autre nombre donné, serait la moyenne proportionnelle voulue.

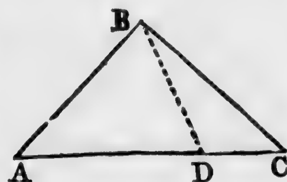
(747) PROB. Dans un triangle isocèle rectangle ABC, on a la somme AB+AC de la base et de l'un des côtés, pour construire le triangle.

Soit AD=AC, on a l'angle D=½A =¼C, puisque A=B=½ comp. C. D'où il suit, qu'ayant pris BD=AB+AC, on fera à l'une des extrémités un angle B=½ angle droit et à l'autre extrémité un angle D=¼ angle droit; les lignes BC, DC détermineront au point de leur rencontre le sommet C du triangle voulu.



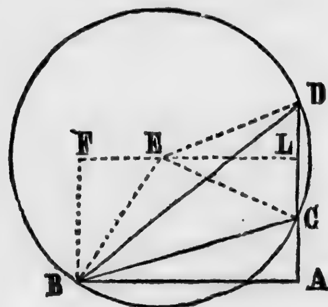
(748) PROB. On a la différence DC entre la base AC et le côté AB d'un triangle rectangle isocèle ABC; trouver les côtés.

Soit AD=AB, BAD sera isocèle et on aura l'angle BDA= comp. ½A ou comp. ½B; puis BDC= sup. BDA et puisque C=A on a dans le triangle BDC un côté DC et les angles adjacents pour trouver le reste.



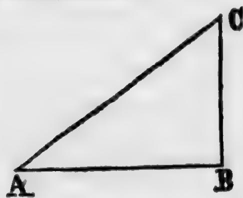
(749) PROB. Il s'agit de **construire un triangle rectangle BAC dont on a un côté AB et l'angle CBD soustendu à l'extrémité B du côté donné par le prolongement CD de l'autre côté AC.**

Puisqu'on a un angle B sur une base donnée CD, l'idée se présente encore ici de décrice sur cette base un cercle capable de contenir l'angle donné. A cet effet on fera (450) chacun des angles EDC, ECD à la base égal au comp. de l'angle donné, puisque DEL=CEL



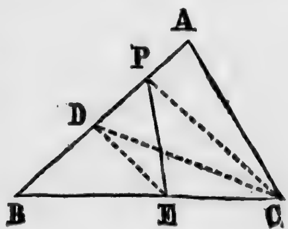
$=\frac{1}{2}$DEC=CBD. On connaîtra alors le rayon ED, la perpendiculaire EL parallèle à AB et LD ou LC moitié de CD. Dans le triangle rectangle BFE, on aura donc EF=FL—EL =BA—EL, et EB rayon du cercle, pour trouver BF=AL et AC=AL—LC.

(750) PROB. **On demande a former un triangle rectangle ABC contenant une surface donnée et tel que la différence AB—BC entre ses côtés soit égale à la différence AC—AB entre le plus grand côté et la diagonale.**



Comme on aura $AC^2=AB^2+BC^2$ il est nécessaire que les côtés voulus satisfassent aux deux conditions; or les nombres 3, 4 et 5 sont dans les conditions requises, puisque 5—4=4—3 =I et que $5^2=4^2+3^2$; les côtés BC, AB, AC, devront donc être entre eux dans le rapport de 3:4:5 et le problème se réduira à celui du par. (678).

(751) PROB. **Partager un triangle donné ABC en deux parties équivalentes ou ayant entre elles un rapport voulu M à N par une ligne PE partant d'un point donné P dans l'un des côtés.**

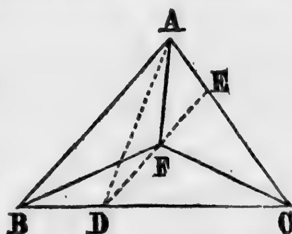


Diviser AB en D dans le rapport voulu, mener DE parallèle à PC et joindre PE. En effet, parceque PC, DE sont parallèles, on a PDE =CDE; ajoutez à chacun DEB, alors PEB=DCB, et en retranchant les deux de ACB, il vient le quadrilatère ACEP équivalent au triangle ACD. Maintenant ACD : DCB :: AD : DB :: M : N et en conséquence ACEP : PEB :: M : N.

(752) Sco. Le dernier par. suggère la méthode de **diviser un triangle en un nombre quelconque de parties égales ou proportionnelles par des lignes menées d'un point donné**

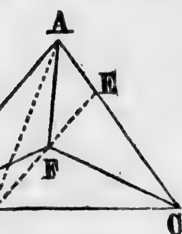
dans l'un de ses côtés; car si l'on suppose AB divisé en parties égales ou ayant entre elles les rapports voulus et si des points de division de la ligne AB on mène des lignes parallèles à PC, elles intersecteront BC et AC, et si l'on mène ensuite de ces intersections des lignes au point P, elles diviseront le triangle tel que voulu.

(753) **PROB. Diviser un triangle ABC en trois parties équivalentes ou ayant entre elles un rapport donné M à N à R par des lignes menées des sommets A, B, C des angles à un même point F situé à l'intérieur de la figure.**

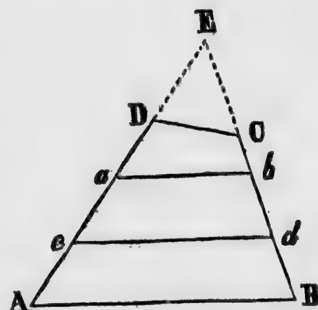


A cet effet, divisez d'abord BC, en D dans le rapport de M:N, menez DE parallèle à AB et joignez AD. Puisque les triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, on aura ABD à ABC dans le rapport voulu, c'est-à-dire, comme M: M+N+R. Mais à cause de la parallèle DE, tout point F de cette parallèle autre que D satisfera également à la condition imposée, puisque AFB=ADB ces triangles étant sur même base AB et entre mêmes parallèles AB,DE. Cela posé, il n'y aura plus qu'à diviser la parallèle DE en F dans le rapport de N à R et à mener les lignes FA, FB, FC pour compléter la construction; car, puisque DF:FE::N:R les triangles DBF, EAF qui ont même hauteur seront entre eux dans le rapport de N à R et les triangles DCF, ECF qui ont même hauteur seront aussi entre eux comme N à R. Le triangle entier BFC sera donc (**81 Ax.**) au triangle entier AFC comme N à R. D'ailleurs, en menant par le point F des parallèles à BC et à AC on ferait pour BFC, AFC la même preuve qu'on a fait pour AFB; donc, etc.

(754) **PROB. Partager un quadrilatère ABCD en deux ou plusieurs parties équivalentes ou ayant entre elles**



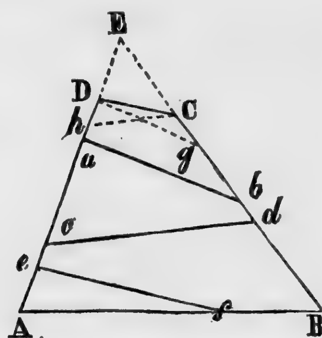
des rapports donnés, par des lignes *a b*, *c d* **parallèles à l'un des côtés.**



Comme on ne connaît aucun rapport entre les surfaces de quadrilatères ou de trapèzes non semblables et les carrés de leurs côtés correspondants, l'idée se présente de réduire l'opération à celle du partage d'un triangle dans les mêmes conditions; et l'on voit de suite que prolongeant jusqu'à leur rencontre en E les deux côtés AD, BC du quad. adjacents à celui AB auquel doivent être parallèles les lignes de division, on obtient un triangle AEB et pourvu qu'on en connaisse la surface, le problème se réduira à celui du par. (569). Or la surface AEC sera connue si l'on peut avoir celle du triangle auxiliaire DEC. Le quad. étant donné, on en connaît en conséquence les côtés et les angles; alors on a dans le triangle DEC, un côté DC et les angles adjacents, respectivement égaux aux suppléments des angles D, C du quad. pour trouver les côtés DE, CE et la surface DEC qu'on ajoutera à celle du quad. pour avoir la surface entière AEB. On procèdera ensuite tout de même que si le côté CD n'existait pas, c'-à-d., absolument comme dans le cas du triangle.

(755) **PROB. Partager un quadrilatère donné ABCD en deux ou plusieurs parties, de surfaces égales ou ayant entre elles des rapports donnés M à N à R à etc., par des lignes** *a b*, *c b*, *etc.*, **perpendiculaires à l'un des côtés ou formant avec les côtés des angles donnés quelconques.**

La première partie de l'opération consistera à trouver les surfaces respectives des parcelles $abCD$, $abdc$, etc., et l'on a déjà indiqué au par. (**599 Sco. 4**) la manière d'arriver à ce résultat. Ayant ensuite prolongé les côtés AD, BC sur lesquels doivent tomber les lignes de division, jusqu'à leur rencontre en E, et trouvé la surface du triangle auxiliaire DEC, comme dans le dernier prob., on aura surmonté une des difficultés attachées à la solution du problème, en ajoutant au quad. donné le triangle auxil. ainsi trouvé, pour réduire le tout en un seul triangle AEB ; mais il reste une seconde difficulté à vaincre ; c'est que la ligne de division n'est pas, comme dans le dernier prob., parallèle à l'un des côtés du quad. et à dessein d'éliminer cet obstacle, l'idée nous vient de faire disparaître pour ainsi dire la ligne DC, pour la remplacer par une autre ligne Dg qui soit parallèle à ab et qui nous permette d'assimiler ainsi ce problème au dernier, afin de le résoudre à la manière générale des triangles semblables. A cet effet ayant mené Dg parallèle à ab, on a, dans le triangle CDg, un côté CD, l'angle C et l'angle Cdg égal à la différence entre l'angle donné D du quad. et l'angle d'inclinaison à donner à la ligne de division ab ou a celle Dg qui lui est par hyp. parallèle. On procédera à trouver la surface de CDg qu'on ajoutera à DEC pour avoir DEg ; après quoi il ne restera plus qu'à poser surf. DEg : surf. aEb :: $ED^2 : Ea^2$; la racine de Ea^2 diminuée de ED donner enfin Da et par conséquent le point a par où devra passer la ligne de division ab pour remplir les conditions assignées.

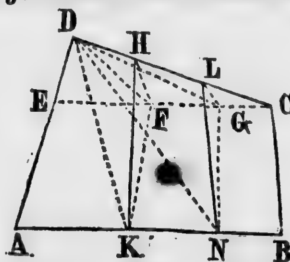


Si les autres lignes de division cd, etc., étaient parallèles à la première ab, les antécédents de la proportion resteraient les mêmes ; mais dans le cas contraire, il est clair qu'il y aurait

à remplacer Dg par une nouvelle ligne Ch parallèle à la ligne de division suivante cd, et ainsi de suite, trouvant dans chaque cas un nouveau triangle CDg ou DCh qui étant ajouté à EDC, rendrait l'antécédent EDg ou ECh semblable au conséquent Eab ou Ecd.

(756) **Sco. 1.** Pour ce qui est de la ligne de division ef, il est clair qu'il faudrait entièrement changer de base et procéder comme au par. (**674**) puisque Aef n'est autre chose qu'un triangle dont on connaît la surface et les angles; et l'on voit ainsi que le procédé indiqué relativement aux autres lignes de division n'est après tout que celui déjà employé à résoudre un triangle lorsqu'on n'en connaît que la surface et les angles.

(757) **Sco. 2. Si, dans le partage d'un quadrilatère, les lignes de division n'étaient pas assujetties à des directions particulières**; on mènerait d'abord une parallèle EC à la base, et l'on diviserait EC et AB aux points F, G et K, N, en parties ayant entre elles les rapports voulus; il y aurait ensuite à joindre FD, GD, puis à joindre KD, ND et à mener à ces dernières les parallèles FH, GL; joignant enfin HK, NL, on aurait opéré la division voulue.

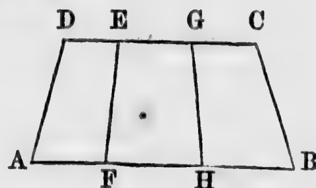


Pour preuve, il suffira de faire remarquer que le triangle DFK est égal à DHK sur même base DK et entre mêmes parallèles et que le triangle DLN=DGN pour une raison analogue.

(758) **PROB. La division d'un trapèze AC en deux ou plusieurs parties égales ou proportionnelles (*) par des lignes EF, GH menées entre ses côtés parallèles AB, DC,**

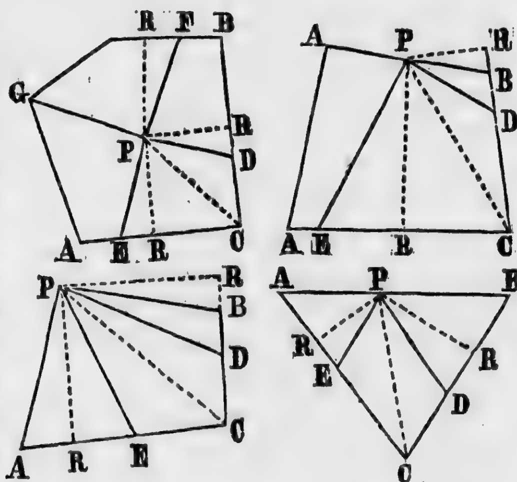
(*) Il est à peine nécessaire de remarquer que le mot " proportionnelles " ainsi employé, n'a pas, necessairement, ici, la signification qu'on lui a donnée au par. (**60**), mais qu'il remplace (pour abréger) les mots " ayant entre elles des rapports donnés " et que " parties ou surfaces proportionnelles " en ce sens, veut dire " proportionnelles à des lignes ou à des nombres donnés ou ayant entre eux des rapports donnés," ces derniers mots étant évidemment sous-entendus après " proportionnelles."

se réduirait tout simplement à diviser chacun des côtés AB, DC en parties égales ou ayant entre elles les rapports à observer entre les surfaces voulues; ceci est clair, puisque les trapèzes partiels AE, FG, HC, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.

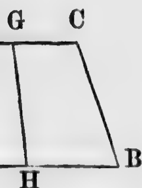


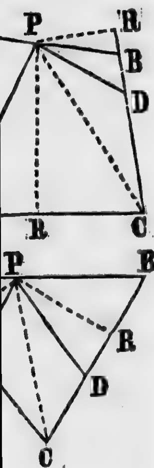
(759) PROB. En général, diviser une figure quelconque ABC en un nombre quelconque de parties égales ou ayant entre elles des rapports donnés, par des lignes PD, PE, PF, Petc., partant d'un angle P, d'un point P dans un des côtés ou d'un point P situé à l'intérieur de a figure.

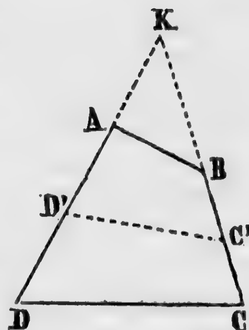
Ayant d'abord mené du point de division P une diagonale PC, afin de voir de quel côté tombera la ligne de division, on mènera successivement les perpendiculaires PR du point de division aux côtés sur lesquels tomberont les lignes du partage; les demi-perpendiculaires diviseront les surfaces des parties composantes, de manière à donner les bases respectives AE, BD, etc.



(760) PROB. Dans un quadrilatère quelconque ABCD, on a la surface, un côté AB avec les angles adjacents à ce côté et le rapport entre les deux côtés adjacents au côté donné, pour trouver les côtés.







On se propose ici de penser, pour ainsi dire, tout haut, afin d'indiquer à l'étudiant l'espèce de raisonnement qui peut avoir porté à la découverte de cette manière d'opérer la solution du problème.

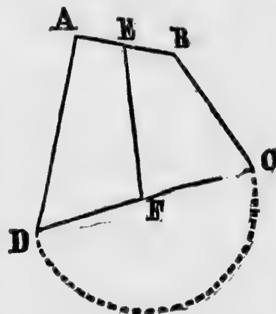
Il s'agit de construire une figure à l'aide de données qui ne paraissent pas d'abord devoir se prêter à l'objet désiré, et on a toujours pour but dans ce cas de modifier les données ou de les remplacer par d'autres qui aillent directement à l'établissement de rapports entre les surfaces et les carrés des côtés, ce qui n'aura lieu que quand les figures sur lesquelles on opère seront semblables entre elles.

On ne peut ici tirer parti du triangle auxiliaire ABK qui nous a été d'un si grand service dans plusieurs problèmes précédents ; c'est que les côtés AK, BK de ce triangle sont invariables dans leurs longueurs relatives, pendant que celles des côtés AD, BC changent constamment avec chaque nouvelle valeur AD' que l'on puisse supposer à l'un d'eux ; en d'autres termes, le rapport entre AK et BK est invariable, pendant que le rapport entre D'K et C'K est variable ; mais dans les triangles semblables les rapports entre les côtés sont identiques, et l'on vient de voir que le rapport de AK à BK diffère de celui de D'K à C'A ; donc AKB n'est pas semblable à D'KC' et par suite D'C' n'est pas parallèle à AB, si ce n'est lorsque le quad. est un trapèze. La surface donnée, sous sa forme actuelle de quad. irrégulier, ne nous permet donc pas même de tirer d'une hypothèse l'avantage qu'on en a déjà souvent obtenu par le passé.

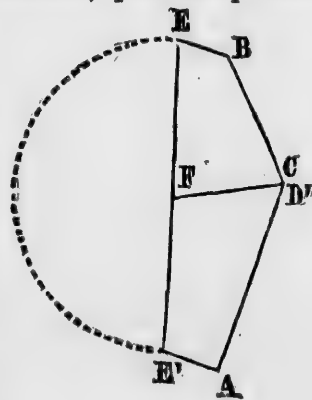
Il y a cependant une autre condition du quad. dont on pourra peut-être tirer parti, c'est que la somme de ses angles vaut quatre angles droits, et comme on connaît deux de ces angles, on connaît aussi la somme des deux autres. S'il était possible alors de varier la forme de la figure de manière

à combiner ces deux angles pour n'en former qu'un, et sans aucunement changer la valeur des angles A et B, il semble qu'on en tirerait quelque avantage. C'est ce que l'on va faire.

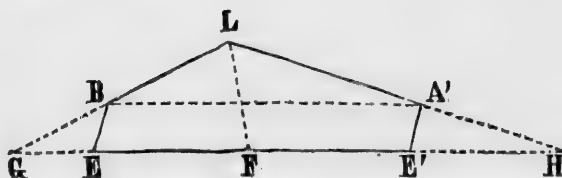
Soit EF la bissectrice commune du côté donné AB et du côté opposé DC, on aura AE=BE et DF =CF et parce que DC est une ligne droite et que la somme des angles en F vaut deux angles droits, il est clair que si la partie AEFD du quad. tournait autour du point F, de manière à décrire une demi-circonférence, le point D tomberait en C, la base EF du quad. AF serait située sur le prolongement de la base EF du quad. BF et ces deux bases ne formeraient plus qu'une seule et même ligne droite ; de plus les angles D et C, dont on connaît la somme, seraient ajoutés l'un à l'autre de manière à ne former plus qu'un seul angle, dont on connaitrait par là même la valeur, et les côtés AE, BE qui sont actuellement parallèles l'un à l'autre (**146**) seraient encore parallèles entre eux, après que l'un d'eux aurait franchi un espace angulaire équivalent à deux angles droits ; le tout comme on le voit dans la fig. D'ailleurs, pour ce qui est



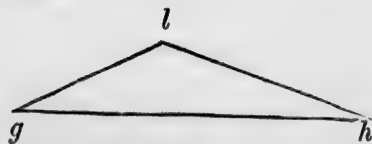
du parallélisme des côtés A'E', BE il est clair, à cause de la droite AB, dans la dernière figure, que la somme des angles AEF, BEF vaut deux angles droits ; or, ces angles, qui dans la nouvelle fig., ont changé de position, n'ont pas pour cela changé de valeur et puisque EFE' est une ligne droite et que l'angle A'E'F est supplément de BEF, il suit (**154**) que AE' et BE sont parallèles entre eux.



Au lieu d'un quad. avec un côté, deux angles, la surface, et le rapport entre deux côtés; on a donc maintenant un pentagone dont on connaît la surface, deux côtés A'E'=BE (=½AB de la première fig.) trois angles A', B et L=C+D, on sait que les deux autres angles E E' sont supplémentaires l'un de l'autre et on a le rapport entre deux côtés BA' (qui est évidemment le même que celui entre les côtés correspondants de la dernière fig.) pour trouver les côtés AD, BC, (A'L, BL).



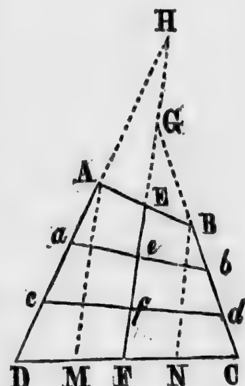
L'idée se présente maintenant de prolonger les côtés EE', BL, A'L du polygone A'E jusqu'à leur rencontre en G et H, pour n'avoir plus à opérer que sur un triangle GLH, et l'on voit de suite comment tous les éléments nécessaires à la construction de ce triangle vont nous devenir connus. En effet, ayant joint A'B, on aura A'B parallèle à E'E, à cause de BE, A'E' parallèles et égaux. Les triangles BLA', GLH sont donc semblables. Dans le triangle BLA', on a le rapport de BL à A'L et l'angle inclus par ces côtés, pour trouver les angles en B et A' auxquels G et H sont respectivement égaux. On a donc dans les triangles auxiliaires BGE, A'HE' un côté BE, A'E', les angles en G et H, et les angles EBG, E'A'H supplémentaires des angles donnés B, A' du quad., pour trouver les côtés BG, A' H et les surfaces EGB, E'HA' qu'on ajoutera à la surface donnée EA' du quad. pour avoir celle du triangle GLH.



Enfin l'on supposera à GL ou à HL une longueur arbitraire *g l* ou *h l* et sur un de ces côtés comme base on fera un nouveau triangle *g l h* équiangle et par conséquent

semblable à GLH, pour faire ensuite surface $g\,l\,h : g\,l^2$ :: surf. GLH : GL^2, et la racine de GL^2 diminuée de BG donnera BL. On obtiendra de même AL, et le problème sera résolu.

(761) **PROB. Partager un quadrilatère ABCD en parties équivalentes ou ayant entre elles des rapports donnés, par des lignes** *ab*, *cd*, etc., **coupant les côtés opposés, en parties qui soient proportionnelles à ces côtés**; c-à-d, telles que l'on ait A*a* : AD :: B*b* : BC, *ac* : AD :: *bd* : BC :: etc.

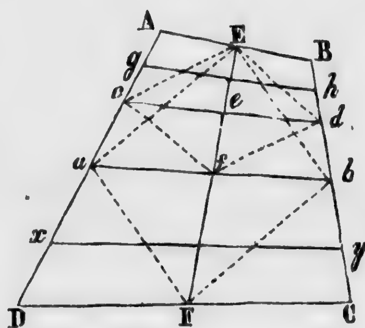


Il est clair que si la bissectrice EF des côtés AB, DC du quad. était en même temps celle des lignes de division *ab*, *cd*, il n'y aurait qu'à répéter autant de fois que de lignes de division à mener, l'opération indiquée au dernier par., les deux premiers termes $g\,l\,h : g\,l^2$ du rapport restant constamment les mêmes et le troisième terme GLH (c-à-d. GFC+HFD) variant d'une des parties composantes A*b*, *ad*, etc., soit en plus ou en moins, suivant le sens dans lequel on poursuivrait l'opération.

Ayant mené AM, BN parallèles à EF, on a dans les triangles semblables CGF, CBN et DHF, DAM les rapports CG : CB :: CF : CN et DH : DA :: DF : DM d'où (**75 Ax.**) CG : CB :: DH : DA, ou (96) CG—CB : CB :: DH—DA : DA, c-à-d., BC : BG :: AD : AH et comme on doit avoir *b*B : CB : *a*A : DA, *d*B : CB :: *c*A : DA, etc., on aura aussi (**75 Ax.**) BG : *b*B :: AH : *a*A, BG : *db* :: AH : *ca*, etc ; or, (**81**) les rapports qui sont composés de rapports égaux sont égaux et comme la somme des angles *a* et *b*, *c* et *d*, etc. des quad. A*b*, A*d*, A etc., est invariable, il est clair qu'en supposant comme auparavant les triangles G*eb*, H*ea* réunis par leurs côtés *eb*, *ea*, les triangles G*fd*, H*fc* réunis par leurs côtés

fd, fc, et ainsi de suite, on aura une série de triangles dont les côtés bG, aH et dG, cH, etc., seront l'un à l'autre dans un rapport invariable et dont l'angle inclus $b+a$ de l'un sera égal à l'angle inclus $d+c$ de l'autre. Cette invariabilité de l'angle inclus et du rapport entre les côtés qui le comprennent fera que dans tous ces triangles les angles G, H, à la base seront constamment les mêmes. Donc, si $eb=ea$ et que $fd=fc$, etc., la somme des trois angles G, H et $b+a$, G, H et $d+c$, etc., vaudra deux angles droits et le côté fG sera dans le prolongement de fH; de même eG sera dans la même ligne droite que eH et ainsi des autres et réciproquement si G ou H demeure constant, il est clair que la droite FG bissectrice des côtés AB, DC du quad. passera aussi par les points milieux e, f, etc., des lignes de division menées dans les conditions requises.

(762) **Sco.** L'étudiant saisira peut-être mieux la preuve suivante que **la bissectrice EF des côtés opposés d'un quadrilatère est en même temps celle de toutes les lignes menées entre les deux autres côtés de manière à les couper en parties ayant entre elles le rapport de ces côtés.**



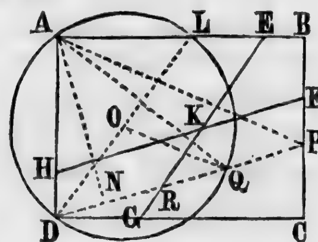
Soient a, b les points milieux des côtés AD, BC; il est clair qu'on aura Aa : AD :: Bb : BC, et que la ligne de division ab sera dans les conditions voulues, et elle est bissectée en f; car (673) EaFb est un parallélog. et (283) les diagonales d'un parallélog. se bissectent mutuellement.

Soient encore c et d les points milieux de Aa et de Bb; on aura toujours Ac : Aa :: Bd : Bb et puisque Aa : AD :: Bb : BC on a (**81 Ax.**) Ac : AD :: Bd : BC; donc aussi cd coupe les

côtés opposés dans les conditions voulues et elle est bissectée en e, car E, c, f, d sont les point milieux des côtés d'un quad., d'où Ecfd est un parallélogramme et la diagonale Ef, partie de la ligne droite EF, bissecte la diagonale cd en e. On continuerait ainsi à démontrer que EF bissecte gh et ainsi de suite, quelque fût le nombre de subdivisions. On en conclut que si EF bissecte les lignes qui coupent les côtés opposés en 2, 4, 8, 16, 32, etc., parties égales, elle bissectera également toutes autres lignes qu'on pourrait mener dans les conditions voulues ; puisque si la subdivision des côtés AD, BC était continuée à l'infini, les lignes de division se toucheraient enfin, pour ainsi dire, et comprendraient parmi leur nombre toutes celles qu'il serait possible de concevoir.

D'ailleurs, si on supposait les côtés AD, BC subdivisés par 2 à l'infini, les nombres infinis de points que contiendraient ces côtés pourraient se diviser dans des rapports voulus quelconques ; et encore de cette manière il devient évident que parmi ces points on en trouverait deux x, y, l'un sur chacun des côtés opposés, tels que la ligne de division xy menée d'un de ces points à l'autre couperait AD, BC de manière à donner xD : AD :: yC : BC et de manière en même temps à remplir l'autre condition donnée, celle de renfermer une surface xC égale à une surface donnée.

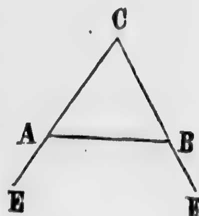
(763) PROB. Dans un rectangle ABCD dont on connaît la surface, on a les distances EG, FH de quatre points E, F, G, H, situés l'un dans chacun des côtés du rectangle et l'angle d'inclinaison EKF de ces distances l'une à l'autre, pour trouver les côtés.



Soit AC le rectangle voulu, D un de ses angles, DL parallèle et égale à EG et DP parallèle et égale à HF. Ayant décrit un cercle sur DL comme diamètre, ce cercle passera par le point A, à cause de l'angle

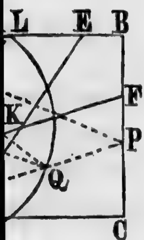
droit DAL. Joignez OQ et vous aurez dans le triangle isocèle DOQ deux côtés OD, OQ et l'angle ODQ=EKF pour trouver DQ et l'angle DOQ; dans le triangle DAQ vous avez DQ, l'angle vertical DAQ=½DOQ et la perpendiculaire $AN=\frac{\text{surf. AC}}{\text{DP ou HF}}$ (car le triangle APD=½AC de mêmes base AD et hauteur AB) pour trouver (**727**) le côté AD du rectangle et l'angle DAN. Le côté DC viendrait $=\frac{\text{surf. AC.}}{\text{AD}}$ et pour fixer le point D il n'y aurait plus qu'à mener par le point G la ligne DC faisant avec GE un angle EGC =(**251**) DRG+RDG=EKF+DAN (**322**) et par le point H la ligne AD fesant avec HF un angle AHF égal au complément de HAN ; ces deux lignes suffisamment prolongées s'intersecteraient en D et il est évident qu'en donnant ensuite à AD et à DC les longueurs que doivent avoir ces côtés et par les points C et A menant les perpendiculaires CB et AB, ces dernières rencontreraient sur leur passage les points donnés F et E et s'intersecteraient en B, complétant ainsi la construction du rectangle demandé.

(**764**) **PROB. On demande à mener une ligne AB, la plus courte possible, qui avec deux autres lignes indéfinies CE, CF se rencontrant sous un angle donné, renferme une surface voulue ACB.**



On a vu (**372**) que de tous les rectangles contenus par les segments d'une ligne donnée, le plus grand est le carré décrit sur la moité de la ligne ; ce qui veut dire en d'autres termes que le périmètre d'un carré est moindre que celui d'un rectangle quelconque de surface égale.

Il est clair aussi, qu'à périmètre égal, la surface du rectangle AC est plus grande que celle du parallélogramme correspondant EC ; car, BC étant la base commune, on



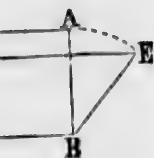
aura CF=CD, ce qui donnera FG pour hauteur du parallélogramme, pendant que celle du rectangle est CD; or GF est moindre que CD ou CF, puisque CF est l'hypoténuse du triangle rectangle CGF.

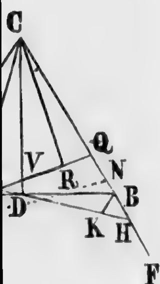
Il suit encore de la prop. XXIII qu'à périmètre égal, la surface du rectangle est d'autant plus grande que ses côtés approchent le plus de l'égalité, et il est de même évident pour le parallélogramme qu'à périmètre constant, sa surface augmentera avec l'égalité de ses côtés; donc la surface du losange est plus grande en raison de son périmètre que celle de tout autre parallélogramme équiangle.

Il résulte des considérations précédentes que **plus une figure est régulière, plus son périmètre est petit en raison de sa surface** ; c'est ainsi que le triangle équiangle, le plus régulier des triangles, est en même temps celui qui renferme le plus d'espace en raison de son périmètre; le polygone régulier contient aussi plus de surface que le polygone irrégulier de même périmètre, et le cercle est de toutes les figures celle dont la circonférence ou le périmètre est le moindre eu égard à l'espace contenu.

On est donc porté à croire que la ligne demandée AB sera la plus courte possible quand le triangle ACB sera isocèle, et c'est en effet ce qui a lieu, puisque c'est alors que les facteurs, c'est-à-dire, la base AB et la hauteur CD approchent le plus qu'il est possible de l'égalité.

D'ailleurs, ayant mené par le point D, milieu de AB, la ligne GH et BK parallèle à AG, les deux triangles, ADG, BDK seront semblables et égaux en surface à cause de AD=BD;





mais ADK n'est qu'une partie de BDH ; donc BDH excède ADG et la ligne GH, fût-elle plus courte que AB, ne remplirait pas l'autre condition du problème, celle de renfermer une surface GCH=ACB, puisque le triangle BDH qu'elle ajoute à ACB d'une part, est plus grand que celui ADG, qu'elle lui enlève d'autre part. Or, GH n'est pas plus petite que AB et au contraire elle est plus grande que AB ; car la surface GCH, fût-elle égale à ACB, la perpendiculaire CL, côté du triangle rectangle CLD est moindre que la perpendiculaire CD, hypoténuse de ce triangle et la surface GCH ou ACB divisée par une moindre hauteur CL donnerait nécessairement une base GH plus grande que AB. Mais comme on vient de le voir, la surface GCH est plus grande que ACB ; à plus forte raison donc GH est-elle plus grande que AB et il en serait de même de toute autre ligne passant par le point D.

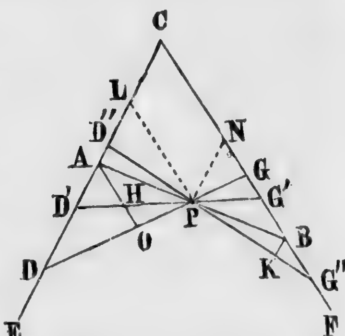
Il est à peine nécessaire d'observer que, puisque GH, passant par le point D donne une surface GCH>ACB, toute autre ligne MN audelà du point D ne ferait qu'augmenter la différence entre BRN et ARM et par suite la différence entre ACB et MCN, s'éloignant par là même davantage des conditions du problème, au lieu de s'en approcher.

Maintenant si AB n'est pas la ligne la plus courte, non plus que GH ou MN, soit PQ cette ligne et soit CR perpendiculaire à cette dernière ; on aura dans le triangle rectangle CRV, le côté CR moindre que l'hypoténuse CV ; mais CV<CD et à fortiori CR<CD ; donc $\frac{ACB}{CR}$ donne PQ>AB. Donc AB est la ligne demandée ; c-à-d., que AB est la plus courte possible lorsqu'elle coupe les côtés opposés CE, CF de manière à donner AC=BC.

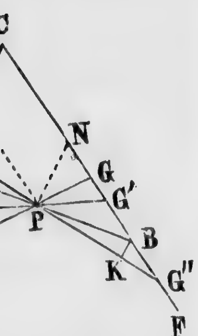
Cela posé, le problème se réduit à celui de construire un triangle dont on a la surface et les angles et se résoudra à la manière du par. (**674**).

(765) **PROB. Mener par un point donné** P, **une ligne** AB **qui avec deux autres lignes indéfinies** CE, CF **se**

rencontrant sous un angle donné, renferme la moindre surface possible ABC.



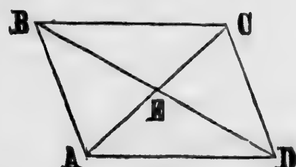
Ayant mené PL, PN respectivement parallèles aux côtés CF, CE de la fig., il n'y a rien qui indique au premier abord la direction AB que doit prendre la ligne de division. Menons une ligne d'essai quelconque DG; on voit que les triangles DPL, GPN sont semblables à cause des parallèles PN, CE et PL, CF et DPL est d'autant plus grand que GPN que DP excède GP. En faisant tourner la ligne DG autour du point P, pour prendre la nouvelle position D′G′, on s'aperçoit qu'on a pour ainsi dire, fait un pas vers la solution du prob., puisqu'on a ajouté d'une part à la surface DCG une partie GPG′ plus petite que celle DPD′ qu'on en a retranchée d'autre part; car ayant fait PH=PG et mené OH parallèle à GG′, on voit que les triangles GPG′, OPH sont semblables et égaux et que la surface D′CG′ est en conséquence moindre que celle DCG, de tout le quadrilatère DOHD′. En continuant à faire mouvoir la ligne D′G′ dans la même direction; on s'apercevra que tant que PD′ excèdera PG′ on aura toujours le triangle DPD′ plus grand que GPG′ et par conséquent la surface DCG>D′CG′. De même, si DG prenait une position D″G″ telle que PG″ excédât PD″, il est clair que la surface D″CG″ pourrait être diminuée en faisant tourner D″G″ de manière à rendre de plus en plus égaux les segments PG″, PD″. On est donc porté à croire que la position de la ligne de division AB doit être telle que l'on ait AP=BP. Soit donc AP=BP, il est à démontrer que toute ligne D′G′, D″G″, autre que AB, fera la surface D′CG′, D″CG″ plus grande que ACB. Ayant mené BK, AH respectivement parallèles à CE, CF, on a le triangle



BPK, partie de BPG″, semblable et égal à APD″, à cause de AP=BP ; et on a le triangle APH, partie de APD′, semblable et égal à BPG′ ; d'où il suit que la surface D″CG″ excède ACB de la quantité BKG″ et D′CG′ excède ACB de la quantité AHD′, et toute autre ligne que l'on pourrait mener par le point P donnerait le même résultat; donc AB doit être telle que AP=BP.

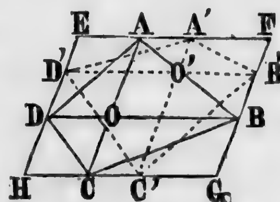
Cela posé, on a dans les triangles semblables ACB, PNB AC : PN :: AB : AP :: 1 : 2 ; d'où il est clair que AC=2PN ; ayant donc fait AC=2PN ou BC=2PL, on aura déterminé un point de trajet A ou B qui avec le point donné P fixera la position de la ligne demandée AB.

(766) **PROB. On a les diagonales d'un parallélogramme et leur inclinaison, pour en déterminer la surface.**



Puisque (283) AC, BD se bissectent mutuellement, on a dans le triangle EDC les côtés ED, EC et l'angle inclus DEC, pour construire la figure.

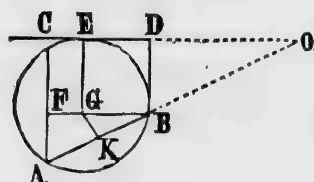
(767) **PROB. On a les diagonales d'un quadrilatère ABCD et leur inclinaison AOB pour en déterminer la surface.**



Ici les diagonales AC, BD ne se bissectant pas, on ne peut opérer sur aucun des triangles composants AOB, BOC, etc., de la fig., puisque les côtés en sont inconnus. Il nous faut donc, pour arriver au but désiré, modifier la position relative des données, ce qui se fera en disposant les diagonales et l'angle donné de manière à s'en servir comme des deux côtés d'un triangle ou parallélogramme. A cet effet, ayant mené par les points A et C du quad. les droites EF, HG parallèles à BD et par les points B, D les droites FG, EH perallèles à AC, on aura

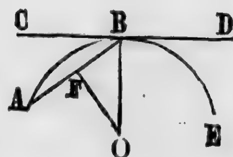
dans le parallélogramme EG les côtés adjacents et l'angle inclus pour construire la fig. Maintenant on voit (289) que le quad. ABCD est moitié du parallélogr. EG et on remarquera que quoique la surface du quad. puisse se déduire des données, il est cependant impossible d'en déterminer les côtés ou les angles, car il est évident que les diagonales AC, BD pourraient sous un angle constant O s'intersecter en toute autre point O′ sans en rien changer la surface A′B′C′D′ qui est encore égale au demi-parallélogr. EG.

(768) **PROB. Etant données les positions relatives de deux points A, B et d'une ligne CD, mener par ces points une circonférence de cercle qui soit tangente à cette ligne.**

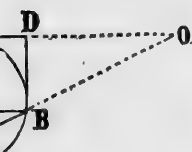


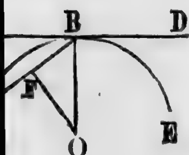
Soient les données AB, BD parallèle à AC perpendiculaires à CD ou rencontrant CD sous un angle donné quelconque. Ayant mené BF parallèle à CD, on a dans le triangle AFB, le côté AB, distance entre les points donnés, AF=AC—BD et un angle F=C ou D, pour trouver l'angle ABF égal à l'angle O formé par le prolongement de AB, CD. On a alors dans BDO un côté BD et les angles pour trouver BO qui nous donnera (505) $EO=\sqrt{AO.BO}$. On aura ensuite DE=EO—DO, distance du point de contact E. Le centre G se trouvera à l'intersection des lignes EG, KG respectivement perpendiculaires à CD, AB.

(769) **PROB. Faire passer par un point donné A un arc de cercle ABE qui soit tangent à une ligne CD en un point donné B.**



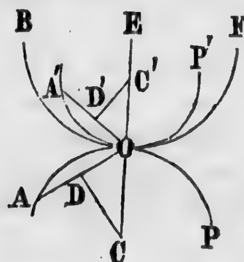
On a vu (473) que le centre du cercle est sur la perpendiculaire BO menée par le point de contact B de la tangente CD ; on a vu aussi (406) que le centre du cercle est sur la





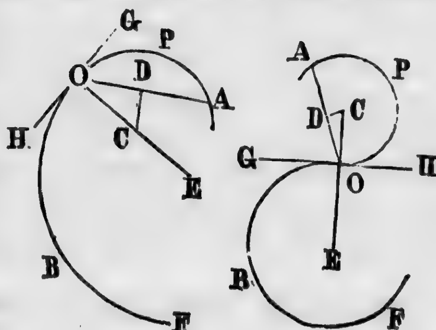
perpendiculaire FO menée par le milieu F de la corde AB ; c-à-d., que le centre O de l'arc demandé est l'intersection de BO, FO.

(770) **PROB. Par un point donné A ou A′ décrire un arc de cercle AOP ou A′OP′ qui soit tangent à un cercle ou arc de cercle donné BOF, en un point donné O.**

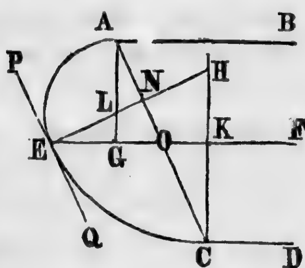


Ayant trouvé (**411** ou **414**) le centre E du cercle ou de l'arc donné et sachant (**475**) que si deux cercles se touchent soit intérieurement, soit extérieurement, la ligne EC qui joint leurs centres passe par le point de contact O ; il est clair que le centre C′ ou C du cercle voulu se trouvera à l'intersection du rayon EO ou de son prolongement OC avec la perpendiculaire D′C′ ou DC au milieu de la corde A′O ou AO.

(771) **PROB. Mener par un point donné A un arc de cercle APO qui se raccorde avec un arc donné OBF,** n'est évidemment qu'un cas particulier du dernier problème, puisqu'il est nécessaire (469) qu'au point de jonction O des deux courbes, chacune d'elles soit tangente à une seule et même ligne GH perpenlaire à la ligne EC qui joint les centres du cercle donné et du cercle demandé.

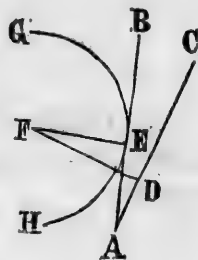


(772) **PROB. Joindre par une courbe AEC les extrémités A, C de deux lignes parallèles AB, CD de longueurs inégales.**



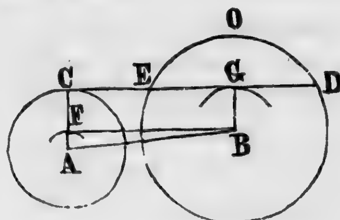
Les parallèles seront évidemment tangentes à la courbe, aux points de jonction A, C et comme le centre d'une courbe tangente à une ligne, est situé sur la perpendiculaire menée au point de contact et qu'il y a ici deux perpendiculaires AG, CH et par conséquent deux centres, la courbe AEC sera composée de deux arcs AE, EC; or les deux arcs pour former une courbe qui ne soit pas brisée au point de jonction E devront nécessairement avoir une tangente commune PQ et leurs centres L, H sur la même ligne droite EH perpendiculaire à PQ au point de contact E. A cet effet, ayant joint AC et mené par le point milieu O de cette ligne une droite EF parallèle à AB ou CD, on fera OE=OC ou OA et du point E on abaissera (**246**) sur AC une perpendiculaire EN qui coupera AG, CH en L et H centres respectifs des arcs AE, EC. Il est donc à démontrer que cette construction donne EL=AL et EH=CH; or, les triangles rectangles OKC, ONE sont (**322**) équiangles et égaux en toutes choses à cause de OC=OE par const.; donc, EN=CK et ON=OK. Maintenant dans le quad. OH il est clair que NH=KH parceque angle N=K, et que ON=OK; donc, EH (ou EN+NH)=CH (ou CK+KH). On voit aussi, à cause des triangles rectangles égaux AGO, ENO que AG=EN et OG=ON; d'où, on a dans le quad. OL, LN=LG et par suite AL (ou AG−LG)=EL ou EN−LN.

(773) **PROB. Mener à un cercle HEG, une tangente AB qui fasse avec une ligne AC dont on connaît la position, un angle donné BAC.** On n'a qu'à mener FD perpendiculaire à AC, et à faire angle DFE=BAC pour déterminer le point de contact E.



(774) PROB. Mener à un cercle donné A une ligne CD qui lui soit tangente et qui coupe sur un autre cercle donné B un segment voulu EOD.

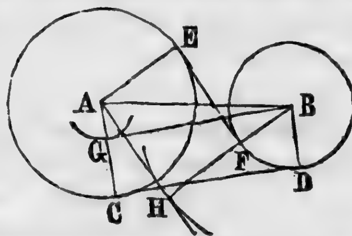
Avec un rayon AF=AC—BG, décrivez un arc F et du point B menez (491) BF tangente à cet arc. Menez AF au point de contact F, c-à-d., perpendiculaire à BF et prolongez jusqu'en C; menez BG perpendiculaire à BF et par les points C et G menez CD.



Autrement, du centre B décrivez un arc G et par le problème suivant menez CD tangente à cet arc et au cercle A.

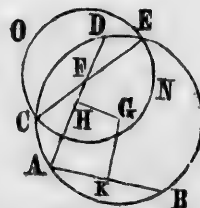
(775) PROB. Mener à deux cercles donnés A, B une tangente CD ou EF du même côté ou de côtés opposés.

Faites au centre A un arc G avec rayon AG=AC—BD, par le point B menez (491) BG tangente à l'arc G, faites AC, BD perpendiculaires à BG et joignez CD tangente du même côté. Pour EF, au centre B, décrivez un arc H avec rayon BH=AE+BF, menez AH tangente à H, AE, BH perpendiculaires à AH et joignez EF tangente de côtés opposés.



(776) PROB. Par deux points donnés A, B décrire un cercle ABD qui bissecte une circonférence donnée CON.

Soit F le centre du cercle donné, menez la droite AFD et parce qu'on connaît AF et CF=EF=½CE, on aura (572) $FD=\frac{CF.FE.}{AF}$ Ayant fait AH=HD=½AD, les perpendiculaires HG, KG détermineront le centre G du cercle voulu.



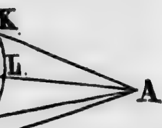
(777) PROB. Par un point donné A hors d'un cercle, mener une sécante AB qui retranche du cercle un arc donné BDC.

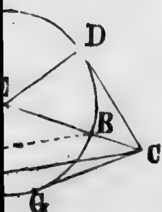
Puisque l'arc BDC est donné, on en connaît la corde BC, et on a $AD=\sqrt{AB.AC}$; mais comme on ne connaît ni AB ni AC, menons par le centre O du cercle la sécante AOR qui nous donnera AL et AR, puisque le cercle est donné ainsi que la position du point A; or on a maintenant $AB.AC=AR.AL=AD^2$ et on trouvera par la méthode du par. (378) AE (ou $AC+\frac{1}{2}BC)=\sqrt{AB.AC+EC^2}$ ou $AE=\sqrt{AD^2+EC^2}$, car BC est une ligne bissectée en E et prolongée jusqu'en A. On aura alors $AC=AE-EC$ et du centre A avec rayon AC on intersectera le cercle donné en C, par lequel et par le point A menant une droite ACB, le problème sera résolu.

Autre solution. Ayant mené (225) en un endroit quelconque du cercle une corde FG=BC, on décrira avec un rayon OQ égal à la perpendiculaire menée du centre O sur cette corde, un arc QN auquel on mènera (491) la tangente AH qui donnera (461) HK=FG et par conséquent (403) arc HK=arc FRG=BDC.

(778) PROB. Sur le diamètre prolongé d'un cercle, trouver un point C tel que la somme des tangentes CD, CG menées de ce point soit égale au diamètre ainsi prolongé.

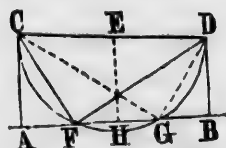
Puisque $AC=CD+CG=2CD$ et que $AC=CE+ED$, on a (68 **Ax.**) $EC+ED=2DC$. Ayant fait EF=EC, on a l'angle F=BHD $=\frac{1}{2}$BED; d'où il est clair que pour résoudre le prob. il n'y a qu'à faire un angle BED = au





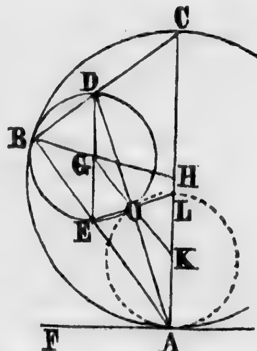
double d'un angle F d'un triangle CDF dont un côté DF est le double de l'autre DC; la perpendiculaire DC intersectera alors le rayon prolongé EB en C, le point cherché.

(779) **PROB. Trouver sur une ligne AB un point F tel que deux lignes FC, FD menées de ce point à deux autres points donnés C, D, contiennent un angle droit.**



Joignez CD et avec rayon ED ou EC=½CD, décrivez le demi-cercle CFD qui intersectera la ligne donnée AB en F, G, chacun desquels répond au prob. Il est clair que si CD<AC+BD le prob. ne pourra se résoudre, puisqu'on aurait alors EH> ED et le cercle n'intersecterait pas. Si le cercle touchait AB en H, le point de contact répondrait au prob.

(780) **PROB. Décrire un cercle ABC qui soit tangent à un cercle donné EBD et à une ligne AF en un point donné A de cette ligne.**

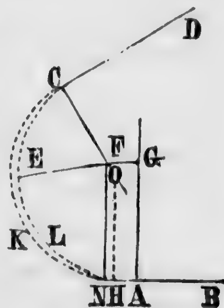


Supposons le problème résolu et que H soit le centre du cercle voulu et B le point de contact; ayant mené BC, BA, l'angle B sur ce diamètre AC sera droit. Joignons par une droite les points D, E où BC, BA intersectent le cercle donné; DE sera un diamètre, à cause de l'angle droit B et ce diamètre sera parallèle à AC; car on a dans les triangles isocèles BGE, BHA, l'angle en B commun, et en conséquence l'angle au sommet BGE égal à BHA. Il suit, que pour trouver le point de contact voulu, il suffira de mener dans le cercle donné un diamètre DE parallèle à la perpendiculaire AC. On mènera ensuite par le point d'intersection E la droite AEB qui déterminera le point B et par suite la direction de la droite BGH. Cette dernière

fixera sur la perpendiculaire AC le centre H du cercle cherché.

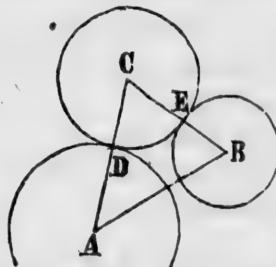
On observera que la droite AD menée du point A à l'autre extrémité D du diamètre ED déterminera en O un second point de contact et que le rayon GO prolongé fixera sur AC le centre K d'un cercle AOL qui touchera extérieurement le cercle donné.

(781) **PROB. Si on avait à relier ou à raccorder par une courbe AEC les extrémités A, C de deux lignes droites AB, CD données en position ;** il y aurait à décrire un arc CE avec un rayon arbitraire FC moindre que la perpendiculaire FN ; puis à trouver, par la méthode du dernier par. le centre G d'un arc ALE tangent à AB et à l'arc CE.



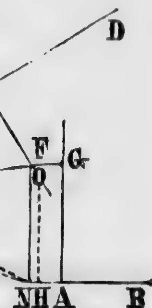
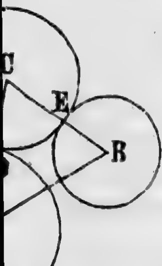
Si on prenait pour premier rayon de la courbe une ligne OC qui fût égale à la perpendiculaire OH, il est clair que la courbe CKH décrit avec ce rayon toucherait en H la partie prolongée AH de la ligne AB ; dans ce cas HO prolongée ne rencontrerait pas AG et le second rayon AG serait infini, c-à-d., que le reste AH de la courbe serait une ligne droite.

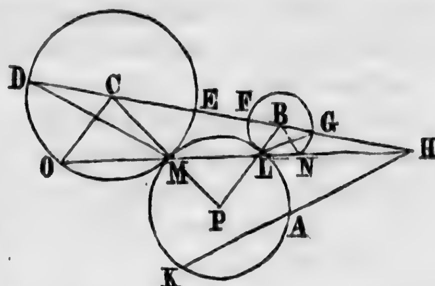
(782) **PROB. Avec un rayon donné CD décrire un cercle qui soit tangent à deux autres cercles donnés A, B.**



Supposons la chose faite, on aura AC=AD+CD et BC=BE+CE (ou CD) pour fixer le point C.

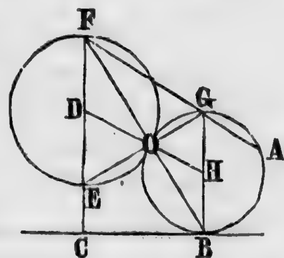
(783) **PROB. Par un point donné A, décrire un cercle P qui soit tangent à deux cercles donnés B, C.**



Supposons la chose faite; on a les triangles isocèles OCM, LBN équiangles à MPL, et parceque P=LBN on a BN paral. CP; d'où GBN=ECM et GLN (ou $\frac{1}{2}$GBN)=EDM (ou $\frac{1}{2}$ ECM). Les triangles LGH, DMH sont donc semblables et donnent HG : HM :: HL : HD; ce qui donne HD.HG=HM.HL=HK.HA. Il y a donc à trouver H; or les triangles semblables BNH, CMH donnent BH : CH :: BN : CM ou CM—BN : BN :: CH—BH : BH. On trouvera maintenant dans le cercle requis un nouveau point K en faisant HA : HL :: HM : HK ou HA : HG :: HD : HK ce qui réduira le prob. à celui du par. (725) où l'on demande à décrire un cercle tangent à un cercle et passant par deux points donnés.

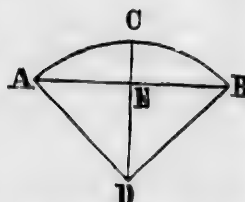
(784) **PROB. Par un point donné A, décrire un cercle H, qui soit tangent à un cercle D et à une ligne BC.**



Soit O le point de contact, ayant mène et prolongé BO, on aura EF, diamètre du cercle D parallèle à BG diam. du cercle H à cause des triangles isocèles équiangles FDO, BHO et la droite FEC sera par conséquent perpendiculaire à BC. Maintenant, EB est un quad. capable d'être inscrit dans un cercle, C et O étant droits et suppléments l'un de l'autre; d'où on tire FA.FG=FB.FO=FC.FE; donc on obtient G en faisant FA : FC :: FE : FG, et le prob. se réduit à celui de faire passer par deux points donnés A, G un cercle qui soit tangent à un cercle (725) ou à une ligne (768).

(785) PROB. On a la corde AB et la flèche EC d'un arc ACB pour en trouver le rayon, l'angle D au centre et la longueur.

Ayant trouvé par la méthode du par. (**540**) le rayon AD=BD, on aura le centre D à l'intersection des arcs décrits avec les rayons AD, BD et par suite l'angle ADB.

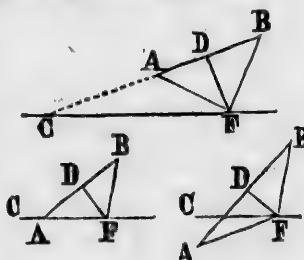


Pour ce qui est de la longueur de l'arc, il y aura à trouver d'abord (**686**) la longueur de la circonférence entière et à faire (**Prop.** XXXIV et **720**) 4 angles droits : ADB :: circonférence entière : ACB.

Si on avait l'angle D et la longueur ACB de l'arc, pour trouver le rayon; on ferait D : 4 angles droits :: ACB : circonférence entière et on aurait (**687**) le diamètre en faisant 3.1416 : 1 :: circ. : diam.

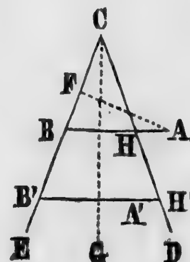
(786) PROB. Trouver sur une ligne donnée CF un point F, tel que de ce point on puisse mener à deux autres points donnés A, B des lignes égales AF, BF.

Puisque AF doit être =BF, AFB est isocèle et il est clair que F est situé à l'intersection de la ligne donnée par la perpendiculaire DF menée du milieu D de la ligne qui joint les deux points donnés.

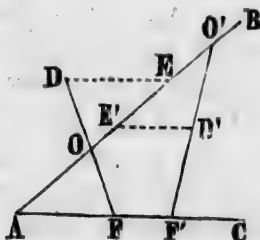


(787) PROB. D'un point donné A mener une ligne AB qui retranche de deux autres lignes CD, CE des parties égales CH, CB.

Il suffit de faire remarquer que AB formera avec les lignes données un triangle isocèle BCH et que si AF est perpendiculaire à CE on aura (**322**) l'angle BAF=HCG=½HCB, pour indiquer de suite l'opération à faire.



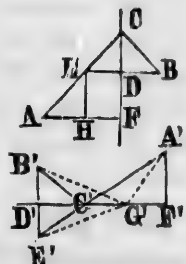
(788) PROB. Mener d'un point donné D à une ligne AC, une droite DF qui soit bissectée en O par une seconde ligne AB rencontrant la première sous un angle donné A.



Puisqu'on doit avoir DO=FO; si on mène DE parallèle à AC et qu'on fasse AF=DE, les triangles semblables AOF, DOE donneront DO : FO :: DE : AF.

Si D' était entre les lignes données, on ferait AF'=2D'E' ou E'O'=AE', pour avoir O'D'=D'F'.

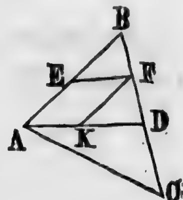
(789) PROB. Mener de deux points donnés A, B, à une ligne CF, deux droites AC, BC qui rencontrent cette ligne sous des angles égaux ACF, BCD.



Ayant mené BE perpendiculaire à CD et fait DE=DB, la droite AEC coupera CF en C sommet des angles égaux voulus.

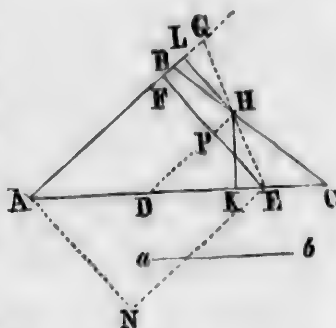
Observons aussi que la ligne A'C'B'=A'C'E' est évidemment la plus courte que l'on puisse mener de A' à B' pour rencontrer la ligne donnée D'F'; car $\overline{A'G'+G'B'}=\overline{A'G'+G'E'}>$ A'E'; **et si on avait à mener entre deux points une ligne qui fût la plus courte possible et qui dût rencontrer en chemin deux autres lignes,** on voit de suite comment on y parviendrait.

(790) PROB. Inscrire dans un triangle ABC une ligne EF d'une longueur donnée et dans une direction donnée.



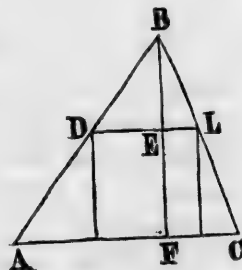
Soit AD dans la direction voulue; faites AK=EF, menez KF parallèle à AB, et EF parallèle à AD.

(791) PROB. Trouver sur le côté BC d'un triangle ABC un point H, tel que la somme des perpendiculaires HK, HL menées de ce point aux autres côtés du triangle, soit égale à une ligne donnée ***a b*****.**



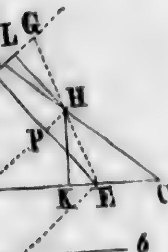
Soit AN=*a b* et perpendiculaire à AB; ayant mené NE parallèle à AB et EF parallèle à AN, on aura EF=AN=*a b* et EF sera perpendiculaire à AB et parallèle à HL. Supposant maintenant la chose faite, et que DH soit parallèle à AB, on aura PF=HL et par conséquent PE=HK; d'où il suit que pour résoudre le prob., il faut faire AG=AE et mener EG qui coupera BC en H le point voulu; car, dans les triangles rectangles DKH, DPE, on a HK=PE, angle D commun et (322) angle DEP=DHK (les côtés DH, HK étant perpendiculaires aux côtés DE, PE) ce qui donne DE=DH et le triangle EDH par conséquent isocèle et semblable à EAG.

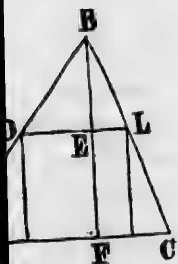
(792) PROB. Dans un triangle quelconque ABC, on a la base AC et le côté DL du carré inscrit, pour construire le triangle.



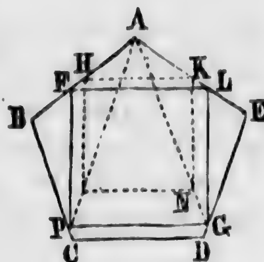
On a AC : DL :: BF : BE ou dividendo AC—DL : DL :: BF—BE : BE, pour trouver BF=EF (ou DL) + BE.

(793) PROB. Inscrire un carré FG dans un pentagone régulier ABCDE.



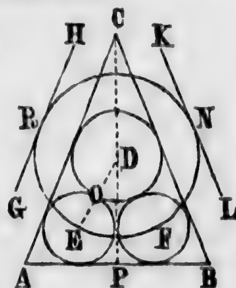


Soit $AH=AK$ et $HN=HK^2$; ayant joint et prolongé AN jusqu'en G et mené LG parallèle à KN, il est clair qu'on trouvera LG côté du carré cherché en faisant AN : KN :: AG : LG à cause des triangles semblables AKN, ALG; ou par constr. en menant ANG, AP, joignant PG et sur PG construisant le carré demandé.



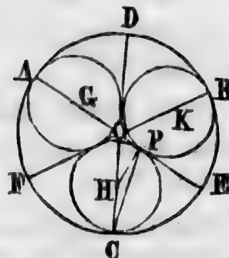
(794) **PROB. Inscrire dans un triangle isocèle ABC trois cercles E, F, D tangents entre eux et aux côtés du triangle.**

Ayant mené CP perpendiculaire à AB, on a $AP=BP$ et le cercle $E=F$ qu'on inscrira dans les triangles CPB, CPA par la méthode du par. (630). Soient GH, LK respectivement parallèles à AC, BC et à des distances de ces dernières égales au rayon OE des cercles déjà décrits; il est clair que le cercle voulu D sera concentrique à celui qui passant par les centres E, F serait tangent à LK, GH; d'où on tire que pour trouver D, il y aura à décrire par la méthode du par. (768) un cercle EFNR passant par les points connus E, F et tangent à l'une ou à l'autre des lignes LK, GH.



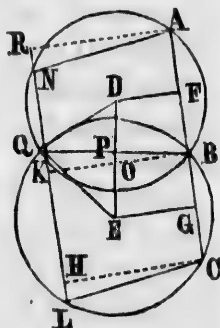
(795) **PROB. Inscrire trois cercles égaux G, H, K dans un cercle donné ABC.**

Il est clair qu'on aura $DOE=EOF=DOF=$un tiers de quatre angles droits, et que les centres des cercles à décrire se trouveront dans les bissectrices OA, OB, OC de ces angles. Dans le triangle rectangle OPH on a l'angle HOP ou $COF=\frac{1}{2}$ $EOF=\frac{1}{6}$ de 4 angles droits, et l'angle OHP par conséquent



= comp. POH ; on connaît donc l'angle C=½ H, pour mener CP et par suite PH perpendiculaire à OF qui fixera le centre H et le rayon HP ou HC des cercles à décrire.

(796) **PROBS. Par un des points d'intersection B de deux cercles, mener une ligue AC qui soit bissectée en ce point ; et par l'autre point d'intersection Q, mener une ligne NL qui soit égale à la première.**



Joignez DE, bissectez DE en O, joignez OB et menez ABC perpendiculaire à OB ; vous aurez AB=BC ; car, ayant mené EG, DF perpendiculaires à AC et par conséquent parallèles à OB ; FB sera = BG, à cause de DO=OE, et comme les perpendiculaires DF, EG donnent aussi AF=FB et BG=GC ; il suit que AB=2FB=BC=2BG.

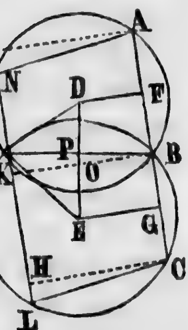
En second lieu, pour faire NL=AC, il n'y a qu'à mener NQL parallèle à AC ; car, ayant abaissé les perpendiculaires CH, BK, AR, il est clair qu'on a HL=KQ=RN, ce qui rend semblables les triangles rectangles ARN, CHL et donne AN=CL et AN parallèle à CL ; d'où NL=AC.

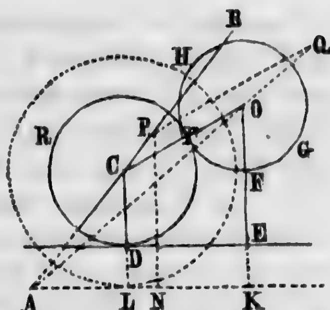
(797) **PROB.** Fig. du dernier par. **Avec des rayons donnés DQ, EQ, décrire deux cercles tels que la ligne BQ qui joint leurs points d'intersection soit égale à une ligne donnée.**

Dans les triangles rectangles DPQ, EPQ, on a PQ=½BQ, et les rayons DQ, EQ, pour trouver DP, EP, ce qui donne ED=DP+EP.

(798) **PROB. Trouver sur une ligne AB le centre C d'un cercle qui soit tangent à une ligne DE et à un cercle FGH.**

Rem. Le cercle LH est supposé passer par le point O, et la distance EK être égale au rayon OF, comme il paraît par le texte.





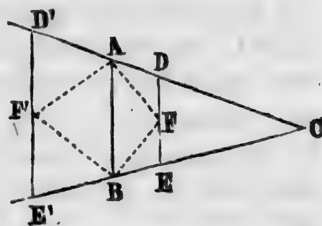
Il est clair que le cercle voulu DR sera concentrique à celui LOH qu'on décrirait pour passer par le centre O du cercle donné et toucher à une ligne LK éloignée de la ligne donnée DE d'une distance EK égale au rayon OF du cercle donné ; ce qui réduira l'opération à celle de **trouver sur une ligne le centre d'un cercle tangent à une ligne et passant par un point donné.** Il y a donc à trouver sur AB un point C tel que la perpendiculaire CL soit égale à la distance CO entre les centres des deux cercles.

A cet effet, ayant joint (et prolongé s'il le faut) AO, on prendra sur AB un point arbitraire P, d'où on mènera PQ=PN, et il ne restera plus qu'à mener par le centre O du cercle donné une droite CO parallèle à PQ, pour déterminer le centre C du cercle cherché DR. En effet, les triangles semblables ACO, APQ donnent AC : AP :: CO : PQ et les triangles semblables ALC, ANP donnent AC : AP :: CL : PN ; d'où (**75 Ax.**) CL : PN :: CO : PQ, ou alt. CL : CO :: PN : PQ. Mais PQ=PN par constr. ; donc CO=CL et par conséquent CT=CD.

(799) **Sco. Si le contact des deux cercles devait être intérieur ;** au lieu d'augmenter la distance de la ligne auxiliaire LK, d'une quantité EK égale au rayon du cercle donné, il y aurait au contraire à la diminuer d'autant.

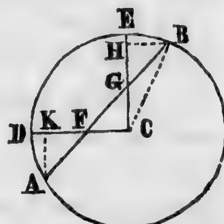
(800) **PROB. Mener, parallèle à la base AB d'un triangle, une ligne DE (D'E') qui soit égale à la somme des segments AD, BE (AD', BE') des côtés** (prolongés) **compris entre la base et la parallèle.**

Bissecter les angles ABC, BAC (ABE′, BAD′) ce qui déterminera, à l'endroit de l'intersection des bissectrices AF, BF AF′, BF,′) le point de trajet F (F′) de la parallèle voulue. Car, la construction rend isocèles les triangles BEF, ADF (BE′F′, AD′F′) à cause de l'angle ABF= son alt. EFB=½ ABE=EBF, etc.



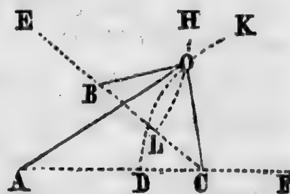
(801). **PROB. Décrire un cercle, dont deux rayons CE, CD à angle droit " trisectent " une ligne donnée AB.**

Puisqu'on doit avoir AF=FG=GB, les triangles rectangles AKF, FCG, GHB seront isocèles et égaux et donneront BH=HG=CG= etc.; d'où CG $=\sqrt{\frac{1}{2}FG^2}=\sqrt{\frac{AB^2}{18}}$ et BC$=\sqrt{5CG^2}$.

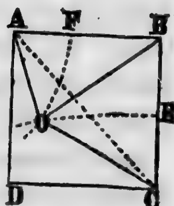


(802) **PROB. Trouver un point O tel que trois lignes AO, BO, CO menées de ce point à trois points donnés A, B, C, soient entre elles dans un rapport voulu $m:n:r$.**

Ayant joint et divisé AC en D dans le rapport de AO : CO, et BC en L dans le rapport de BO : CO, on trouvera (608) les rayons DF, LE de deux cercles DOK, LOH tels que l'on ait AO : CO :: AD : CD et BO : CO :: BL : CL. Ces deux cercles détermineront, à l'endroit O de leur intersection, le point demandé.

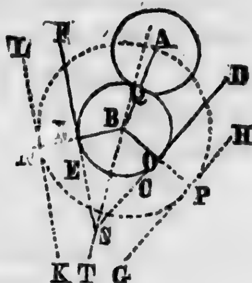


(803) **PROB. Pour trouver le côté d'un carré, on a les distances AO, BO, CO d'un point donné O à trois des angles de la figure.**



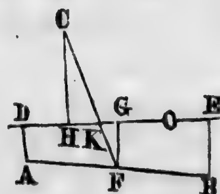
Il est clair que ce prob. est analogue au dernier et à celui du par. (728). On donnera donc à AB une valeur arbitraire qu'on divisera en F pour avoir AF : BF :: AO : BO et à BC une longueur arbitraire égale à la première, qu'on divisera en E dans le rapport de BO : CO et après avoir trouvé la valeur hypothétique de AO, BO proportionnelle à celle de AB, on fera, longueur supposée de AO : AO :: longueur supposée de AB : AB.

(804) **PROB. Décrire un cercle B qui soit tangent à un cercle A et à deux lignes CD, EF.**



Soit OP=RN=AQ, le cercle voulu sera concentrique au cercle APN; ce qui réduit le prob. à celui de décrire un cercle passant par un point donné A et tangent à deux lignes; et puisque (494) le cercle voulu aura son centre sur la bissectrice BT de l'angle LTH=FSD, le prob. devient celui du par. (798).

(805) **PROB. Mener par un point donné O une ligne DE telle que la somme de ses distances AD, BE, de deux points donnés A, B, soit égale à sa distance HC d'un troisième point C.**

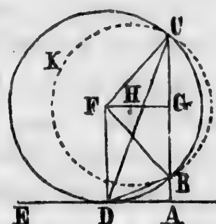


Ayant joint et bissecté AB en F, on divisera CF en K de manière à avoir CK : KF :: CH : $\frac{AD+BE}{2}$ :: CH : FG; c-à-d., on fera CK : CF :: 2 : 3. Les points K et O détermineront la direction DE de la ligne demandée.

Si CH devait avoir à AD+BE un rapport autre que celui de l'égalité, soit $m:n$, il est clair qu'on ferait encore CF : CK

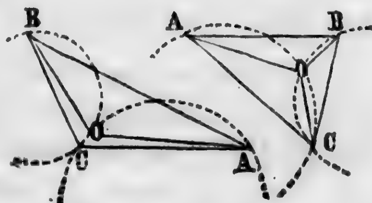
$:: m+\frac{1}{2}n : m$, et si AD, BE, CH, au lieu d'être perpendiculaires à DE, devaient rencontrer cette ligne sous un angle donné quelconque, la manière de résoudre le prob. serait encore la même.

(806) **PROB. On demande à trouver sur une ligne AE, un point D tel que l'angle BDC sous-tendu en ce point par deux autres lignes DB, DC menées aux extrémités d'une quatrième ligne BC perpendiculaire à la première mais éloignée d'elle d'une distance connue AB, soit le plus grand possible.**



Avec un rayon FC=FD=AG=AB+$\frac{1}{2}$BC, décrivez le cercle DBC; le point de contact D sera le point voulu; car, BDC=$\frac{1}{2}$BFC et pour que BDC fût plus grand, il faudrait que BFC fût aussi plus grand ou ce qui (268) est la même chose, que le cercle passant par les points donnés B, C, fût d'un plus petit rayon HC; mais un cercle BCK décrit avec un rayon moindre que FD ou AG ne rencontrerait pas la ligne AE, et le sommet D de l'angle étant dans ce cas hors de la ligne, ne remplirait pas l'autre condition du problème.

(807) **PROB. Trouver dans un triangle quelconque ABC dont aucun angle n'excède le tiers de quatre angles droits, un point O tel que les trois angles sous-tendus en ce point par les lignes menées aux extrémités des côtés, soient égaux l'un à l'autre.**



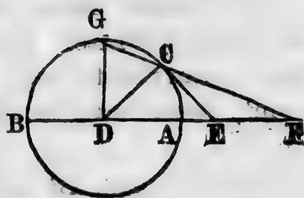
Il suffira de décrire sur deux des côtés du triangle donné des cercles capables de contenir des angles chacun égal au tiers de deux angles droits. L'intersection O de ces cercles fixera le point voulu.

La nécessité de la restriction, qu'aucun angle B n'excède AOC ou le tiers de 4 angles droits, est évidente.

Si les trois angles en O, au lieu d'être égaux, devaient avoir l'un à l'autre un rapport donné (720), mais toujours tel que le plus grand des angles n'excédât pas le plus grand angle du triangle donné; il est clair qu'on aurait comme auparavant à faire sur les côtés, des cercles contenant des angles respectivement égaux aux suppléments des angles en O.

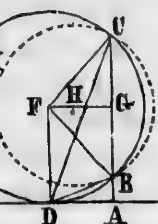
Les sommets d'un triangle n'étant que des points, l'énoncé du prob. pourrait encore se traduire : **trouver un point tel que les angles sous-tendus en ce point par des lignes menées à trois autres points, aient l'un à l'autre un rapport donné ;** eu égard toujours à la restriction déjà établie.

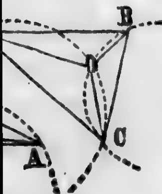
(808) **PROB. Trouver, sur la partie prolongée AF du diamètre d'un cercle, un point E tel que la tangente EC menée de ce point au cercle, soit égale à la distance EF du même point à l'extrémité F du diamètre prolongé.**



Puisque DCE est un angle droit, on a $\overline{DCG+ECF}$ (supplément de DCE) aussi égal à un angle droit; et à cause des triangles isocèles CDG, CEF, on a EFC=ECF et DGC=DCG; d'où $\overline{F+DGF}$= un angle droit et le triangle GDF est par conséquent rectangle en D; ce qui indique que pour résoudre le prob., il faut mener DG perpendiculaire à DF et au point d'intersection C mener CE perpendiculaire à DC.

(809) **PROB. Par un point donné A hors d'un cercle, mais qui ne soit pas plus éloigné que d'un diamètre, mener une sécante ou une ligne AC qui soit bissectée en E par le cercle.**





Puisque $AC.AE=AD^2$ et que $AE=EC$, on a $AC=\sqrt{2AD^2}$; on a donc, dans le triangle isocèle CBE, les côtés, pour trouver l'angle C, et par suite, dans le triangle ABC on a l'angle C et les côtés AC, BC, pour trouver l'angle BAC.

Autrement: sur AD comme diam. on fera le demi-cercle AGD qu'on bissectera en G pour avoir (à cause du triangle rectangle isocèle AGD) $AG=DG=\sqrt{\frac{1}{2}AD}$, et au centre A avec le rayon AG on intersectera le cercle donné en E par lequel on mènera la droite demandée AEC.

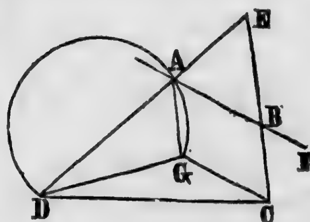
Si la ligne à mener devait être telle que la partie EC dans le cercle fût égale à une ligne donnée, on aurait dans le triangle CBE les côtés pour trouver la perpendiculaire BF, et avec BF décrivant l'arc F, il ne resterait qu'à mener AFC tangente à l'arc F.

(810) **PROB. Faire passer par deux points donnés A,B, un cercle qui intersecte une ligne CD donnée en position, en un point C ou D tel, qu'un diamètre mené par ce point, fasse avec la ligne donnée un angle déterminé CDN.**

Ayant bissecté AB en E et élevé la perpendiculaire EF, on prendra un point arbitraire G, d'où on mènera GH pour rencontrer CD sous un angle CHG=CDN; puis on fera GK=GH et on mènera AL parallèle à GK. L'intersection L sera le centre du cercle voulu; car les triangles semblables ALF, KGF et DLF, HGF donnent DL:AL::HG:KG; d'où DL=AL.

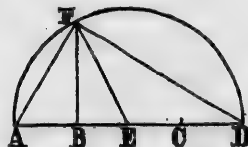
(811) PROB. De deux points donnés D, C, mener deux lignes DE, CE se rencontrant sous un angle voulu et interceptant sur une autre ligne AF donnnée en position une partie AB égale à une ligne donnée.

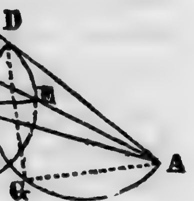
Ayant joint DC, menez CG parallèle et égal à AB, joignez DG et sur DG faites un cercle capable de l'angle donné E, joignez et prolongez DA et menez CE parallèle à AG. Il est clair (271) que la constr. donne AB=CG et E=A.

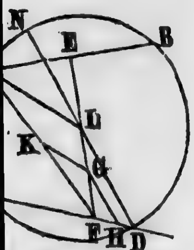


(812) PROB. Prolonger une ligne donnée AB, d'une quantité BC, qui soit moyenne proportionnelle entre la ligne ainsi prolongée AC et la ligne donnée.

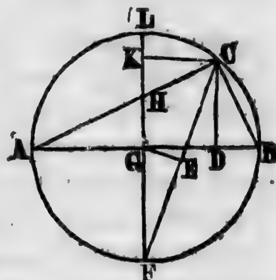
Prolongez AC d'une quantité CD=AB, sur AD faites le demi-cercle AFD; la perpendiculaire BF étant (530, 2°) moyenne proportionnelle entre AB, BD ou AB, AC, sera en conséquence égale à BC. Donc, dans le triangle rectangle EBF on a le rapport de BE à BF (1 : 2) pour trouver (523) les angles. Dans le triangle isocèle DEF on a maintenant angle E= sup. BEF et par suite l'angle DFE, ce qui dans le triangle rectangle ABF nous donne l'angle AFB=AFD (droit) moins $\overline{BFE+DFE}$, et un côté AB, pour trouver BF la moyenne proportionnelle requise.







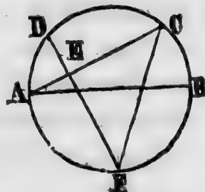
(813) PROB. On donne dans un triangle rectangle ABC, la somme AC+BC des côtés et la perpendiculaire CD, pour trouver l'hypoténuse AB.



Ayant trouvé par la méthode du par. suivant, la bissectrice CF de l'angle droit ACB$=\sqrt{\frac{1}{2}(AC+BC)^2}$, mené le diamètre FL et fait CK, GE perpendiculaires à FL, CF, on voit que le quadrilatère CEGK peut être inscrit dans un cercle, à cause des angles droits en E, K, ce qui donne FK.FG=FC.FE; or, FC.FE$=2FE^2$ ou $2EC^2$ à cause de la corde FC bissectée en E par la perpendiculaire GE menée du centre.

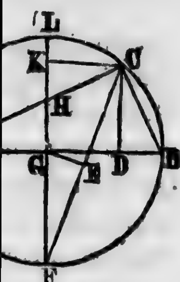
Soit H le point milieu de GK, KG est une ligne bissectée en H et prolongée jusqu'en F et donne (378) $HF^2=\overline{FK.FG}+GH^2$ et on connaît GH$=\frac{1}{2}$CD; on obtient donc FG$=\frac{1}{2}$AB $=\sqrt{FH^2}-GH$.

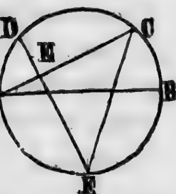
(814) PROB. Trouver la bissectrice FC de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC inscrit dans un cercle.

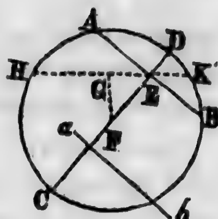


Soit FD perpendiculaire à AC, FEC sera un triangle isocèle, à cause de l'angle F=ECF$=\frac{1}{2}$ACB, et on aura EC=EF et ED=EA; or ED ou EA est la demi-différence entre BC et AC, et EC ou EF est par conséquent la demi-somme de AC et BC; maintenant le triangle rectangle FEC donne $FC^2=EC^2+EF^2$ ou $FC^2=2EC^2$ et par conséquent $2FC^2=4EC^2=(AC+BC)^2$, d'où FC$=\sqrt{\frac{1}{2}(AC+BC)^2}$.

(815) PROB. Inscrire dans un cercle une ligne AB qui soit parallèle et égale à une ligne donnée *a b*.



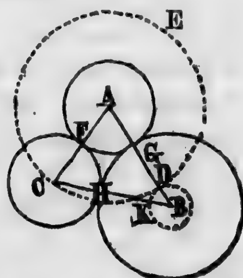




Par le centre F du cercle menez le diamètre CD perpendiculaire à la ligne donnée, divisez (373) ce diamètre en E de manière à avoir CE.ED $=(\frac{1}{2}\,a\,b)^2$ par le point E menez AB parallèle à $a\,b$ et par conséquent perpendiculaire à CD.

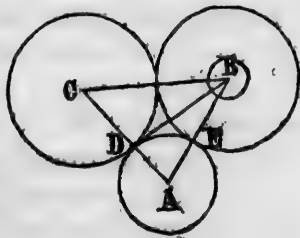
Prenons occasion d'observer ici que de **toutes les cordes qu'on puisse mener par un point donné E dans un cercle, la plus grande est celle CD qui passe par le centre, et la moindre, la perpendiculaire AB au diamètre passant par ce point** ; ce qui est évident, (461) à cause de FG moindre que FE quand la corde HK n'est pas perpendiculaire au diamètre passant par le point donné.

(816) **PROB. De trois centres donnés A, B, C, décrire des cercles qui se touchent mutuellement.**



Un cercle CDE décrit concentrique au cercle demandé A donnera AD=AC et BD=AB—AC ; mais CF=DG =HK ; d'où il est clair que BH—CH =AB—AC. On n'a donc qu'à joindre les points donnés par des droites et et à diviser (367) l'une d'elles BC en H de manière à avoir la différence BK entre ses segments CH, BH, égale à la différence BD entre les deux autres lignes AC, AB.

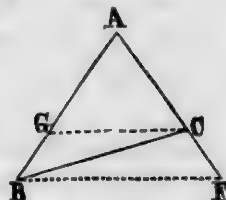
(817) **PROB. Deux cercles A, B se touchent extérieurement ; il est à décrire un troisième cercle C qui touche aux deux autres, et à l'un d'eux en un point donné D.**



On a dans le triangle ABC, un côté AB, un angle A et BC—AC =(816) EB—AE, pour trouver BC comme suit.

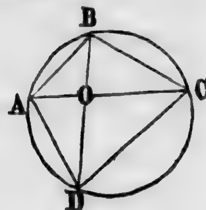
(818) PROB. On a dans un triangle ABC un côté BC, l'angle ACB compris par ce côté et le plus petit des deux autres, et la différence BG ou AB—AC entre ces deux autres côtés, pour compléter la figure.

Soit CF=BG ; on a dans le triangle BCF les côtés BC, CF et l'angle inclus C= sup. ACB, pour trouver BF base et F angle à la base du triangle isocèle BAF et de là AB, etc.



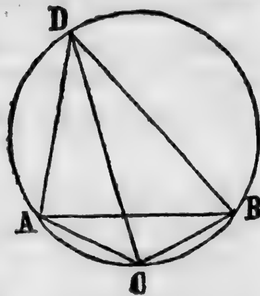
(819) PROB. On a les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, pour trouver les angles.

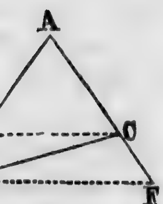
Les triangles semblables ADO, BCO donnent AD : BC :: OD : OC et les triangles semblables AOB, DOC donnent AB : DC: OA : OD :: OB : OC, d'où on obtient en nombre proportionnels les longueurs relatives de OA, OB, OC, OD.

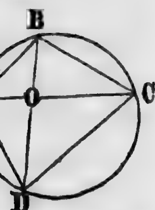


Maintenant ces longueurs relatives prises deux à deux donneront le rapport de AC à BD, et comme on connaît (604) AC.BD=AB.CD+AD.BC, on fera (561) (appelant *ac*, *bd*, les valeurs hypothétiques des diagonales) $ac.bd : AC.BD :: ac^2 : AC^2$, pour trouver $AC=\sqrt{AC^2}$ et par suite les angles requis.

(820) PROB. Si on avait dans un triangle ABD inscrit dans un cercle, la base AB, la somme AD+DB des côtés et la bissectrice DC de l'angle vertical, prolongée jusqu'à la circonférence, pour construire la figure ; on obtiendrait le côté AC ou BC du triangle isocèle ACB en fesant (605) AD+DB : CD :: AB : AC ou BC ; d'où on tirerait angle ADB = sup. ACB, pour terminer ensuite la solution par la méthode du par. (729).







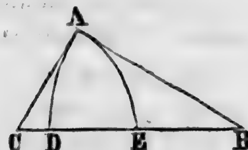


(821) **PROB. Déterminer sur une ligne AB un point E tel que ses distances de deux autres points donnés C, D sur cette ligne, soient proportionnelles à ses distances des extrémités A, B.**

Puisqu'on doit avoir EC : ED :: EA : EB et que (**94** et **96**) EA—EC : EC :: EB—ED : ED ou AC : EC :: BD : ED ; il est clair qu'il n'y a qu'à diviser (**514**) CD en E de manière à avoir EC : ED :: AC : BD.

(822) **PROB. Dans un triangle rectangle ABC, on a la différence CD, BE entre l'hypoténuse et chacun des côtés, pour trouver le reste.**

On a vu (**745**) que $DE^2 = 2CD.BE$; d'où on obtient $CB = CD + \sqrt{2CD.BE} + BE$, $AC = CD + DE$ et $AB = BE + DE$.

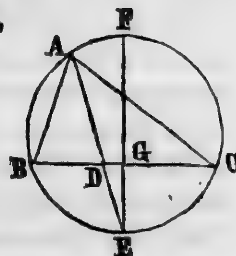


(823) **PROB. Dans un triangle rectangle** (Fig. du dernier par.) **on a un côté AC et la différence DE entre l'hypoténuse et la somme AC+AB des côtés, pour compléter la construction.**

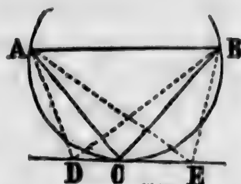
Puisque (**745**) $DE^2 = 2CD.BE$, on trouvera $BE = \frac{DE^2}{2CD}$.

(824) **PROB. On a dans un triangle ABC, le rectangle AB.AC des côtés, le rectangle AD.BC de la base et de la bissectrice de l'angle vertical, et le rectangle BD.DC des segments de la base ; trouver les côtés.**

Parce que (**600**) $BD.DC + AD^2 = AB.AC$, on obtient $AD = \sqrt{AB.AC - BD.DC}$ et $\frac{AD.BC}{AD} = BC$; maintenant (**572**) $DE = \frac{BD.DC}{AD}$ et (**575**) $EF.EG = EA.ED$, et comme on a (**530**, 2°) $EG.GF = GC^2$ ou (**215**) $\frac{1}{4}BC^2$, on obtiendra (**357**) $EG = \sqrt{EF.EG - GC^2}$ et EF diamètre du cercle circonscrit $= \frac{EF.EG}{EG}$, etc.



(825) **PROB. Mener de deux points donnés** A, B, **à une ligne, deux droites se rencontant sous le plus grand angle possible** ACB.



Le sommet C de l'angle voulu est au point de contact du cercle passant par les points donnés et tangent à la ligne donnée et se trouvera par la méthode du par. (**768**). Il est clair que tout autre sommet D ou E étant hors du cercle ACB donnera (**484**) un angle ADB ou AEB moindre que ACB.

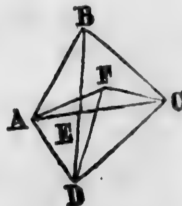
Ce prob. est analogue à celui du par. (**806**) qui n'en est qu'un cas particulier.

(826) **PROB. Trouver sur une ligne** DC **un point, tel que la différence** AC—BC **des lignes menées à ce point, de deux autres points donnés** A, B, **soit un maximum.**



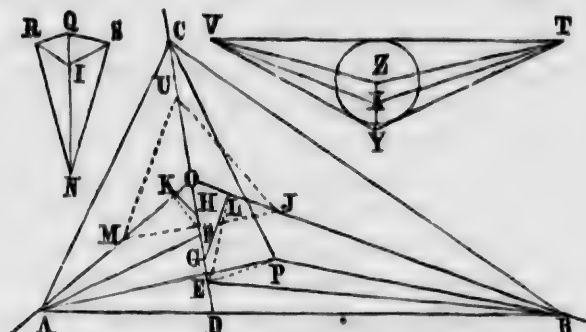
Il est clair que cette différence serait la plus grande possible si elle était égale à la distance entière AB entre les points donnés ; ce qui aurait lieu si AC, BC formaient partie d'une seule et même ligne droite ; donc, etc. Il sera d'ailleurs facile à l'étudiant de prouver l'exactitude ou la vérité de cette assertion.

(827) **PROB. Trouver dans un quadrilatère** ABCD **un point tel, que la somme des lignes menées de ce point aux quatre sommets de la figure soit un minimum.**



Il est évident que le point voulu se trouvera à l'intersection E des diagonales du quad., puisque tout autre point F donnerait la droite AC(AE+EC) moindre (**161**) que AF+FC et la droite BD (BE+ED) moindre que BF+FD.

(828) PROB. Trouver un point O tel que la somme de ses distances de trois points donnés A, B, C, soit un minimum.



On est d'abord porté à croire que ce point est le centre du cercle circonscrit aux points donnés, ce qui a lieu quand ces derniers sont disposés de manière à former les sommets d'un triangle équilatéral; mais, pour se convaincre qu'il n'en est pas toujours ainsi, il suffit de considérer que si les points donnés R, Q, S étaient disposés de manière à ne s'éloigner que peu de la ligne droite, le centre N du cercle circonscrit serait indéfiniment éloigné, et la somme NR+NQ+NG de ses distances indéfiniment plus grande que celle des distances IR, IQ, IS d'un point I plus voisin que N des points donnés.

On se demande ensuite si le centre du cercle inscrit au triangle ABC ne répondrait pas à la condition voulue, comme il le fait dans le triangle équilatéral; mais en ayant de nouveau recours à un cas extrême, celui où les lignes reliant les points donnés V, Y, T forment un triangle ayant un angle Y très obtus, on voit encore qu'entre le sommet Y de l'angle obtus et le centre Z du cercle inscrit, il serait facile de trouver un autre point X, tel que la somme XV+XY+XT de ses distances des points donnés, fût moindre que celle des distances ZV, ZY, ZT de ces points au centre du cercle inscrit.

Puisque le point voulu est, en général, ni celui des distances égales, ni celui (**494**) des bissectrices des angles sous-tendus aux points donnés par les droites qui relient ces points, l'idée nous vient de faire l'essai d'un point O tel que les angles sous-tendus en ce point par les lignes menées aux points donnés soient égaux entre eux, et cette idée est fondée sur une certaine analogie qui paraît exister entre la proposition actuelle et celle des périmètres comparatifs des figures régulières et irrégulières ; connaissance qui nous est déjà acquise (**764**) et qui tend à démontrer que le périmètre, la somme des côtés, ou celle des distances qui séparent les points d'une figure, est d'autant moindre, autres choses restant égales, que ses côtés ou distances, et par conséquent ses angles approchent davantage de l'égalité, comme dans le cas du triangle équilatéral où OC=OJ=OM quand les angles au centre COM, COJ, MOJ sont égaux.

Le point O est en effet le seul qui réponde à la condition posée ; car, soit P un point quelconque autre que O, on peut démontrer que la somme des distances PA, PB, PC est plus grande que OA+OB+OC. Il est clair que le prolongement OD de la droite OC est la bissectrice de l'angle AOB et donne en conséquence AOD=BOD. Faites CE=CP, joignez EB et faites AF=(AP+PB)—EB ; le point F tombera entre E et O, c-à-d., au delà de AP, car dans le triangle APB, la somme des côtés AP, PB étant constante et égale par constr. à AF+BE, il est évident que la diminution EBP d'un des angles à la base, ABP, sera suivie d'une augmentation correspondante FAP, de l'autre angle à la base BAP. Cela posé, on fait BL=BE et AK=AF, d'où OL+OK=(OA+OB)—(PA+PB) et à cause de EC=PC on a OE=PC—OC. En d'autres termes OE est l'excédant de la distance PC sur OC et (OL+OK) l'excédant de la somme des distances OA, OB sur celle de PA, PB. La preuve se réduit donc à démontrer que OE excède OL+OK, et en effet, ayant mené LG, KH respectivement perpendiculaires à OB, OA, les triangles rectangles OLG, OKH sont tels

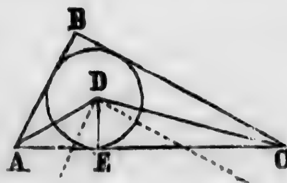
(à cause des angles LOG, KOH= chacun les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit) que $OL=\frac{1}{2}OG$ et $OK=\frac{1}{2}OH$; d'où OL étant moindre que $\frac{1}{2}OE$ et OK moindre que $\frac{1}{2}OF$, on a $(OL+OK) < OE$.

Autrement: Si la considération des périmètres comparatifs nous autorise d'établir pour le cas du triangle équilatéral UJM que le point O des angles égaux est en même temps celui des moindres distances, il sera facile d'en venir à la même conclusion pour tout autre triangle ABC ; car, ayant fixé (**807**) dans un triangle donné quelconque, le point sommet des angles égaux et superposé ce triangle au triangle équilatéral, de manière à faire coincider le sommet et les côtés des angles égaux, il est clair que les points donnés A, B, C tomberont sur ces côtés ou sur leurs prolongements et que les minima AM, BJ, UC, (les plus courtes distances (**108**) entre deux points) ajoutés au minimum $\overline{OJ+OM+OU}$ donneront un minimum $\overline{OA+OB+OC}$, parce que OM, AM forment partie de la même ligne droite OMA, OJ, BJ partie d'une même ligne droite OJB et OU, UC partie de la même droite OUC.

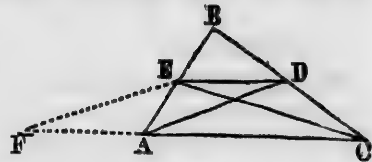
Il suit des conclusions précédentes que **si les trois points donnés étaient disposés de manière à comprendre un angle AOB égal aux, ou même plus grand que les $\frac{2}{3}$ de deux angles droits, le sommet de l'angle obtus serait lui-même le point des moindres distances.**

(**829**) **PROB. Déterminer un triangle rectangle ABC dont on a l'hypoténuse AC et le rayon DE du cercle inscrit.**

A cette fin on a dans le triangle ADC la perpendiculaire DE, la base AC et l'angle vertical $ADC = B + \frac{\overline{A+C}}{2} = 1\frac{1}{2}$ angles droits, pour trouver (**727**) le reste.

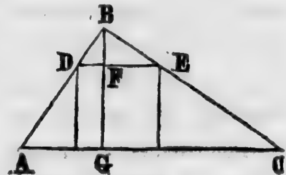


(830) **PROB. Dans un triangle rectangle** ABC **on a les bissectrices AD, CE des côtés, pour former le triangle.**



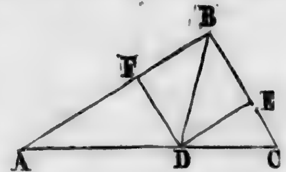
$CE^2 = BE^2 + BC^2 = BE^2 + 4BD^2$ et $AD^2 = BD^2 + 4BE^2$; d'où $ED^2 = BE^2 + BD^2 = \frac{AD^2 + CE^2}{5}$.

(831) **PROB. Déterminer un triangle rectangle** ABC **dont on connaît l'hypoténuse** AC **et le côté** DE **du carré inscrit.**

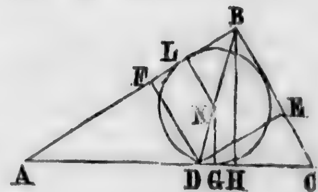


$AC - DE : DE :: BG - BF : BF$, à cause (792) des triangles semblables ABC, DBE.

(832) **PROB. Quand le carré inscrit du dernier problème est situé de manière à avoir un de ses sommets sur l'hypoténuse ;** le problème se réduit à celui du par. (**729**) où on a la base AC d'un triangle, l'angle vertical B (angle droit) et la bissectrice BD de l'angle vertical (diagonale du carré) pour déterminer les côtés.

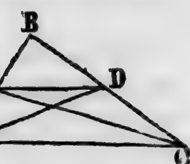


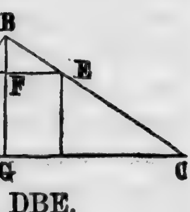
(833) **PROB. Déterminer un triangle rectangle dont on a le rayon** KG **du cercle inscrit et le côté du carré inscrit** FE **ayant un sommet** D **sur l'hypoténuse.**



$DK : KG :: DB : BH$; or $DF : KL :: BD : BK$ et $DK = BD - BK$. On a donc dans le triangle rectangle BHD ce qu'il faut pour déterminer l'angle BDC, c-à-d., la direction de l'hypoténuse AC.

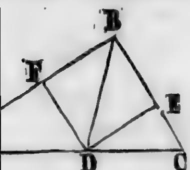
ABC on a les
r le triangle.



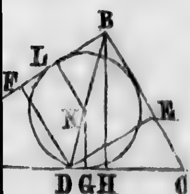


DBE.

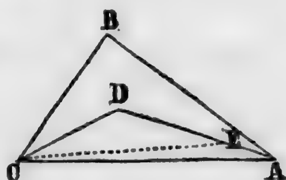
u dernier pro-
e ses sommets



rectangle dont
côté du carré
ténuse.

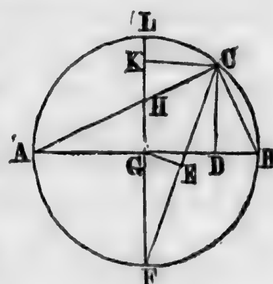


(834) **PROB. On donne l'hypoténuse AC d'un triangle rectangle ABC, et la différence AE entre les lignes AD, CD menées des angles aigus au centre du cercle inscrit ; déterminer le triangle.**



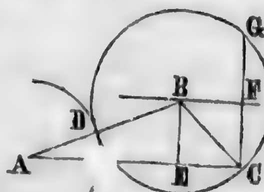
On a, dans le triangle ADC la base AC, l'angle opposé $D=B+\frac{1}{2}(A+C)$, à cause des bissectrices AD, CD de ces angles, et la différence AE entre les côtés ; c-à-d., on a dans le triangle AEC deux côtés AC, AE et l'angle AEC=sup. de $\frac{1}{2}$ supplément de D, à cause de ED=CD, pour trouver EC et le reste.

(835) **PROB. Déterminer le rectangle dont on a la diagonale et le périmètre ; ce qui se traduit :**



Déterminer un triangle rectangle dont on a l'hypoténuse et la somme des côtés. Soit ACB le triangle voulu dans lequel on a AB, AC+CB et l'angle droit C. On trouve (814) $CF=\sqrt{\frac{(AC+CB)^2}{2}}$ et $FK=\frac{CF.FE}{FG}$; d'où on a GK ou son égale CD (hauteur du triangle) égale à FK—FG ou à $FK-\frac{1}{2}AB$.

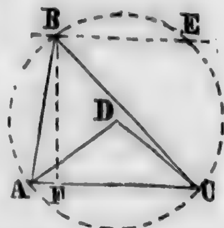
(836) **PROB. Déterminer un triangle ABC dont on connaît la base AC, la perpendiculaire ou hauteur BE et différence AD entre les côtés,**



n'est autre chose que trouver, sur une ligne donnée BF, le centre B d'un cercle passant par un point donné C et tangent à un cercle donné A, ou, ce qui est la même chose, décrire un cercle tangent à un cercle et qui passe par deux points donnés C, G (FG étant = FC = BE) dont on a déjà traité au par. (725).

(837) PROB. Soient donnés la base, la perpendiculaire et le rectangle des côtés d'un triangle ABC, pour le déterminer.

On obtient (**601**) AD, rayon du cercle circonscrit, $=\frac{1}{2}\frac{AB.BC}{BF}$. Dans ADC on a maintenant les côtés pour trouver l'angle ADC=2ABC et le par. (**727**) indique la manière d'achever la construction.

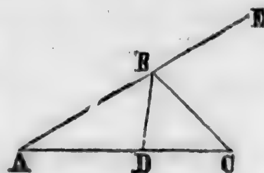


(838) PROB. Ayant dans un triangle, deux côtés et la bissectrice de la base, déterminer (393) la base.

(839) PROB. On a, dans un triangle les côtés qui comprennent l'angle vertical et la bissectrice de cet angle pour trouver le reste ; (600), (541) et (694).

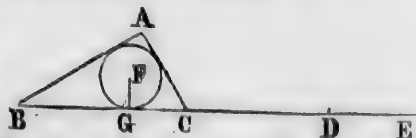
(840) PROB. Déterminer un triangle, dont on a la base, la somme des deux côtés et la bissectrice de la base.

On trouve (**393**) $AB_2 + BC^2 =$ $2AD^2$ (ou $\frac{1}{2}$ AC^2) $+2BD^2$. Soit maintenant BE=BC, ce qui donne AE=AB+BC ; on a (**359**) $AE^2=$ $AB^2+BE^2+2AB.BE$; d'où AB.BE $= \frac{AE^2-(AB^2+BC^2)}{2}$; on a donc AB+BC et AB.BC pour trouver AB et BC par la méthode du par. (3...



(841) PROB. Déterminer le triangle rectangle dont on a le périmètre et le rayon du cercle inscrit.

Soit CD=AB, DE= AC ; alors BE= pér. Pér. × FG=AB.AC= CD.DE. On a BE^2 ou pér. ^{2} = (**359**) $BC^2 + CE^2 + 2BC.CE$; or CE^2 = (**359**) CD^2 $+DE^2+2CD.DE$; donc, substituant à CE^2 de la première équation, sa valeur dans la seconde, on a BE^2=BC^2+CD^2+



$DE^2+2CD.DE+2BC.CE$; mais on a dans la dernière équation $CD^2+DE^2=AB^2+AC^2=BC^2$; donc $BE^2=2BC^2+2CD.DE+2BC.CE$, et comme (357) $BE.BC=BC^2+BC.CE$, on a $BE^2=2BE.BC+2CD.DE$, c-à-d. que $BE^2-2CD.DE=2BE.BC$; d'où $BC=\frac{BE.BC}{BE}$.

(842) **PROB. Elever en un point P, à déterminer sur une ligne donnée AB, une perpendiculaire PQ qui étant suffisamment prolongée, rencontrerait au point O de leur intersection, deux autres lignes indéfinies AD, BC menées des extrémités de la première.**

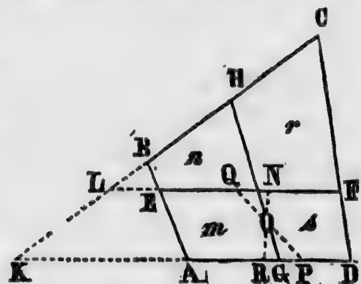
A cette fin, il est seulement nécessaire de mener aux lignes AD, BC, les perpendiculaires BE, AF quié tabliront (612) au point G de leur intersection le point de trajet de la perpendiculaire voulue.

(843) **PROB. Déterminer dans un triangle donné ABC un rectangle DE dont on connaît la surface.**

Il est clair que la perpendiculaire BF partage le rectangle en deux parties DF, FG qui sont entre elles comme AF.FC. Cela posé, supposons la chose faite; on aura $EK=\sqrt{EF.EC}=\sqrt{EF.EH}$ quand rectangle FH : rectangle FG :: EH : EG; d'où on conclut que pour résoudre le prob. il faut faire EG : EC :: FG : FH et construire ensuite un triangle rectangle CKF ayant FC pour hypoténuse et pour hauteur une ligne EK égale à la racine carrée du rectangle FH. La perpendiculaire EK abaissée du sommet K de ce triangle déterminera le côté EG du rectangle demandé.

(844) PROB. Partager un quadrilatère donné ABCD en quatre parties égales ou ayant entre elles des rapports donnés $m:n:r:s$ **par deux lignes droites dont l'une EF soit parallèle à l'un AD des côtés de la figure.**

Ayant d'abord mené (754) la parallèle EF telle que surf. BF soit à surf. ED :: $n+r:m+s$; on divisera (758) la trapèze ED en deux parties AENR, DFNR ayant entre elles le rapport voulu $m:s$.



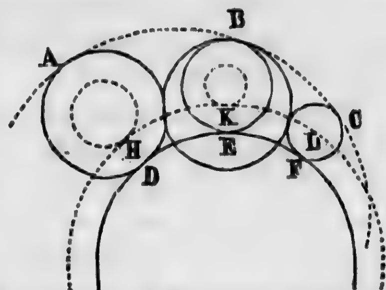
Maintenant, comme il est clair, à cause des triangles égaux NOQ, POR, que pour n'altérer en rien les surfaces relatives des parties composantes du trapèze ED, toute ligne de division PQ, autre que RN, devra nécessairement passer par le point milieu O de cette dernière ; il suit que pour conserver le rapport $m:s$ entre les parties EG, FG du quadrilatère, la ligne de division GH devra aussi passer par le point O ; ce qui réduit d'autant la difficulté de la solution et ne laisse plus qu'un seul point G ou H à établir pour compléter la construction.

A cet effet, ayant prolongé AD, BC jusqu'à leur rencontre en K et EF jusqu'en L et trouvé les surfaces respectives des triangles auxiliaires AKB, ELB qu'on ajoutera aux surfaces BN, BG pour avoir les surfaces GKH, NLH qui sont entre elles comme les carrés des côtés KH, LH, on n'aura plus qu'à faire $\sqrt{GKH}-\sqrt{NLH}:\sqrt{NLH}::KL:LH$ et à retrancher KB de KL+LH pour fixer le point voulu H et par conséquent la direction de la droite GH.

(845) PROB. Décrire un cercle DEF qui soit tangent à trois cercles donnés A, B, C.



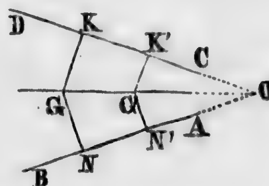
Il est clair que le cercle voulu est concentrique au cercle HKL passant par le centre L d'un des trois cercles donnés et tangent aux cercles H, K décrits des centres des deux autres cercles donnés A, B, avec des rayons respectivement égaux aux différences entre les rayons des cercles donnés ; ce qui réduit le problème à celui du par. (**783**).



L'étudiant ne manquera pas de voir et de tenter les nombreuses solutions que peut admettre ce problème. Ainsi, le cercle demandé peut toucher extérieurement aux trois cercles donnés, (comme dans la fig.) ou les comprendre tous les trois dans un contact intérieur ABC. Le cercle voulu pourrait encore toucher intérieurement au cercle A et extérieurement à B et à C, ou extérieurement à A et intérieurement à B, C. Un cercle dont le contact serait extérieur pour A et C et intérieur pour B répondrait aussi au problème, de même que celui qu'on décrirait pour contenir A, B et toucher extérieurement à C, et ainsi de suite.

(846) **PROB. Trouver le lieu d'un point G (G′), également éloigné de deux droites AB, CD inclinées l'une à l'autre.**

Il est clair qu'on aura la distance GK=GN, (G′K′=G′N′), etc., quant le point G, (G′) sera sur la bissectrice EF de l'espace angulaire compris entre les lignes données ; donc, etc.



Il est bon de se rappeler au besoin que :

(847) **Sco. 1° Le lieu des sommets de tous les triangles ayant même base et un de leurs côtés d'une longueur donnée, est la circonférence d'un cercle de rayon égal au côté donné.**

2° Le lieu d'un point également éloigné de deux points donnés est la perpendiculaire au centre de la droite joignant les deux points.

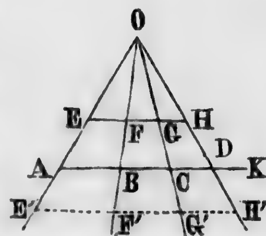
3° Le lieu des sommets de tous les triangles qui ont même base et même surface ou même base et hauteurs égales, est une ligne parallèle à la base.

4° Le lieu des sommets de tous les triangles rectangles ayant même base ou dont la somme des carrés des côtés soit égale à un carré donné, est (444) la demi-circonférence décrite sur cette base comme diamètre.

5° Le lieu des sommets de tous les triangles ayant même base, et les angles opposés à la base égaux, est (443) la circonférence d'un cercle décrit sur cette base et capable de l'angle voulu.

6° Le lieu des sommets de tous les triangles ayant même base et même rapport entre les côtés, est (608) la circonférence d'un cercle dont le centre serait situé sur le prolongement de la base et qui couperait cette base en parties ayant entre elles le rapport des côtés.

7° Si les droites OA, OB, **etc., menées d'un point** O **à une ligne** AD **sont coupées en** E, F, **etc., dans un rapport donné, le lieu des points de section est une droite** EH **parallèle à la ligne** AD.

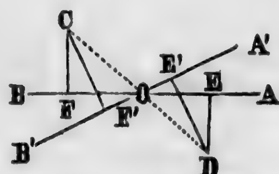


Ceci est clair (**509**) à cause des triangles semblables OAB, OEF, OAC, OEG, etc. et fournit un **nouveau (513** et **514) moyen de diviser une ligne donnée** EH ou E'H' **en un nombre quelconque de parties égales ou ayant entre elles des rapports donnés.**

A cet effet il n'y a qu'à porter sur une droite indéfinie AK des longueurs AB, BC, etc. dans le rapport voulu (**571 Lem. 1°**) et à construire sur AD comme base, un

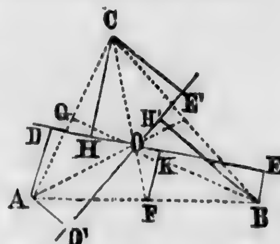
triangle équilatéral AOD ; on portera alors sur OA, OD, ou sur les prolongements de ces lignes les longueurs OE, OH, ou OE′ OH′ égales à celle de la ligne à diviser, pour joindre ensuite EH, E′H′ qui sera égale à OE ou OH (O′E′ ou O′H′) et par conséquent à la ligne donnée, et divisée en F, G (F′, G′) de la manière voulue.

(848) **PROB. Trouver un point** O **tel qu'une droite** quelconque AB (A′B′) **menée par ce point soit à égales distances** (313) DE, CF (DE′ CF′) **de deux points donnés** C, D.



Le milieu O, de la droite CD qui relie les points donnés répond évidemment au problème.

(849) **PROB. Trois points** A,B, C **étant donnés, trouver un quatrième point** O **tel que la somme des distances** AD, BE **de deux des points donnés à une ligne** DE **passant par le quatrième, soit égale à sa distance** CH **de l'autre point.**

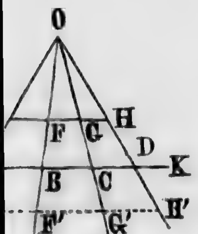


Joindre et bissecter AB en F (805) et diviser CF en O de manière à avoir CO=2OF.

Si D′E′ était la ligne, on aurait AD′+CE′=BH′ ; car (733) BG est la bissectrice de AC et on a OG=$\frac{1}{2}$OB.

Si AD+BE au lieu d'être égale à CH devait avoir à CH un rapport donné $m:n$, on n'aurait qu'à faire OF : OC :: $\frac{1}{2}$ $m:n$.

(850) **PROBS**. On n'a qu'à se rappeler ce qui a été dit (430, 2°) (433) (435) et (436) et à recourir, comme aux pars. (674) et (684) etc. à une hypothèse, pour saisir immédiatement la méthode de **revenir aux éléments d'un secteur, segment, zone ou lunule dont on connaîtrait l'angle au centre** sous-tendu par l'arc du secteur ou du segment ou

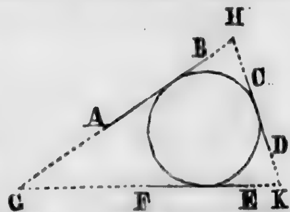


par les arcs ou cordes de la lunule et de la zone ; après quoi le par. (785) fournira le moyen de trouver le rayon du cercle dont ces figures font partie.

(951) On proposerait encore indéfiniment des problèmes, mais il suffira à l'étudiant de ceux qu'on a déjà donnés pour lui remettre en mémoire les diverses propositions de la géométrie des lignes et surfaces.

(852) Il est clair qu'on ne saurait offrir de méthode générale pour résoudre les problèmes, puisqu'il a fallu dans la solution de ceux qui précèdent, recourir tour à tour à presque toutes les propositions de ce traité ; mais on tirera souvent un grand parti de l'emploi du cercle, tant pour fixer (450) le lieu (847, 5°) du sommet d'un angle soustendu par une base ou corde donnée, que pour rendre adjacents (709) à une ligne donnée des angles qui lui seraient opposés.

(853) Il faudra s'étudier aussi à réduire à sa plus simple expression l'énoncé de tout problème à résoudre ; ce qui diminuera souvent d'autant les difficultés de la solution. C'est ainsi qu'on a vu (845) que la difficulté de décrire un cercle qui soit tangent à trois cercles donnés, se réduit à en décrire un qui soit tangent à deux cercles et qui passe par un point donné. Au lieu donc d'avoir à fixer les trois points de contact ou de trajet du cercle voulu, on n'en a plus que deux à établir. De même, s'il s'agissait de décrire un cercle qui fût tangent à trois lignes données AB, CD, FE, problème dont la solution paraît d'abord assez difficile ; il n'y aurait qu'à prolonger jusqu'à ce qu'elles se rencontrassent mutuellement les trois lignes données pour s'apercevoir que ce problème n'est autre que celui (630) d'inscrire un cercle dans un triangle donné.

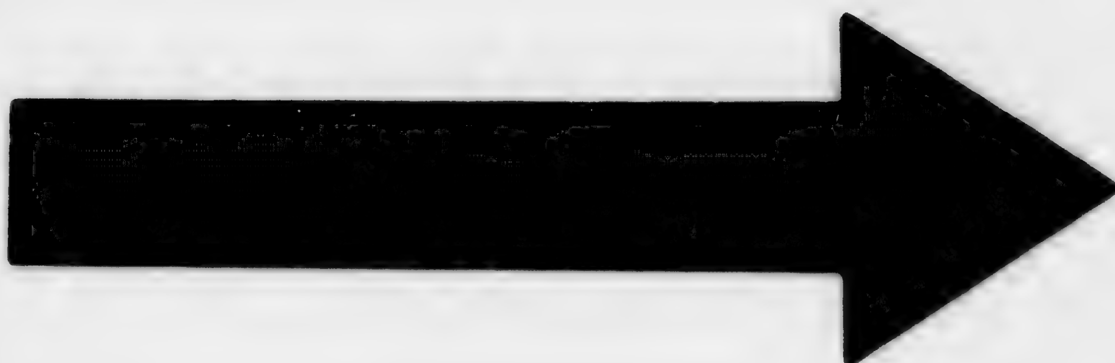


(854) On a vu (699, 754, 760, 844, etc.) tout le parti à tirer du prolongement des côtés d'un quadrilatère, dans l'établissement de triangles auxiliaires, ainsi nommés, et à bon droit, pour les services importants qu'ils rendent à la géométrie. Par exemple, si la division AC dont il s'agit aux pars. (591) et (744) devait s'opérer pour un quadrilatère ON au lieu d'un triangle BLN, le triangle auxiliaire OBP ajouté au quad. donné permettrait de poursuivre l'opération tout de même que si la ligne OP n'existait aucunement.

(855) Cette méthode de prolonger les côtés d'une figure ou autres lignes finies ou indéfinies est aussi d'un puissant secours dans la solution de beaucoup d'autres problèmes, comme on le voit aux paragraphes (706) (709) (725) (736) (768) (783) etc. et notamment au par. (717).

(856) Quand on trouve apropos d'inscrire dans des cercles les figures sur lesquelles on opère, il est souvent avantageux de relier par des lignes les divers points d'intersection formés tant par les côtés que par leurs prolongements, comme le font voir les figures des pars. (712) (715) etc ; tandis que dans d'autres cas ce sera un rayon à mener, ou un diamètre, ou encore une perpendiculaire à un diamètre, etc. D'ailleurs, comme on l'a déjà dit, les modes de solution sont aussi variés que les problèmes mêmes et exigent que l'on mette à contribution tour à tour toutes les propositions de la géométrie.

(857) Il y a un nombre des problèmes précédents qui peuvent paraître à l'étudiant comme purement de fantaisie et sans aucune utilité pratique ; mais il suffira d'indiquer dans un ou deux cas la relation de la théorie à la pratique, pour lui faire voir l'avantage de n'en négliger aucun. C'est ainsi que le par. (760) présente le moyen de partager un terrain AC de manière que les acquéreurs des parcelles



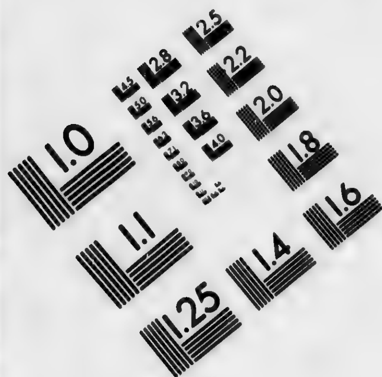
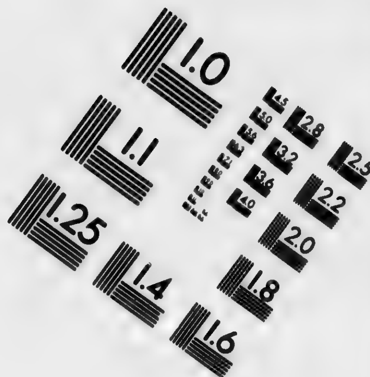
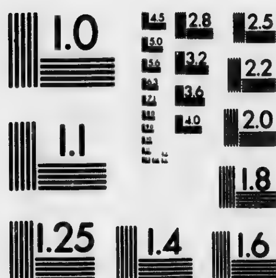
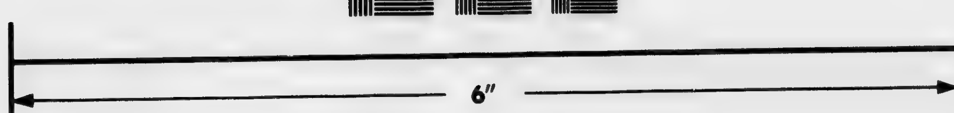
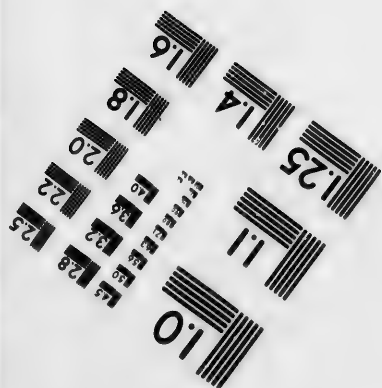
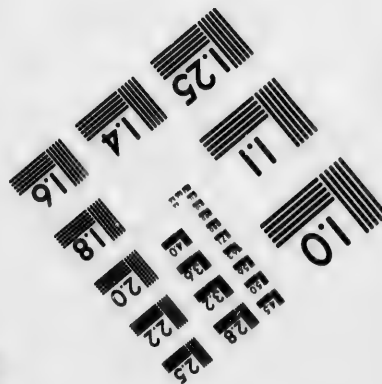



IMAGE EVALUATION TEST TARGET (MT-3)

contigues (fig. du par. **761**) A*b*, *ad*, etc. aient chacun une part proportionnelle A*a* et B*b*, *a c* et *b d*, etc. dans les lignes de front AD, BC, considération, souvent de la plus haute importance quand le terrain à partager fait front sur une place publique ou voie commerciale.

(**858**) Au par. (**749**) il s'agit de déterminer par exemple la hauteur AC d'une forteresse dont on connaît la distance horizontale d'un point B et l'angle sous-tendu en ce point par un mât de pavillon CD dont on connaît la longueur ou hauteur. Or, dire que AC est une hauteur ou ligne verticale et AB une distance ou ligne horizontale, équivaut à dire que le triangle BAC est rectangle en A et comme le mât CD est censé à plomb ou posé verticalement sur le sommet C de la forteresse, on en conclut que ACD est une ligne droite et de là le problème réduit à l'abstrait, s'énonce " construire " un triangle rectangle dont on a un côté et l'angle sous- " tendu à l'extrémité du côté donné par le prolongement de " l'autre côté."

(**859**) Au par. (**717**) c'est par exemple un récif O dont il y a à fixer la position, les données étant les angles AOB, BOC, COD sous-tendus en O par les rayons visuels OA, OB, etc. dirigés du point O sur quatre objects A, B, C, D situés en ligne droite, mais dont un obstacle rend impossible le mesurement de la distance BC du second au troisième.

(**860**) Au pars. (**591**) et (**744**) c'est encore du partage d'un terrain qu'il s'agit, et si l'on demande non seulement que la ligne de division AC passe par un point donné F mais encore qu'elle soit droite ; c'est que F est un puits, etc. auquel chaque fermier doit parvenir sans passer sur la terre de son voisin, et que la ligne droite étant la plus courte qu'il soit possible de tirer dans les conditions voulues est en même temps la moins coûteuse à clore.

(**861**) La ligne brisée GHKL dans la fig. du par. (**294**) est un mur ou une clôture quelconque qu'il s'agit de remplacer par une nouvelle division NL en ligne droite et qui n'altère en rien les surfaces relatives des terrains contigus.

(862) DG, par. (705) est le plus grand rectangle qu'on puisse tirer du triangle ABC ; soit la coupe transversale du plus grand morceau de bois écarri qu'on puisse tirer d'un morceau triangulaire.

(863) Le point O du par. (706) est un point invisible ou inaccessible ou les deux, dans la direction duquel il est à mener une ligne passant par un point donné P.

(864) Les problèmes (725) (768) (771) (775) (781) et d'autres de cette nature indiquent le moyen de raccorder les courbes de voies ferrées, soit entre elles ou avec les parties droites de ces voies et de manière aussi que ces courbes ou parties de chemin passent par des points donnés, soit pour éviter des obstacles ou pour toucher à un endroit voulu.

(865) ABCD (763) est une terre de surface connue dont le possesseur a perdu les bornes A, B, C, D ; mais prévenant ce danger, il a d'avance observé sur chacune des lignes AB, CD, etc., un arbre ou autre objet remarquable, et il donne maintenant à résoudre le problème de retrouver les bornes ou points angulaires de son terrain au moyen des distances HF, GE entre les objets E, F, G, H et de l'inclinaison des droites reliant ces points.

(866) (683) Dans ce prob. CD est une distance qu'on ne peut mesurer, quoiqu'il soit possible cependant d'observer de ses extrémités les angles sous-tendus par la ligne de base AB qu'on peut mesurer, mais dont on ne peut observer en A et B les angles sous-tendus par le côté opposé.

(867) *abc* (728) peut représenter un terrain dont il soit possible d'observer les angles en *a*, *b*, *c*, mais dont on ne peut mesurer les côtés ; dans ce cas on prend un point intérieur quelconque *d* dont on puisse mesurer les distances aux points angulaires du terrain.

(868) Le problème (727) sans avoir une utilité pratique directe est cependant essentiel à la solution du prob. (763) et en cela d'une importance toute aussi grande que ce dernier. On ne saurait trouver non plus dans (745) autre

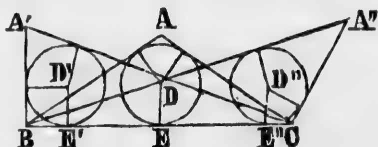
chose qu'une proposition de fantaisie, n'était le secours essentiel qu'on en obtient dans la solution du prob. (**744**) et il y a un nombre de problèmes de cette sorte dont l'utilité n'est que relative ou secondaire, comme ceux dont il est question aux paragraphes (**376**) (**514**) (**309**) (**306**) (**538**) (**373**) (**303**) qui concourent tous à la solution du problème (**591**) dont l'utilité pratique est d'une haute importance.

(**869**) On ne saurait négliger non plus les problèmes de la nature de ceux dont il est traité aux articles (**774**) (**684**) (**691**) (**692**) (**695**) (**724**) (**729**) (**738**) (**739**) et (**741**) etc., tout étranges qu'ils puissent paraître au premier abord; car l'utilité de ces propositions s'est déjà fait sentir dans plusieurs cas où après avoir obtenu par construction ou par calcul les données qu'on trouve dans les énoncés, les éléments qui avaient servi à les déterminer ont été perdus, nécessitant par la même, pour les retrouver, l'opération inverse, comme pour revenir par exemple de la surface d'un triangle à sa base quand on en connaît la hauteur ou à la hauteur quand on en connaît la base.

(**870**) Enfin, pour une raison ou une autre tous les problèmes ici données et un nombre indéfini d'autres problèmes non moins variés se présentent tous les jours dans la pratique de l'arpenteur, du mesureur, du géomètre et dans les sciences, arts et métiers et pourront généralement se résoudre soit au moyen de quelqu'une des propositions de ce traité ou d'une conbinaison convenable de méthodes déjà enseignées, ne perdant jamais de vue que les données, toutes nouvelles qu'elles puissent paraître au premier abord, se réduiront pour la plupart à des données, tout autres, comme dans le cas du par. (**836**) où l'énoncé "déterminer un triangle dont on connaît la base, la perpendiculaire et la différence entre les (ou (**724**) la somme des) côtés" devient celui de "décrire un cercle qui soit tangent à un cercle et qui passe par deux points, donnés."

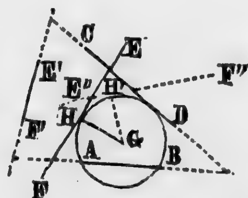
(**871**) Il est clair qu'avant de tenter la solution de quelque

nouveau problème, on s'épargnera souvent un travail inutile en se demandant d'abord si le problème est déterminé ou en d'autres termes, s'il peut se résoudre ; car, tel problème qui paraît d'abord résoluble, est souvent loin de l'être, les données étant soit en trop petit ou en trop grand nombre. Par exemple si on connaissait dans un triangle ABC un côté BC et le rayon DE du cercle inscrit ; on n'aurait qu'à s'y arrêter un moment, pour voir que si le cercle était situé au centre



A de la base ou près du centre, le triangle voulu serait plus ou moins isocèle ; si le cercle D' était à une distance d'une des extrémités de la base égale à son rayon $D'E'$, le triangle qui en résulterait serait évidemment rectangle, et si la distance $E''C$ était moindre que $D''E''$ ou aurait un triangle obtusangle. On voit donc que ce problème admet autant de solutions différentes que de positions du cercle donné sur le côté donné et qu'il est en conséquence impossible à résoudre, faute d'une donnée additionnelle, pour fixer la position du cercle.

(872) Maintenant, soit à décrire un cercle qui doive passer par deux points donnés A,B, et toucher à deux lignes CD, EF ; on n'a qu'à recourir à l'extrême, comme au par. (828) et à supposer que l'une EF des deux

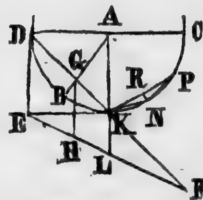


lignes données soit indéfiniment éloignée en $E'F'$, pour s'apercevoir d'un coup d'œil que le prob. ne peut se résoudre que quand la distance GH, GH' du centre du cercle à la tangente EF, $E''F''$ est égale au rayon du cercle passant par les deux points donnés et tangent à l'autre ligne CD ; le problème est donc ici encore indéterminé, les conditions étant trop nombreuses pour qu'on puisse les remplir toutes, et en général il est clair que puisqu'il suffit de trois points

pour déterminer le rayon et la position d'un cercle, on ne saurait dans aucun cas imposer une condition additionnelle; de même que dans un triangle il suffit d'avoir trois de ses six éléments (trois côtés et trois angles) pour déterminer le reste et on ne saurait mieux réussir à la solution avec une condition de plus qu'avec une de moins.

(873) On n'a plus qu'a mettre l'étudiant en garde contre le danger, dans la solution des problèmes, d'une construction graphique qui fasse croire à l'existence de données qui n'ont aucune raison d'être. C'est ainsi qu'une ligne par exemple dans une figure sera accidentellement parallèle ou perpendiculaire à une autre ligne ou paraîtra être dans le prolongement d'une autre ligne et former avec cette dernière une seule et même ligne droite. Une ligne passera quelquefois par pur hazard par le point d'intersection de deux autres lignes ou par le centre d'un cercle et ces apparences spécieuses auront quelquefois pour effet de porter à de fausses conclusions, l'esprit étant toujours plus ou moins en danger d'être influencé et méconduit par les impressions oculaires. (*) Lorsque ces accidents se présentent dans la

(*) Le Canada a failli de cette manière jouir de l'honneur d'avoir résolu le célèbre problème de la trisection d'un angle; mais malheureusement pour celui qui prétendit en avoir fait la découverte, une ligne essentielle qui pour résoudre le problème ou prouver l'exactitude de la construction devait se trouver dans le prolongement d'une autre ligne de la figure, ne formait pas avec cette dernière, partie d'une seule et même ligne droite; malgré qu'en raisonnant toujours "dans un cercle" l'homme ait réussi à y croire lui même et à inspirer sa croyance à quelques zélés de sa force en géométrie.



Cette prétendue solution de M. Thorpe (jugez de l'homme; il admet y avoir dévoué 34 années de sa vie) divestie de tout le fatras dont il l'a entourée, consiste simplement (BAC étant l'angle à "trisecter" ou à partager en trois parties égales) après avoir prolongé AC jusqu'en D et mené DE parallèle et égale à AK, à joindre et prolonger DK d'une quantité KF = DK, joindre ensuite EF et par le point

construction d'une figure il vaut mieux recommencer et faire la fig. de manière à ce que toutes les lignes qui la composent soient aussi éloignées que possible de tout parallélisme et de toute perpendicularité ou intersection qui n'est pas une condition essentielle à l'énoncé du problème.

d'intersection G de la droite DF et du côté AB de l'angle donné mener la parallèle GH qui est la corde du tiers de l'angle donné. Or cette construction ne vaut que pour un angle égal à deux angles droits et mesuré par la demi-circonférence, la construction dans ce cas donnant pour corde " trisectrice " le rayon DE du cercle; on démontre aussi que la construction vaut pour un angle de 98° 69′ +, ainsi que pour un angle de 118° 66′ +, mais dans nul autre cas; et pour en démontrer l'absurdité, il suffit de considérer un angle droit CAK, la construction donnant dans ce cas pour corde " trisectrice " une ligne $KL = \frac{1}{2}$ DE (à cause des triangles semblables DEF, KLF et de $KF = DK = \frac{1}{2}$ DF par constr.) Maintenant soit $KN = NP = PC$, on aura $KNP = \frac{1}{3}$ demi-circonférence et KP corde de $KNP = \text{rayon} = DE$. La construction de Thorpe comme on vient de le voir donne pour corde de l'arc KN la ligne $KL = \frac{1}{2}\ DE = \frac{1}{2}\ KP = KR$ côté du triangle rectangle KRN et moindre par conséquent que KN hypoténuse du même triangle; et équivaut à dire en d'autres termes que la demi-corde d'un arc est égale à la corde de la moitié de cet arc.

On n'aurait pas même pris au sérieux ou fait mention d'une aussi absurde prétention, n'était le fait que Thorpe a obtenu du bureau des patentes un brevet d'invention pour sa ridicule solution et que passer sous silence une énormité de la sorte serait avouer en quelque manière qu'il y en a d'autres qui se sont laissés prendre à ses spécieux arguments.

On peut à bon droit se demander si de toutes les prétendues découvertes de la trisection d'un angle, de la quadrature du cercle ou du mouvement perpétuel, etc., dont l'Académie des Sciences et autres sociétés scientifiques ont été pendant tant d'années inondées, il s'en est trouvé une seule aussi éloignée de la vérité que celle que nous venons de signaler.

LIVRE II.

PLANS ET ANGLES SOLIDES.

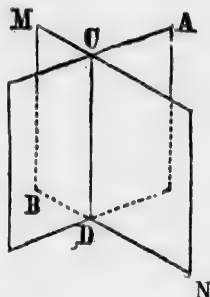
DÉFINITIONS ET CONSÉQUENCES.

(874) **Cor.** On a déjà défini (**115**) ce qu'est un plan ou une surface plane MN, et il est clair d'après cette définition qu'une **ligne droite** ABC **ne peut être, en même temps, en partie, AB, dans un plan et en partie,** BC′, **hors de ce plan,** puisqu'une droite qui a deux points en commun avec un plan est entièrement dans ce plan.



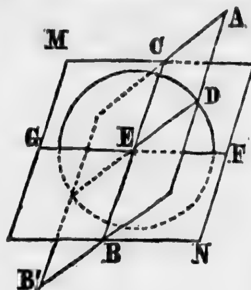
(875) **Sco. Pour découvrir si une surface est plane,** il est néccesaire de lui appliquer en divers sens une ligne droite et de s'assurer que la ligne touche la **surface sur toute son étendue.**

(876) **Déf.** On nomme **commune intersection de deux plans** MN, AB ou MN, CB, la ligne CD d'intersection ou de rencontre de ces plans.



(877) **Cor. La commune intersection de deux plans est une ligne droite**; car, par la déf. d'un plan, la droite CD qui joint deux points quelconques C, D dans l'intersection de ces plans est toute entière dans chacun des deux plans, et par conséquent dans leur commune intersection.

(878) **Déf. L'angle** DEF ou DEG, **ou l'inclinaison mutuelle de deux plans** MN, AB, (AB′) **qui se coupent ou se rencontrent** en BC, est l'écartement plus ou moins grand de ces deux plans, et est égal à l'angle formé par les lignes EF, ED ou EG, ED menées d'un même point E, l'une dans chacun des deux plans, et toutes deux perpendiculaires à la commune intersection BC de ces plans.

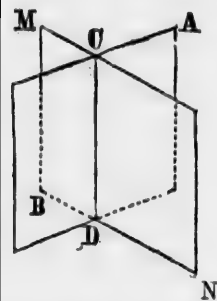


Cet angle peut être aigu comme DEF ou obtus comme DEG, et s'il est droit, les deux **plans** sont **perpendiculaires l'un à l'autre.**

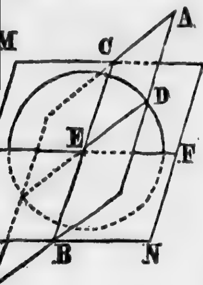
(879) **Cor. 1. La valeur ou grandeur de l'inclinaison de deux plans l'un à l'autre, dépend** (122) **du plus ou moins d'écartement des deux côtés** EF, ED **de l'angle rectiligne** DEF **qui mesure cette inclinaison**; **et réciproquement** (67).

(880) **Cor. 2. L'inclinaison de deux plans l'un à l'autre est égale ou inégale à celle de deux autre plans, l'un à l'autre, suivant que les angles rectilignes qu'on vient de**

section de deux
d'intersection ou



l'inclinaison mu-
ui se coupent ou



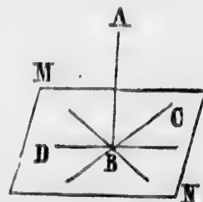
ou obtus comme
perpendiculaires

de l'inclinaison
122) du plus ou
F, ED de l'angle
ison ; et récipro-

ans l'un à l'autre
tre plans, l'un à
s qu'on vient de

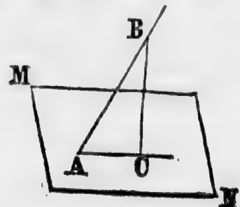
définir sont mutuellement égaux ou inégaux ; et réciproquement, ces derniers seront égaux ou inégaux, suivant que l'inclinaison des plans sera égale ou inégale.

(881) **Déf.** Une **ligne droite** AB est **perpendiculaire à un plan** MN lorsquelle rencontre ce plan sans pencher d'aucun côté ; et réciproquement le **plan** est **perpendiculaire à ligne.**

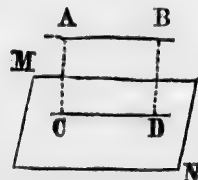


(882) **Cor. Une ligne droite** AB **perpendiculaire à un plan** MN, **est perpendiculaire à toutes les droites** BC, BD, B etc. **qu'elle rencontre dans ce plan ; et réciproquement.**

(883) **Déf. L'inclinaison d'une droite** AB **sur un plan** MN, est l'angle aigu BAC contenu par cette droite et une autre ligne AC menée du point A où la première rencontre le plan, au point C où une perpendiculaire BC menée d'un point quelconque B de la première ligne au plan, rencontre ce même plan.



(884) **Déf.** Une **ligne** AB est **parallèle à un plan** MN, lorsqu'elle est partout à la même distance de ce plan. Réciproquement le plan est parallèle à la ligne.



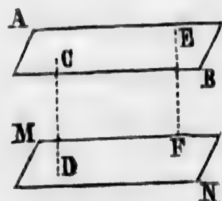
(885) La **distance d'une ligne parallèle à un plan** est (313) la perpendiculaire AC ou BD menée de cette ligne à ce plan.

(886) **Cor. 1. Si une ligne est parallèle à un plan, les deux étant prolongés à l'infini, en se rencontreraient jamais.**

(887) **Cor. 2. Si une droite** AB **est parallèle à une droite** CD **menée dans un plan, elle sera parallèle à ce**

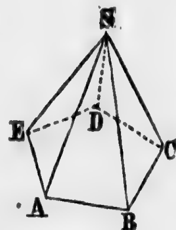
plan; car si la ligne AB, dans le plan BD, pouvait rencontrer le plan MN, cela ne serait qu'en un point de la ligne CD, commune intersection (876) des deux plans; mais AB ne peut rencontrer CD, puisqu'elles sont parallèles; donc elle ne rencontrera pas le plan MN; donc AB est partout à la même distance du plan MN et par conséquent (884) parallèle à ce plan.

(888) **Déf.** Deux **plans** AB, MN sont **parallèles l'un à l'autre** lorsqu'il sont partout à la même distance l'un de l'autre,



(889) **La distance qui sépare deux plans parallèles** est la perpendiculaire CD, EF menée d'un de ces plans à l'autre.

(890) **Cor. deux plans parallèles prolongés à l'infini, ne se rencontreraient jamais.**

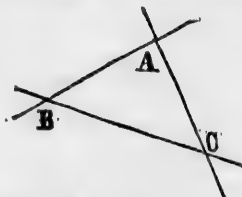


(891) **Déf.** Un **angle solide** S est l'espace angulaire compris entre plusieurs plans ASB, BSC, CSD, etc. se rencontrant en un même point S qui en est le **sommet.**

Il faut au moins trois plans pour former un angle solide.

PROPOSITION I. THÉORÈME.

(892) **Trois points** A, B, C, **situés non en ligne droite, sont dans un même plan, et en déterminent la position.**



Car, si l'on conçoit un plan qui contienne deux, quelconques, A, B, de ces points, et que ce plan tourne autour de la droite AB qui les relie, jusqu'à ce qu'il rencontre le troisième point C, les trois points seront alors dans le plan et en détermineront la position.

(893) **Cor. 1. Un triangle ABC ou deux lignes AB, AC qui s'intersectent, déterminent la position d'un plan.**

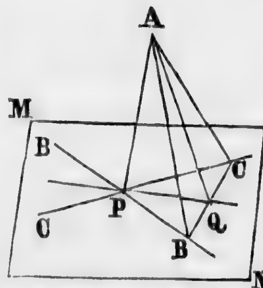
(894) **Cor. 2.** De là, aussi, deux parallèles AB, CD déterminent la position d'un plan; car, menant la sécante EF, le plan des deux droites AB, EF, est en même temps celui des droites CD, EF, et par suite, celui des parallèles AB, CD.



PROP. II. THÉOR.

(895) **Si une ligne droite AP est perpendiculaire à deux droites BB, CC, au point P de leur intersection; elle sera perpendiculaire au plan MN de ces lignes;** c'est-à-dire, elle sera perpendiculaire à toutes les droites qu'elle rencontrera dans ce plan et par conséquent (882) au plan lui même.

Ayant mené par le point P, dans le plan MN, une droite quelconque PQ, et par un point quelconque Q de cette ligne, une droite BQC telle (788) que BQ soit égale à CQ; joignez AB, AQ, AC. La base BC étant divisée en deux parties égales au point Q, le triangle BPC donnera (393) $PC^2+PB^2=2PQ^2+2QC^2$. Le triangle BAC donnera de même, $AC^2+AB^2=2AQ^2+2QC^2$. Retranchant la première équation de la seconde, et observant que les triangles APC, APB qui sont tous deux rectangles en P, donnent $AC^2-PC^2=AP^2$, et $AB^2-PB^2=AP^2$; on aura $AP^2+AP^2=2AQ^2+2PQ^2$. Prenant donc les moitiés des deux, on a $AP^2=AQ^2-PQ^2$, ou $AQ^2=AP^2+PQ^2$; d'où, le triangle APQ est rectangle en P et par suite, AP perpendiculaire à PQ.

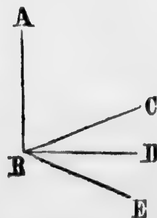


(896) **Sco.** Il est donc évident, non seulement qu'une ligne droite peut être perpendiculaire à toutes les lignes qu'elle rencontre dans un plan, mais qu'il en est toujours nécessairement ainsi, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites menées dans le plan ; ce qui prouve l'exactitude du Cor. (882)

(897) **Cor. 1. La perdendiculaire** AP est (313) plus courte qu'une ligne oblique quelconque AQ ; donc, elle **mesure la vraie distance du point** A **au plan** MN ; ce qui prouve l'exactitude des défs. (885) et (889).

(898) **Cor. 2. En un point donné** P **sur un plan, il ne peut y avoir plus d'une perpendiculaire à ce plan** ; car, s'il pouvait y en avoir deux, ayant mené par ces deux perpendiculaires un plan dont l'intersection avec le plan MN soit PQ, ces deux perpendiculaires seraient perpendiculaires à la ligne PQ en un même point de cette ligne et dans un même plan, ce qui (128) est impossible.

(899) **Cor. 3. Il est** de même **impossible de mener d'un point** A **hors d'un plan, deux perpendiculaires à ce plan** ; car, soient AP, AQ ces deux perpendiculaires, alors le triangle APQ aurait deux angles droits APQ, AQP, ce qui est impossible.

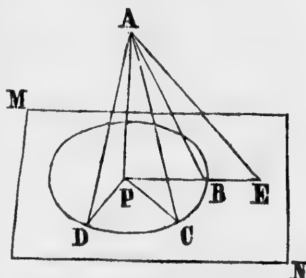


(900) **Cor. 4. Si trois lignes droites** BC, BD, BE **se rencontrent en un même point** B, **et qu'une droite** AB **soit perpendiculaire à chacune d'elles en ce même point ; ces trois lignes sont dans un même plan** ; car, par la prop., AB est perpendiculaire au plan de chacune des deux lignes BC, BD BC, BE et BD, BE, ce qui serait évidemment impossible si les plans CBD, CBE, DBE étaient inclinés l'un à l'autre ; les plans CBD, DBE font donc partie d'un seul et même plan CBE et les trois lignes BC, BD, BE sont dans ce plan.

PROP. III. THÉOR.

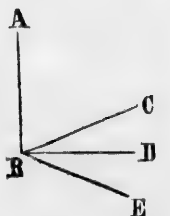
(901) **Si d'un point donné A hors d'un plan MN, l'on mène une perpendiculaire AP à ce plan et des lignes obliques AD, AC, A etc., à divers points du plan ; toutes lignes obliques également distantes de la perpendiculaire, seront égales ; et de celles qui seraient inégalement éloignées de la perpendiculaire, la plus éloignée sera la plus longue.**

Car, les angles APB, APC, APD étant droits ; si l'on suppose que les distances PB, PC, PD soient égales entre elles, les triangles APB, APC, APD auront chacun un angle égal contenu par des côtés égaux, ce qui (**237**) les rendra égaux en toutes choses ; de là, les hypoténuses ou lignes obliques AB, AC, AD seront égales entre elles. De même, si PE excède PD ou son égale PB, la ligne oblique AE sera évidemment plus grande que AB ou son égale AD.



(902) **Sco. 1. PROB.** Toutes les droites obliques égales AB, AC, AD, etc., terminent dans le cercle BCD décrit du centre P où la perpendiculaire AP rencontre le plan MN ; d'où il suit que pour **mener à un plan une perpendiculaire AP, d'un point A hors de ce plan,** il suffit de marquer sur ce plan, au moyen d'un même rayon AD plus grand que la perpendiculaire AP, trois points B, C, D, et de trouver ensuite (**417**) le centre du cercle passant par ces points ; ce centre sera le point P où devra tomber la perpendiculaire demandée.

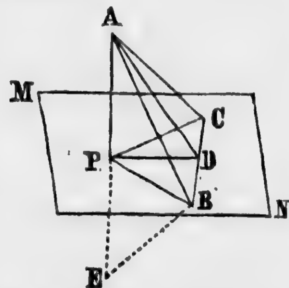
(903) **Sco. 2.** L'angle d'inclinaison (**883**) ABP de la droite AB au plan MN, est évidemment égal à celui de toute autre



ligne AC, AD, etc., également éloignée de la perpendiculaire; ce qui est clair, à cause des triangles égaux ABP, ACP, ADP, etc.

PROP. IV. THÉOR.

(904) **Si d'un point A hors d'un plan MN, l'on mène à ce plan une perpendiculaire AP, et que du pied de la perpendiculaire on mène une perpendiculaire PD, à une ligne quelconque BC du plan, puis du point d'intersection D, une droite DA au premier point; cette dernière sera perpendiculaire à la ligne du plan.**



Prenez DB=DC et menez PB, PC, AB, AC. Puisque BD=DC, on a l'hypoténuse PB=PC et puisque PB=PC, on a (901) à cause de la perpendiculaire AP, l'hypoténuse ou ligne oblique AB=AC; la ligne AD a donc deux de ses points, A et D, également éloignés des extrémités B et C; d'où, AD est perpendiculaire à BC au point milieu D de cette ligne (316).

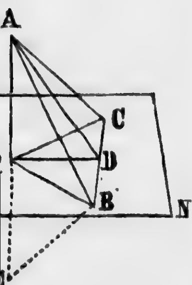
(905) **Cor.** Il est évident aussi que BC est perpendiculaire au plan APD, puisqu'elle est en même temps perpendiculaire à chacune des droites AD, PD.

(906) **Sco. 1.** Les deux lignes AE, BC offrent un exemple de deux lignes qui ne se rencontrent pas, parce qu'elles ne sont pas situées dans un même plan. La plus petite distance entre ces lighes est la droite PD, qui est en même temps perpendiculaire à chacune d'elles. La distance PD entre ces lignes est la plus courte, parce que si l'on joint d'eux autres points quelconques A, B, on aura AB>AD, AD>PD; d'où AB>PD.

(907) **Sco. 2.** Quoique les deux lignes AE, CB ne soient pas situées dans un même plan, rien n'empêche de les concevoir comme formant l'une avec l'autre un angle droit, puisque si l'on menait par un des points de AE une parallèle à BC, ces deux lignes seraient perpendiculaires l'une à l'autre. De même la ligne AB et la ligne PD qui représentent deux lignes quelconques non dans un même plan, sont supposées former l'une avec l'autre le même angle que formeraient AB et une droite parallèle à PD menée par un des points de AB.

PROP. V. THÉOR.

(908) **Si l'une AP de deux lignes parallèles AP, ED, est perpendiculaire à un plan MN, l'autre sera aussi perpendiculaire au même plan.**



Soit EP le plan (**894**) des parallèles AP, ED et PD son intersection avec le plan MN; ayant mené dans le plan MN la droite BC perpendiculaire à PD et joint AD, on aura (**905**) BC perpendiculaire au plan EP; d'où, l'angle BDE est droit; mais (**149**) l'angle EDP est aussi droit, puisque (**882**) AP est perpendiculaire à PD et DE parallèle à AP; la ligne DE est donc perpendiculaire aux deux droites DP, DB et par suite (**895**) perpendiculaire au plan MN de ces lignes.

(909) **Sco. PROB.** Si l'on avait à **ériger une perpendiculaire NF à un plan MN, en un point donné N de ce plan ;** il y aurait d'abord à laisser tomber sur ce plan (**902**) une perpendiculaire AP d'un point quelconque A hors de ce plan, puis à mener à cette dernière une parallèle NF qui, par la prop., **serait la perpendiculaire demandée.**

(910) **Cor. 1.** Réciproquement, si deux lignes droites AP, DE sont perpendiculaires à un même plan MN, elles seront parallèles; car, si elles ne le sont pas, menez par le point D une parallèle à AP, cette parallèle sera par la prop., perpendiculaire au plan MN ; on pourrait donc par un même point D mener à un plan plus d'une perpendiculaire, ce qui (898) est impossible.

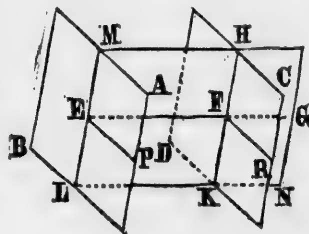
(911) **Cor. 2.** Deux lignes A et B parallèles à une troisième ligne C sont parallèles entre elles ; car, concevez un plan perpendiculaire à la ligne C ; les lignes A et B étant parallèles à C, seront, par là prop., perpendiculaires au même plan ; et, par le dernier cor., parallèles entre elles.

Les trois lignes sont supposées ne pas être dans un même plan ; autrement, la proposition serait déjà connue (**143**).

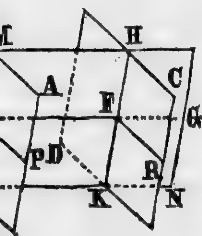
PROP. VI. THÉOR.

(912) **Les intersections ML, HK de deux plans parallèles AB, CD, par un troisième plan MN, sont des lignes parallèles.**

Car, les droites ML, HK sont dans un même plan MK ou MN, et étant prolongées ne se rencontreraient pas, puisque (**890**) les plans AB, CD qui les contiennent ne peuvent se rencontrer; donc (**141**) ML, HK sont parallèles.



(913) **Cor. 1. Les parallèles MH, LK comprises entre deux plans parallèles AB, CD, sont égales**; car les intersections ML, HK du plan MK de ces parallèles avec les plans AB, CD, sont parallèles par la prop. et comme les parallèles entres parallèles sont (**271**) égales, on a MH=LK.



(914) Cor. 2. **Une ligne droite EF perpendiculaire à l'un AB de deux plans parallèles AB, CD, est aussi perpendiculaire à l'autre** ; car, ayant mené dans le plan CD une ligne quelconque FH, et par les lignes EF, FH un plan EH, l'intersection EM de ce dernier avec le plan AB sera, par la prop., parallèle à FH ; or la droite EF perpendiculaire au plan AB est (**882**) perpendiculaire à EM et (**149**) à sa parallèle FH; et EF étant perpendiculaire à une ligne quelconque FH dans le plan CD, est (**882**) perpendicnlaire à ce plan.

(915) Cor. 3. **Deux plans AB, CD perpendiculaires à une même ligne droite EF sont parallèles l'un à l'autre** ; car, ayant mené dans l'un des deux plans, une ligne quelconque FH, et par les lignes EF, FH, un plan EH intrersectant AB en EM, on aura (**150**) EM parallèle à FH, à cause de EF perpendiculaire (**882**) à chacune d'elles. Soit maintenant EM=FH, on aura (**167**) MH parallèle et égale à EF ; or MH étant parallèle à EF est (**908**) perpendiculaire à chacun des deux plans AB, CD, et cette perpendiculaire est, par constr., une perpendiculaire quelconque; donc, etc. (**888**).

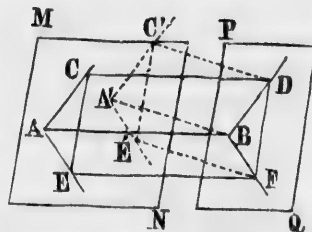
(916) Cor. 4. **Les angles d'inclinaison de deux plans parallèles AB, CD coupés par un troisième plan MN sont égaux** ; car, par la prop. l'intersection ML est parallèle à HK et si l'on mène dans le plan MN (MK) une droite EG perpendiculaire à l'une ML de ces intersections, elle sera (**149**) perpendiculaire à l'autre. Maintenant, qu'on mène dans l'un AB des deux plans parallèles, la droite EP perpendiculaire à ML et par les lignes EP, EG un plan ER ; l'intersection FR de ce dernier avec le plan CD sera, par la prop., parallèle à EP et ces parallèles étant par constr. dans un même plan avec la droite EG, on aura (**148**) l'angle GFR= GEP ; or, GEP est (**878**) l'angle d'inclinaison des plans AB, MN, à cause de EG, EP toutes deux perpendiculaires par constr. à ML ; donc aussi GFR est l'angle d'inclinaison

des plans CD, MN, car (908) HK parallèle à ML est perpendiculaire au plan ER, et par suite (882) aux lignes FG, FR situées dans ce plan ; donc, etc. (880).

(917) **D'ailleurs**, il suit immédiatement de la déf. (878) de l'inclinaison de deux plans et des corollaires (879) et (880) de cette déf., que deux plans parallèles coupés par un troisième plan forment avec ce dernier des angles correspondants et égaux, tout de même que (147) deux lignes parallèles intersectées par une troisième ligne ; et il est évident, comme pour les lignes, que **1° deux plans qui s'intersectent, font les angles opposés au sommet égaux ; 2° tous les angles formés par plusieurs plans qui se coupent dans une même ligne, valent ensemble 4 angles droits ; 3° dans l'intersection des plans parallèles par une ligne ou par un troisième plan, les angles correspondants ainsi que les angles alternes sont égaux et les angles intérieurs ou internes valent ensemble deux angles droits.**

PROP. VII. THÉOR.

(918) **Si deux angles CAE, DBF non dans un même plan, ont leur côtés AC, BD et AE, BF parallèles et tournés dans le même sens ; ces angles seront égaux et leurs plans parallèles.**



Ayant fait AC=BD et AE=BF, joint CE, DF et mené AB, CD, EF, on voit (274) que la fig. AD est un parallélogramme, à cause de AC parallèle et égale à BD et on a par conséquent CD=AB. On a de même EF=AB, à cause de AE parallèle et égale à BF ; d'où (911) CD est égale et parallèle à EF, et CE par conséquent égale et parallèle à DF ; donc les triangles CAE, DBF ont leurs côtés correspondants égaux et par suite l'angle CAE=DBF.

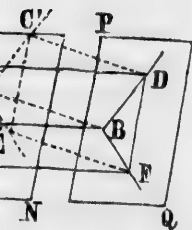
(919) **En second lieu,** le plan ACE ou MN est parallèle au plan BDF ou PQ ; car, ayant mené (902) A′B perpendiculaire au plan MN des lignes AC, AE et du point de rencontre A′ dans le plan MN, les droites A′C′, A′E′ parallèles à AC, AE et par conséquent (911) parallèles à BD, BF, on aura (882) A′B perpendiculaire à A′C′, A′E′ et (149) à leurs parallèles BD, BF ; donc, A′B sera (895) perpendiculaire à chacun des deux plans MN, PQ, et ces plans seront pour cette raison (915) parallèles l'un à l'autre.

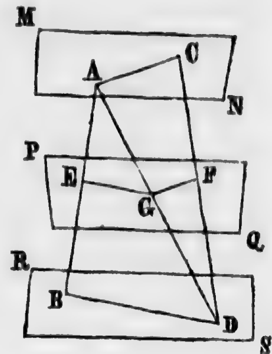
(920) Cor. 1. **Si deux plans parallèles MN, PQ rencontrent deux autres plans AD, AF ; les angles CAE, DBF formés par les intersections des plans parallèles seront égaux ;** car (912) l'intersection AC est parallèle à BD, et AE à BF.

(921) Cor. 2. **Si trois lignes droites AB, CD, EF, non dans un même plan, sont égales et parallèles ; les triangles opposés ACE, BDF formés par les droites joignant les extrémités des trois premières lignes, seront égaux et leurs plans parallèles ;** car les parallèles égales AB, CD donnent (274) AC égale et parallèle à BD. On a de même AE parallèle et égale à BF et par suite le triangle ACE égal BDF, et le plan ACE parallèle à BDF, par la prop.

PROP. VIII. THÉOR.

(922) **Deux lignes droites AB, CD coupées par trois plans parallèles MN, PQ, RS, sont divisées en parties AE, EB et CF, FD ayant entre elles le même rapport ;** c.-à-d. qu'on aura AE : EB :: CF : FD.



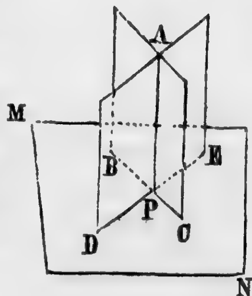


Menez AD qui rencontrera le plan PQ, soit en G, et joignez AC, GF, EG, BD ; les intersections EG, BD, des plans parallèles PQ, RS, par le plan ABD, sont (912) parallèles, et donnent (509) AE : EB :: AG : GD ; de même, les intersections parallèles AC, GF donnent AG : GD :: CF : FD ; d'où, on a (75 **Ax.**) AE : EB :: CF : FD.

(923) **Cor.** Si le nombre des plans coupants était plus grand que trois, on prouverait tout de même que les parties d'une des lignes sont proportionnelles à celles de l'autre ; et s'il y avait plus de deux lignes, un raisonnement analogue ferait voir que toutes ces lignes sont divisées proportionnellement ; donc en général, **si un nombre indéfini de lignes droites sont coupées par plus de deux plans parallèles ; les parties de l'une, quelconque, de ces lignes seront proportionnelles à celles de toutes les autres.**

PROP. IX. THÉOR.

(924) **Tout plan AB passant par une ligne AP perpendiculaire à un plan MN, sera perpendiculaire à ce plan.**



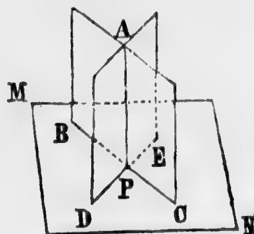
Soit BC l'intersection des plans AB, MN ; dans le plan MN menez DE perpendiculaire à BP ; alors AP perpendiculaire au plan MN, sera (882) perpendiculaire à chacune des deux lignes BC, DE ; mais l'angle APD, formé par les droites AP, PD toutes deux perpendiculaires à la commune inter-

section BC, mesure (878) l'angle d'inclinaison des plans AB, MN, l'un à l'autre ; et puisque cet angle est droit, les deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre.

(925) **Sco. Quand trois droites telles que AP, BP, DP, sont perpendiculaires l'une à l'autre ; chacune de ces lignes est perpendiculaire au plan des deux autres, et les trois plans sont en conséquence perpendiculaires l'un à l'autre.**

PROP. X. THÉOR.

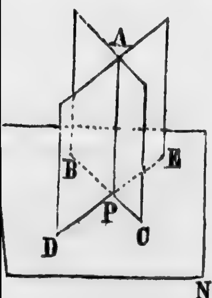
(926) **Si deux plans AB, MN, sont perpendiculaires l'un à l'autre ; une ligne AP menée dans l'un de ces plans, perpendiculaire à leur commune intersection BC, sera perpendiculaire à l'autre plan.**



Car, ayant mené dans le plan MN, la droite DP perpendiculaire à BC ; alors, parce que les plans sont perpendiculaires, l'angle APD est droit et la ligne AP est perpendiculaire à chacune des deux droites BP, DP et par suite (895) perpendiculaire au plan MN de ces lignes.

(927) **Cor. 1. Si un plan AB est perpendiculaire à un plan MN, et qu'en un point P de la commune intersection, l'on érige une perpendiculaire AP à l'un d'eux ; MN, cette dernière sera dans l'autre plan AB**; car, si non, alors dans le plan AB on pourrait mener AP perpendiculaire à la commune intersection BP, et cette AP serait en même temps perpendiculaire au plan MN ; il y aurait alors au même point P deux perpendiculaires au plan MN, ce qui (898) est impossible.

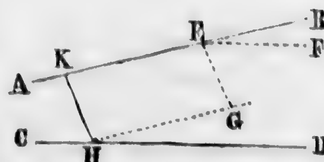
(928) **Cor. 2. Si deux plans AB, AD sont perpendiculaires à un troisième plan MN ; leur commune intersection**



AP sera aussi perpendiculaire à ce plan; car, ayant élevé au point P la perpendiculaire AP au plan MN, cette perpendiculaire sera, par le de... cor., en même temps dans le plan AB et dans le plan AD, donc, elle est leur commune intersection.

PROP. XI. PROB.

(929) **Mener une droite HK qui soit perpendiculaire à chacune de deux lignes AB, CD non situées dans un même plan.**

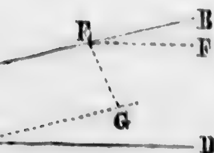


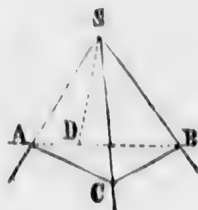
Ayant mené en un point quelconque E de l'une AB des deux lignes, une parallèle EF à l'autre ligne CD, et élevé (909) une perpendiculaire EG au plan BEF, on fera passer (893) par la perpendiculaire EG et la ligne AB un plan GK qui, à l'endroit de son intersection avec l'autre ligne CD, déterminera un point H d'où on mènera HK perpendiculaire à AB; la droite HK sera la perpendiculaire voulue par le problème.

Car, HK perpendiculaire à AB et dans le même plan que EG, est (150) parallèle à cette dernière; or EG est perpendiculaire au plan BEF et par suite (914) au plan parallèle (919) GHD des lignes HG, HD parallèles à EB, EF; donc, HK qui est parallèle à EG, est aussi (908) perpendiculaire au plan GHD et (882) à la ligne HD qu'elle rencontre dans ce plan, et elle est par constr. perpendiculaire à la ligne AB; donc, elle est perpendiculaire à chacune des deux lignes AB, CD.

PROP. XII. THÉOR.

(930) **Dans tout angle solide S formé de trois angles plans (ou rectilignes) ASB, ASC, BSC, la somme de deux, quelconques, de ces angles est plus grande que le troisième.**



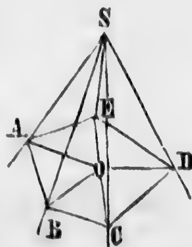


Il est clair, tout d'abord, que cette prop. n'exige une démonstration que dans le cas où l'angle plan que l'on compare à la somme des deux autres, est plus grand que chacun de ces derniers. Soit donc ASB plus grand que ASC ou BSC ; il est à démontrer que $ASB<ASC+BSC$.

Dans le plan ASB, faites l'angle $BSD=BSC$; prenez SD à volonté, menez par le point D, la droite ADB, faites $SC=SD$ et joignez AC, BC. Les deux côtés BS, SD sont égaux aux deux BS, SC ; l'angle $BSC=BSD$; les triangles BSD, BSC sont donc égaux (**237**) et on a $BD=BC$; mais $AB<AC+BC$; ôtant d'un côté BD et de l'autre, son égale BC, il reste $AD<AC$. Les deux côtés AS, SD, sont égaux aux deux AS, SC ; le troisième côté AD est moindre que le troisième côté AC ; donc (**269**) l'angle $ASD<ASC$. Ajoutant $BSD=BSC$, on a $ASD+BSD$ ou $ASB<ASC+BSC$.

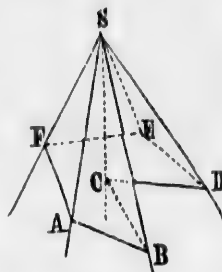
PROP. XIII. THÉOR.

(**931**) **La somme des angles plans** ASB, BSC, CSD, etc. **qui forment ou qui contiennent un angle solide quelconque S, est moindre que quatre angles droits.**



Ayant coupé l'angle solide S par un plan AD mené à volonté, et tiré d'un point quelconque O dans ce plan aux angles de la fig. les droites OA, OB, O etc. ; le nombre des triangles AOB, BOC, etc., formés par ces lignes sera égal à celui des triangles composants ASB, BSC, etc. de l'angle solide S ; or la somme des angles des triangles ASB, BSC, etc. formés autour du sommet S, est égale à la somme des angles d'un nombre égal de triangles

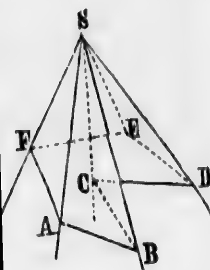
AOB, BOC, etc., formés autour du point O; mais au point B, la somme des angles ABO, CBO égale à ABC est moindre (**930**) que celle des angles ABS, CBS; de même, au point C, on a BCO+DCO<BCS+DCS; et il en est ainsi de tous les angles du polygone ABCDE; d'où il suit que la somme de tous les angles aux bases des triangles ayant leurs sommets en O, est moindre que la somme des angles aux bases des triangles dont les sommets sont en S; de là, pour suppléer au défaut, la somme des angles en O est plus grande que celle des angles en S. Mais la somme des angles en O vaut (**140**) quatre angles droits; donc, la somme des angles plans qui contiennent l'angle solide S est moindre que quatre angles droits.

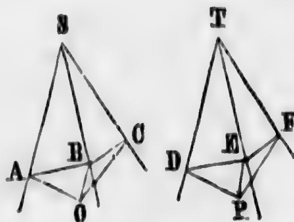


(**932**) **Sco.** Cette démonstration est fondée sur la supposition que l'angle solide dont il s'agit est convexe, ou que le plan d'aucune des surfaces composantes ASB, BSC, etc. ne puisse rencontrer l'angle solide; s'il en était autrement, comme dans la fig., où la base ABCDEF formée par le plan coupant AE est un polygone concave (**256**) et l'angle solide S par conséquent lui même concave, la somme des angles plans ne serait plus limitée, mais pourrait atteindre une valeur quelconque, augmentant indéfiniment, suivant le nombre et la grandeur (**122**) des angles rentrants BCD du pol. AE.

PROP. XIV. THÉOR.

(933) Si deux angles solides S, T, sont contenus chacun par trois angles plans respectivement égaux l'un à l'autre; savoir: ASC à DTF, ASB à DTE et BSC à ETF, les plans ASB, ASC et DTE, DTF, des angles égaux seront également inclinés entre eux.





Ayant pris SB à volonté, menez (**902**) BO perpendiculaire au plan ASC; du point O où la perpendiculaire rencontre le plan, menez OA, OC perpendiculaires à SA, SC et joignez AB, BC; prenez maintenant TE=SB, menez EP perpendiculaire au plan DTF, PD, PF, perpendiculaires à TD, TF et joignez ED, EF.

Les triangles SAB, TDE sont (**904**) respectivement rectangles en A, D, et puisque l'angle ASB=DTE et le côté SB=TE, les triangles sont égaux en toutes choses et donnent l'angle SBA=TED et les côtés AS, AB respectivement égaux à DT, DE. On prouverait de même que CS=FT et BC=EF. Cela posé, le quadrilatère AOCS est égal au quadrilatère DPFT; car, par superposition des angles égaux ASC, DTF, et à cause de l'égalité des lignes AS, DT et CS, FT et des angles droits SAO, TDP et SCO,TFP, il est clair que les points A, O, C, tomberont respectivement sur D, P, F, et qu'on aura AO=DP. Mais les triangles AOB, DPE sont rectangles en O, P; l'hypoténuse AB=DE et le côté AO=DP; d'où, (**312**) ces triangles sont égaux et l'angle OAB=PDE. Or, l'angle OAB est (**878**) l'inclinaison des deux plans ASB, ASC et l'angle PDE, celui de deux plans DTE, DTF; donc, ces deux inclinaisons sont égales entre elles.

(**934**) **Si la perpendiculaire** BO **tombait en dehors de la base** ASC, il est clair que l'angle BAO serait obtus au lieu d'être aïgu et l'angle obtus ajouté à l'angle A vaudraient ensemble deux angles droits; mais dans ce cas il en serait de même de la perpendiculaire EP et de l'angle EDP; de sorte qu'on aurait encore A=D.

(**935**) **Sco. Si deux angles solides sont contenus par trois angles plans respectivement égaux l'un à l'autre et disposés de la même manière dans chaque figure; ces deux angles solides seront égaux et étant appliqués l'un à l'autre, coïncideront dans toutes leurs parties.**

On a déjà vu que les quadrilatères AOCS, DPFT peuvent être superposés à l'un l'autre, les points A, O, C, tombant respectivement sur D, P, F ; mais les triangles AOB, DPE sont égaux en toutes choses et OB perpendiculaire au plan ASC, se confondra avec PE et le point B avec le point E ; de plus BS tombera sur ET et les deux angles solides coincideront entièrement.

(936) **Rem.** Si les plans composants, au lieu d'être disposés d'une manière correspondante dans chacun des deux angles solides, étaient placés dans un ordre inverse, comme ils le seraient si les perpendiculaires OB, PE tombaient de côtés opposés des plans ASC, DTF, on ne pourrait plus faire coincider les angles solides ; mais les plans composants n'en seraient pas moins également inclinés entre eux, et les angles solides égaux dans toutes leurs parties, sans cependant admettre la superposition. On donnera à ces sortes d'angles le nom d'**angles symétriques.**

(937) La même remarque s'applique aux angles solides formés de plus de trois plans composants A, B, C, D, E, etc., et des mêmes angles disposés en ordre inverse A, etc., E,D,B,C. Ces angles solides sont encore égaux sans être capables de superposition et on leur donne de même le nom d'**angles solides symétriques.**

(938) Il en est autrement des figures planes dans lesquelles **l'égalité par symétrie** ne peut, à proprement dire, exister, toutes ces figures pouvant se renverser pour admettre la superposition, tandis que dans le cas des solides, la troisième dimension ou épaisseur peut être prise dans deux directions différentes.

Cor. Les conclusions de ce théorème, relativement aux angles solides qui ne sont contenus que par trois plans composants, s'appliquent également à tout autre angle solide, quelque soit le nombre des angles plans qui le contiennent ; car, tout angle solide polyèdre peut évidemment se décomposer en autant d'angles solides trièdres que l'angle polyèdre a de faces moins deux.

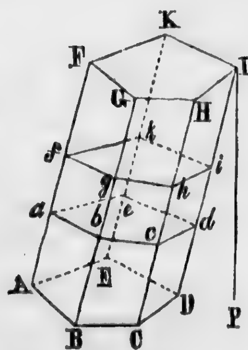
LIVRE III.

SOLIDES. (119)

DÉFINITIONS ET CONSÉQUENCES.

(939) **Déf.** On nomme **polyèdre solide** ou simplement **polyèdre**, tout corps (**119**) terminé par des plans ou surfaces planes ; ces dernièrs étant évidemment (**877**) terminés à leur tour par des lignes droites qui sont les côtés ou **arêtes** du polyèdre.

(940) **Déf. Le prisme** AI est un solide borné par plusieurs parallélogrammes AG, BH, etc. terminés à chaque extrémité par des polygones égaux et parallèles AD, FI, qu'on nomme **bases du prisme.** L'ensemble des parallélogrammes composants constitue la **surface latérale ou convexe du prisme.** A la commune intersection AF, ou BG, etc. de deux faces adjacentes AK, AG ou AG, BH, etc., du prisme, on donne le nom de côté !



(**941**) **Sco. 1.** Pour **construire le prisme**; soit AD un polygone quelconque ; on mènera dans un plan FI parallèle à celui AD de la base, les droites FG, GH, etc., respectivement parallèles et égales à AB, BC, etc.; ce qui donnera (**151** et **203**) le polygone FI en tout égal au pol. AD ; car, (**918**) les angles correspondants FGH, ABC, GHI, BCD, etc., sont égaux et les côtés AB, FG, BC, GH, etc. le sont par constr. Maintenant, on joindra par des droites AF, BG, etc., les sommets homologues ou angles correspondants A, F, B, G, etc., des deux polygones, formant ainsi (démonstr. du par. **918**) les parallélogrammes AG, BH, etc. et par suite (**940**) le prisme AI : ce qui prouve l'exactitude de la déf. de ce solide.

(**942**) **Sco. 2.** On peut encore concevoir le prisme formé par le mouvement d'un plan AD parallèlement à lui-même le long d'une ligne BG, ou CH, etc.

(**943**) **Cor. 1.** Il suit directement de ce qui précède que **dans un prisme, toute section parallèle à la base est** en **même temps égale à la base.**

(**944**) **Cor. 2. Dans tout prisme** AI, **les sections** *ad*, *fi* **formées par des plans parallèles, sont des polygones égaux**; car il est clair que le solide *a i* est lui-même un prisme et les sections *a d*, *f i*, bases de ce prisme, sont égales par la déf.

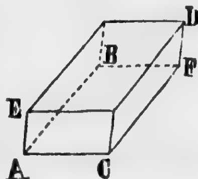
2° **D'ailleurs,** on a (**912**) *f g* et les autres côtés du pol. *f i* parallèles à *a b* et aux côtés correspondants du pol. *a d* et *f g*=*a b*, *g h*=*b c*, etc. (parallèles entre parallèles). Les côtés correspondants des pols. *a d*, *f i*, sont donc en même temps parallèles et égaux, et les angles correspondants de ces polygones en conséquence (**918**) égaux et par suite, les polygones eux-mêmes égaux.

3° **De plus,** les faces *a g*, *b h*, etc. du sol. *a i* sont, par la dém., des parallélogrammes, et les bases étant par le cor., des polygones égaux et par hyp., parallèles entre eux, le sol. *a i* est un prisme.

(945) **Déf.** La **hauteur du prisme** AI est la distance entre ses deux bases, ou (**889**) la perpendiculaire IP menée d'un point quelconque I de la base supérieure au plan (prolongé s'il le faut) AD de la base inférieure.

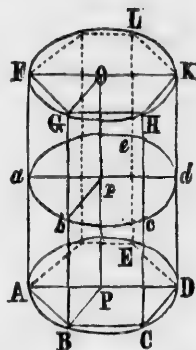
(946) **Déf.** Un **prisme** AI est **droit** quand un AF de ses côtés et par conséquent (**940** et **908**) tous les autres BG, CH, etc., sont perpendiculaires au plan générateur ou (**914**) aux plans des bases, et dans ce cas chacun de ces côtés est égal à la hauteur du prisme et chacune de ses faces est un rectangle. Dans tout autre cas, le **prisme est oblique,** et la hauteur IP moindre que le côté ID ou HC, etc.

(947) **Déf.** Un **prisme est triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale,** etc., suivant que sa base ou le plan générateur est un triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc.



(948) **Déf.** On nomme **parallélipipède** (pour abréger on écrira parallépipède) un prisme AD dont la base AF est un parallélogramme et dont toutes les faces sont par conséquent (**940**) des parallélogrammes. Le **parallépipède** est dit **rectangulaire** quand toutes ses faces sont des rectangles; et **les faces ou les plans composants du parallépipède rectangulaire sont tous perpendiculaires entre eux**; car AE étant, à cause des rectangles EC, EB, perpendiculaire à chacune des deux lignes AB, AC, est (**895**) perpendiculaire au plan AF de ces lignes; d'où il suit (**924**) que les plans EB, EC passant par cette perpendiculaire AE sont eux-mêmes perpendiculaires au plan AF; et on démontrerait de même la perpendicularité de tous les autres plans entre eux.

(949) **Déf.** Parmi les parallépipèdes rectangulaires, on distingue le **cube** ou **hexaèdre régulier,** terminé par six carrés égaux.



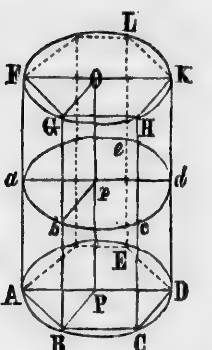
(950) **Déf.** Le **cylindre** AK est un solide qu'on peut concevoir engendré par le mouvement d'un cercle ACE parallèlement à lui-même le long d'une ligne AF ou BG, etc. perpendiculaire au plan de la base.

(951) **Sco. 1. Le cylindre n'est** donc **autre chose qu'un prisme droit** ayant pour **base** ou pour plan générateur un polygone régulier ABCD etc. d'un nombre indéfini de côtés, c.-à-d. (**430** et **665**) un cercle; pour **surface latérale ou convexe** un nombre de parallélogrammes AG, BH, etc. égal à celui des côtés du polygone et par conséquent (665) d'une largeur AB, BC, etc. indéfiniment petite, et pour **hauteur** une droite AF, BG, OP, etc. menée perpendiculairement d'un point quelconque d'une de ses bases au plan de l'autre base.

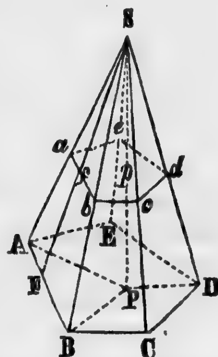
(952) **Sco. 2.** On peut encore concevoir le cylindre formé par la révolution d'un rectangle BPOG autour de la ligne immobile OP qu'on appelle **axe du cylindre.** Dans ce mouvement, les côtés PB, OG demeurant toujours perpendiculaires à OP, décrivent les cercles égaux ou bases ACE, FHL, le côté BG décrivant en même temps la surface convexe du cylindre.

(953) **Cor. Toute section** *a c e* **du cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe ou** (915) **parallèle à la base est** (943) **un cercle, et toute section** AFKD **par un plan passant par l'axe du cylindre, est un rectangle** AK **double du rectangle générateur** AO ou BO.

(954) **Sco. 3.** Les côtés ou arêtes AF, BG, etc. du prisme droit étant perpendiculaires au plan de la base, sont évidemment compris dans la surface convexe du cylindre; de là, le prisme et le cylindre se touchent le long de ces côtés et le **prisme** est dit **inscrit au cylindre** ou le **cylindre circonscrit au prisme.**



De même, si les polygones servant de bases au prisme étaient circonscrits aux cercles servant de bases au cylindre, et les angles correspondants reliés par des droites, il est clair qu'on aurait un **prisme circonscrit au cylindre** ou un **cylindre inscrit dans le prisme.**



(955) **Déf.** La **pyramide** ABCDE–S est un solide formé par plusieurs plans triangulaires procédant d'un même point S qui en est le **sommet** et terminés par les côtés d'un même polygone AD qui en est la **base**; l'ensemble des plans triangulaires composants étant ce qui constitue la **surface latérale ou convexe de la pyramide.**

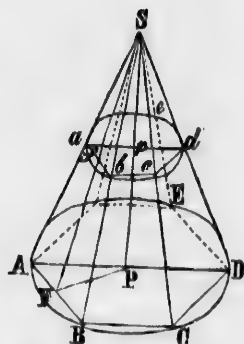
(956) **Déf.** Si de la pyramide AD–S on retranche la pyramide *a d*–S par un plan *a d* parallèle au plan AD de la base, on donne au solide qui reste AD–*d* le nom de **pyramide tronquée ou tronc de pyramide.**

(957) **Déf.** La **hauteur d'une pyramide** est la perpendiculaire SP abaissée du sommet S sur le plan AD de la base, prolongé s'il le faut.

(958) **Déf.** Une **pyramide**, comme un prisme, est **triangulaire, quadrangulaire**, etc., suivant que sa base est un triangle, un quadrilatère, etc.

(959) **Déf.** Une **pyramide** est **régulière** quand sa base est un polygone régulier et qu'en même temps la perpendiculaire tombant du sommet sur le plan de la base, passe par le centre (175) de la base. Cette perpendiculaire est appelée **axe de la pyramide.**

(960) **Déf.** La droite SF menée du sommet S d'une pyramide régulière, perpendiculaire à l'un quelconque AB des côtés du polygone AD qui en constitue la base, est **l'apothème** ou la **hauteur inclinée de la pyramide.**



(961) **Déf.** Le cône ACE–S n'est autre chose qu'une pyramide régulière ABCDE–S ayant pour **base** un cercle ACE ou (**430** et **655**) un polygone régulier ABCDE etc. d'un nombre indéfini de côtés et ces côtés en conséquence indéfiniment petits.

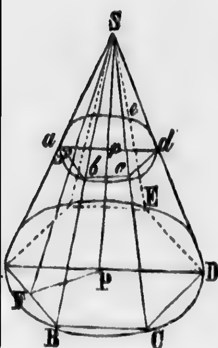
(962) **Sco. 1.** Quand le côté, l'arc ou l'unité (**430**) AB du périmètre de la base est indéfiniment petit, le rayon droit (**175**) FP du pol. devient égal (**667**) au rayon oblique (**555**, 2°) AP, et il est clair que la hauteur inclinée SF de la pyramide devient en même temps la **hauteur inclinée ou apothème** SA **du cône,** dont on peut en conséquence regarder la **surface latérale ou convexe** comme composée d'un nombre de triangles égal à celui des côtés du polygone qui lui sert de base et ayant chacun pour hauteur la hauteur inclinée SA ou le côté du cône et pour bases les côtés indéfiniment petits du polygone.

(963) **Sco. 2.** On peut encore concevoir le cône engendré par la révolution d'un triangle rectangle APS autour du côté immobile SP qu'on nomme **axe du cône.** Dans ce mouvement, le côté AP décrit le cercle ACE, base du cône, et l'hypoténuse AS en décrit la surface latérale.

(964) **Déf.** Comme pour la pyramide, S est le **sommet du cône** et la perpendiculaire SP en est la **hauteur.**

(965) **Déf.** Si du cône ACE–S on retranche le cône *a c e–s* par un plan *b e* parallèle à celui BE de la base, on donne au solide BE–*e b* qui reste le nom de **cône tronqué** ou **tronc du cône.**

(966) **Sco.** On peut le concevoir engendré par la révolution d'un trapèze rectangulaire AP *p a* autour de **l'axe** P*p* qui est en même temps la **hauteur du tronc**; les cercles ACE, *a c e* étant ses **bases** et A*a* ou (**962**) SA—S*a*, son côté ou sa **hauteur inclinée.**



(967) **Cor.** Il suit de ces définitions que **toute section d'un cône ou d'un cône tronqué par un plan** *b e* **perpendiculaire à l'axe,** c.-à-d. (**915**) parallèle à la base ou aux bases, **est un cercle,** car, pendant que le triangle rectangle APS tourne autour de PS, la ligne *a p* perpendiculaire à PS, décrit un cercle, et ce cercle n'est autre chose que la section faite par un plan *b e* perpendiculaire à l'axe au point *p*. **Toute section passant par l'axe** PS ou P *p*, est **un triangle isocèle** ASD **double du triangle générateur** APS **ou un trapèze** AD *d a* **double du trapèze décrivant** AP *p a*.

(968) **Sco.** Il est clair, comme pour le prisme et cylindre (**954**) que les côtés AS, BS, etc. de la pyramide sont dans la surface latérale du cône, la **pyramide** étant **inscrite dans le cône,** ou le **cône inscrit à la pyramide** ; et si le polygone servant de base à la pyramide était circonscrit au cercle servant de base au cône, la **pyramide** serait **circonscrite au cône** ou le **cône inscrit dans la pyramide.**

2° De même, pour le tronc de cône, les côtés A *a*, B *b* du tronc de pyramide sont dans la surface latérale du premier et le **tronc de pyramide** peut être regardé comme **inscrit au tronc de cône** ou le **tronc de cône circonscrit au tronc de pyramide,** et si les bases polygones du tronc de pyramide étaient circonscrites aux cercles servant de bases au tronc de cône, on aurait un **tronc de pyramide circonscrit au tronc de cône** ou **tronc de cône inscrit au tronc de pyramide.** Il est donc clair que **le tronc de cône n'est autre chose qu'un tronc de pyramide régulière ayant pour bases parallèles des cercles** (967).

(969) **Déf.** Deux **cylindres** ou deux **cônes** sont dits **semblables,** quand leurs axes sont entre eux comme les diamètres de leurs bases.

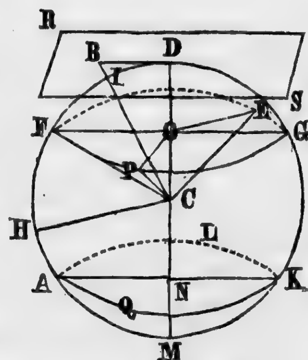
(970) **Déf.** Deux **prismes droits** ou **pyramides régulières** sont **semblables** quand leurs bases sont des polygones semblables et leurs hauteurs respectivement proportionelles aux côtés homologues de ces bases.

(971) **Déf.** Deux **prismes** ou **pyramides quelconques** sont **semblables** quand leurs bases sont des polygones semblables, leurs hauteurs proportionnelles aux côtés homologues des bases et les inclinaisons des divers plans composants égales dans chaque figure ; ou, en général :

(972) **Déf.** Deux **polyèdres** sont **semblables** lorsqu'il sont contenus par un même nombre de plans semblables, disposés de la même manière et ayant en conséquence entre eux (**PROP. XIII, LIVRE II.**) des inclinaisons égales, à cause des angles plans correspondants des faces ou plans semblables de ces polyèdres.

(973) **Déf.** La **diagonale d'un polyèdre** est une droite reliant les sommets de deux angles solides non adjacents.

(974) **Déf.** La **sphère** est un solide terminé par une surface courbe dont tous les points sont également éloignés d'un point intérieur appelé **centre**.



On peut la concevoir engendrée par la révolution d'un demi-cercle DAM autour de son diamètre DM ; car la surface décrite dans ce mouvement par la courbe DAM aura tous ses points H, F, etc. également éloignés du centre C.

(975) **Déf.** Le solide décrit dans le même mouvement par le secteur (**192**) DCF ou FCH, etc. est appelé **secteur sphérique**. Celui que décrit le demi-segment (**191**) FOD ou AND et la demi-zone (**202**) ANOF est la **calotte sphérique** FDG, ADK et le **segment sphérique** AG, et la surface décrite par la circonférence AF, AD ou FD est la **zone sphérique** AG, ADK ou FDG.



(976) **Déf.** Le **rayon d'une sphère** est une droite CD, CF, etc. menée du centre à un point quelconque D, F, de la surface ; le **diamètre ou axe** DM est une ligne passant par le centre et terminée de part et d'autre par la surface.

Tous les rayons d'une sphère sont égaux, et tous les diamètres égaux, étant chacun double du rayon.

(977) **Déf.** Un **plan** RS est **tangent à une sphère** quand leurs surfaces respectives n'ont qu'un seul point commun D ; ce qui a lieu quand le plan est perpendiculaire à un rayon CD de la sphère à l'extrémité D de ce rayon, car (**882**) CD perpendiculaire au plan RS est perpendiculaire à toute ligne DB qu'il rencontre dans ce plan et tout autre point B du plan touchant, RS, donne CB, hypoténuse du triangle rectangle CDB, >CD, côté de ce dernier ; et par conséquent >CI et hors de la sphère.

Il est de même évident (**476**. 2) que deux sphères n'ont qu'un point commun et par conséquent se touchent, quand la distance entre leurs centres est égale à la somme ou différence de leurs rayons.

(978) **Sco. 1.** Le segment sphérique (**975**) est donc une partie de la sphère solide comprise entre deux plans parallèles et, de même, la zone (**975**) sphérique est une partie de la surface de la sphère comprise entre deux plans parallèles ; car les demi-cordes génératrices FO, AN sont (**410**) perpendiculaires au diamètre ou à l'axe DM, et par suite (**882**) les plans FPE, AQL sont perpendiculaires à ce même diamètre et en conséquence (**915**) parallèles l'un à l'autre.

(979) **Sco. 2.** Les plans parallèles qui terminent les segment et zone qu'on vient de définir en sont les **bases** et quand la corde génératrice FO devient la tangente BD, et le plan PE, le plan RS, le segment et la zone n'ont dans ce cas qu'une seule base.

(980) **Déf.** **La hauteur d'une zone** ou **d'un segment** est la distance (**889**) entre les deux plans parallèles qui en forment les bases.

(981) **Cor. 1.** Il suit du mouvement générateur (974) d'une sphère que **toute section d'une sphère par un plan est un cercle**; car, il est clair qu'on peut supposer l'axe DM dans une direction quelconque dans la sphère et la demi-corde génératrice FO ou AN en un point quelconque de cet axe; or la demi-corde perpendiculaire à l'axe dans toute sa révolution autour de ce dernier, engendre un plan (882) FPE, AQL et le point F, A, extrémité du rayon FO, AN, décrit dans ce plan la circonférence FPE, AQL.

(982) **D'ailleurs,** soit PE une section faite par un plan dans une sphère dont C est le centre. Du point C ayant mené (902) CO perpendiculaire à ce plan et les rayons CP, CE, CF, etc. à divers points de la courbe qui termine cette section; les lignes obliques CP, CE, etc. sont égales, étant rayons de la sphère; elles sont donc (902) également éloignées de la perpendiculaire CO; donc les droites OP, OE, O etc., sont égales et la section PE est un cercle dont le centre est O.

(983) **Cor. 2.** Un **grand cercle** est une section qui passe par le centre de la sphère et son rayon étant égal à celui de la sphère, il suit que **tous les grands cercles sont égaux.**

(984) **Cor. 3.** Deux grands cercles se bissectent toujours mutuellement, car leur commune intersection passe par le centre et est en conséquence (976) un diamètre.

(985) **Cor. 4.** Il est clair que **tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales**; car si on séparait les deux hémisphères pour les placer ensuite sur la base commune avec leurs convexités tournées dans le même sens, les deux surfaces coïncideraient entièrement, nul point de l'une étant plus près du centre qu'un point quelconque de l'autre.

(986) **Cor. 5.** Un **petit cercle** de la sphère est une section qui ne passe pas par le centre; et il suit de la démonstration du par. (981) ou (982) que **le centre d'un petit cercle et**

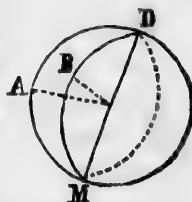
celui de la sphère sont dans une même ligne perpendiculaire au plan du petit cercle.

(987) **Cor. 6. Les petits cercles sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du centre de la sphère**; car, plus CO est grand, plus la corde FG, diamètre du petit cercle FPE, est petite (**461**).

(988) **Cor. 7. On peut toujours faire passer un arc de grand cercle par deux points quelconques de la surface de la sphère**; car ces deux points, avec le centre de la sphère, font trois points qui déterminent (**892**) la position d'un plan; mais si les deux points donnés étaient à l'extrémité d'un diamètre, ces deux points et le centre seraient alors dans une seule et même ligne droite, et cette ligne pourrait servir de commune intersection à un nombre indéfini de grands cercles.

(989) **Déf. La lune sphérique** DAMBD est cette partie de la surface d'une sphère qui est comprise entre deux demi-grands cercles se rencontrant en un diamètre commun et **sert de base à**

(990) **Déf. L'onglet sphérique** DAMBD qui est cette partie de la sphère solide comprise entre les mêmes demi-grands cercles.

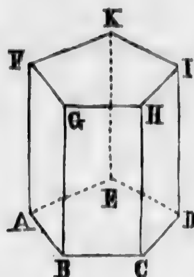


(991) **Rem.** Le cylindre, le cône et la sphère sont les **trois corps ronds** dont traitent les éléments de la géométrie.

PROPOSITION I. THÉORÈME.

(992) **La surface convexe ou latérale** AG+BH+etc. (940) **d'un prisme droit** AI **est égale au périmètre** AB+BC+etc. **de sa base** AD **ou** FI **multiplié par sa hauteur**

AF; c.-à-d. qu'on aura la surface du prisme=(AB+BC+CD+etc)×AF.



Car, les hauteurs AF, BG, etc. des faces composantes sont toutes égales à la hauteur AF du prisme et toutes ces faces sont (**946**) des rectangles; d'où il suit que AB×AF+BC×BG+CD×CH+etc=(AB+BC+CD+etc)×AF. Ajoutant à cette surface latérale, la double surface de la base AD, on aura la surface totale du prisme.

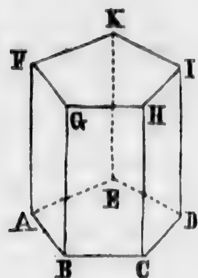
Rem. Il est à peine nécessaire de dire que **la surface du cube (949) est sextuple de celle d'une de ses faces.**

(**993**) **Cor. 1.** On a vu que (**951**) le cylindre n'est autre chose qu'un prisme droit ayant pour base un polygone d'un nombre indéfini de côtés, c.-à-d. (**665**) un cercle; donc, la **surface latérale d'un cylindre est égale au périmètre ou à la circonférence de sa base multipliée par sa hauteur;** et si à cette surface on ajoute celles de ses bases parallèles, on aura la surface totale du cylindre.

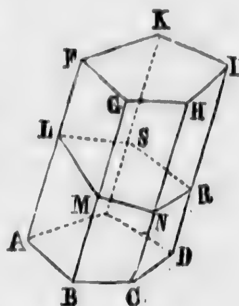
(**994**) **Cor. 2. Si deux prismes droits ou deux cylindres ont même hauteur, leurs surfaces convexes seront entre elles comme les périmètres ou circonférences de leurs bases,** et réciproquement **si les périmètres ou circonférences des bases sont égales, les surfaces seront entre elles comme les hauteurs.**

(**995**) **Cor. 3. Les surfaces latérales de deux prismes droits quelconques ou de deux cylindres, sont entre elles comme les périmètres de leurs bases multipliés par leurs hauteurs respectives,** c.-à-d. **comme les produits de ces périmètres et hauteurs.**

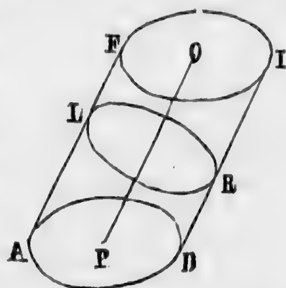
(**996**) **Sco. 1. La surface latérale d'un prisme quelconque AI est égale au produit de son côté AF par le périmètre d'une section** LMNRS **faite par un plan** LR



perpendiculaire à l'un des, et par conséquent (908) à tous les côtés du prisme.



Car, LM, ligne dans le plan LR, est perpendiculaire (**882**) à AF et égale par conséquent (**180**) à la hauteur ou largeur du parallélogramme AG ; on a de même MN perpendiculaire à BG, hauteur du parallélogramme BH, NR largeur du parallélogr. CI et ainsi de suite, et puisque AF=BG=CH=etc., il est clair que la surface latérale du prisme=(LM+MN+NR+etc.)×AF.



(**997**) **Sco. 2.** S'il s'agissait d'un **cylindre oblique,** c.-à-d. d'une **partie de cylindre comprise entre deux plans parallèles** AD, FI **non perpendiculaires à l'axe** OP, il est clair que comme dans le cas du prisme oblique (**996**) on en obtiendrait la surface latérale en multipliant la longueur de son côté AF ou sa hauteur inclinée par le périmètre ou la circonférence d'une section LR perpendiculaire au côte ou à l'axe, cette section étant par la déf. (**950**) du cylindre, un cercle.

Rem. La méthode du par. (**437**) servira à trouver au besoin les surfaces AD, FI, des bases parallèles.

(**998**) **Sco. 3.** Et **si la section** LR **n'était pas un cercle ;** c.-à-d., si le solide AI ne formait pas partie d'un cylindre régulier, mais avait au contraire pour bases parallèles des figures curvilignes ou mixtilignes semblables quelconques et pour coupe perpendiculaire LR une figure analogue à celles des bases ; il est évident qu'on en obtiendrait tout de même la surface latérale en faisant le produit de son côté AF par

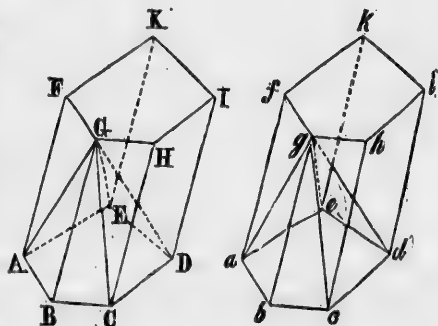
le périmètre de la section LR faite par un plan perpendiculaire à ce côté, le solide dont il s'agit n'étant autre chose qu'un prisme.

On aurait encore la surface totale du solide en ajoutant à sa surface latérale, la double surface d'une de ses bases que l'on obtiendrait par le procédé du par. (437).

(999) Cor. 4. Les surfaces latérales de deux prismes quelconques ou de deux cylindres obliques quelconques soit réguliers (997) ou irréguliers (998) sont entre elles comme les produits des côtés ou hauteurs inclinées de ces solides par les périmètres des sections faites dans ces corps par des plans perpendiculaires aux dits côtés.

PROP. II. THÉOR.

(1000) Si les trois plans *bf*, *bh*, *ad* **qui constituent un des angles solides** *b* **d'un prisme** *ai* **sont respectivement égaux aux trois,** BF, BH, AD **qui forment l'angle solide** B **d'un autre prisme** AI, **et sont situés d'une manière correspondante dans chaque figure ; les deux prismes seront égaux l'un à l'autre.**



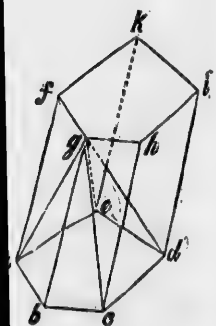
Car, ayant superposé la base *ad* à son égale AD, ces deux bases coïncideront ; mais les trois angles plans *abg*, *cbg*, *abc* qui forment l'angle solide *b* sont égaux aux trois ABG, CBG, ABC qui forment l'angle solide B, et ils sont disposés de la même manière; donc (935) les angles solides *b* et B sont égaux ; donc le côté *bg* tombera sur son égal BG. Il est de plus évident, à cause des

parallélogrammes égaux bf, BF, bh, BH, que le côté gf tombera sur GF et gh sur GH; donc (893) le plan fi de la base supérieure coïncidera avec le plan FI de la base inférieure. Maintenant les deux bases supérieures étant, par la déf. du prisme, égales à leurs bases inférieures, sont égales entre elles ; donc hi coïncidera avec HI, ik avec IK, etc. ; donc les faces latérales des deux prismes coïncideront, et les deux prismes coïncideront en entier et seront en conséquence (**85 Ax.**) égaux.

(1001) **Cor. 1. Si les trois plans** abg, cbg, ad **qui constituent un des angles solides** b **d'une pyramide** $abcde$–g **sont respectivement égaux aux trois** ABG, CBG, AD **qui contiennent l'angle solide** B **d'une autre pyramide** ABCDE–G, **et sont situés d'une manière correspondante dans chaque figure ; les deux pyramides seront égales l'une à l'autre.**

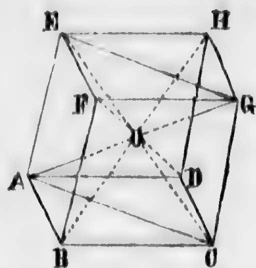
Car, par la démonstr. du théor., on aura l'angle solide b=B et comme le sommet g tombera en G, les deux pyramides coïncideront entièrement et seront (**85 Ax.**) égales.

(1002) **Cor. 2. Deux prismes droits ayant leurs bases et hauteurs respectivement égales, sont égaux.** Car, le côté ab étant=AB et la hauteur bg=BG, le rectangle bf sera=BF; de même, on aura le rectangle bh=BH; et de cette manière les trois plans qui forment l'angle solide b seront égaux aux trois qui forment l'angle solide B. De là, les deux prismes sont égaux.



PROP. III. THÉOR.

(1003) **Les faces opposées** AH, BG **de tout parallépipède** AG **sont égales et parallèles.**

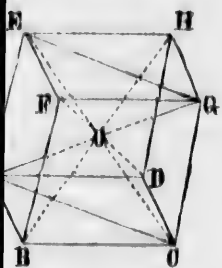


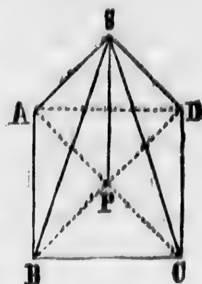
Par la déf. de ce solide (948), les bases BD, FH sont des parallélogrammes égaux et les côtés en sont parallèles. Il reste donc à démontrer qu'il en est ainsi des faces latérales opposées AH, BG et AF, DG. Or, AD étant égal et parallèle à BC et AE à BF, on a (918) l'angle CBF égal à l'angle DAE et le plan CF parallèle au plan DE ; donc le parallélogramme BG est égal et parallèle au parallélogr. AH ; et on démontrerait tout de même l'égalité et le parallélisme des faces opposées AF, DG.

(1004) **Sco. 1.** Puisque le parallépipède est un solide borné par six plans, dont ceux qui sont opposés entre eux sont égaux et parallèles, il suit qu'on peut prendre pour bases du parallépipède, l'une quelconque de ses faces avec celle qui lui est opposée.

(1005) **Cor. Les diagonales d'un parallépipède se bissectent mutuellement.** Car, soient menées les diagonales AG, EC reliant les sommets opposés A, G, E, C. Puisque AE est égale et parallèle (911) à CG, la figure AEGC est un parallélogramme ; donc les diagonales AG, EC se bissectent (283) mutuellement. On démontrerait ainsi que les diagonales EC, DF se bissectent ; donc les quatre diagonales se bissectent mutuellement en un même point qu'on peut regarder comme centre du parallépipède.

(1006) **Sco. 2.** L'intersection O des diagonales est évidemment le sommet de six pyramides ayant pour bases les six faces du parallépipède et si le parallépipède était un cube il est clair (311) que ses quatre diagonales seraient égales, et les six pyramides seraient égales et régulières, ayant pour bases des carrés égaux et pour côtés ou arêtes les demi-





diagonales égales (**1005**) du solide ; car, soit ABCD-S une de ces pyramides, les plans composants ABS, CBS, ABCD d'un des angles solides B de cette pyramide sont égaux aux plans composants homologues de l'angle solide correspondant de toutes les autres, les bases étant toutes des carrés égaux, comme il a été dit, et les faces latérales des triangles isocèles égaux, à cause de AB=BC et de AS=BS=CS. De plus, ayant mené SP perpendiculaire au plan de la base, le pied P de la perpendiculaire sera (**Dém.** de **901**) à cause de AS=BS=etc, également éloigné des points angulaires A, B, C, D du pol. rég. ABCD et la pyramide sera en conséquence régulière par la déf. (**959**) et aura pour hauteur la demi-hauteur SP du cube.

(**1007**) **Sco. 3.** Si on a trois lignes droites AB, AE, AD, passant par un même point A, et faisant l'une avec l'autre des angles donnés, on peut former sur ces lignes un parallépipède. A cet effet, on mènera par l'extrémité de chaque ligne un plan parallèle au plan des deux autres lignes ; savoir : par le point B, un plan parallèle à DAE, par le point D, un plan parallèle à BAE et par le point E, un plan parallèle à BAD. Les intersections mutuelles de ces plans formeront le parallépipède demandé.

PROP. IV. THÉOR.

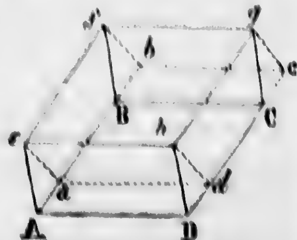
(**1008**) **Tout parallépipède AG est réduisible, c.-à-d. équivalent ou égal en solidité à un parallépipède rectangulaire de même hauteur et de base équivalente.**



Tous les plans composants d'un parallépipède rectangulaire étant (**948**) perpendiculaires entre eux, il est à démontrer que le parallépipède oblique est réduisible à un parallépipède rectangulaire de même base et de hauteur équivalente.

A cet effet, ayant mené par les droites parallèles AB, DC les plans A *f*, D *g* perpendiculaires au plan AC de la base et en conséquence évidemment parallèles entre eux, le nouveau solide A *g* sera (**944** 3°) un parallépipède et on aura (**912** ou **948**) *e f*, *h g* respectivement parallèles à AB, DC et par conséquent (**911**) parallèles à EF, HG ; on aura de même (**912**) A *e* parallèle et égale à D *h* et comme AE est aussi parallèle et égale à DH, les deux triangles EA *e*, HD *h* seront (**151** et **237**) égaux, et donneront E *e* = H *h*; les parallélogrammes E *f*, H *g* seront donc égaux, et comme les parallélogrs. EB, HC sont aussi égaux (**1003**) et les triangles EA *e*, HD *h* égaux, les deux prismes triangulaires EB *f*, HC *g* seront (**1000**) égaux et les parallépipèdes AG, A *g* en conséquence égaux l'un à l'autre; les faces composantes A *f*, D *g* étant en même temps, perpendiculaires, par constr. au plan AC de la base.

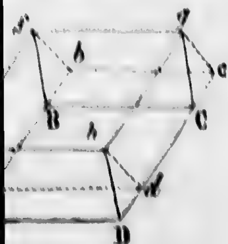
Maintenant, Si les autres faces du parallépipède A *g* étaient toutes perpendiculaires entre elles, le parallépipède serait rectangulaire; mais si elles ne l'étaient pas, on procéderait comme on vient de le faire, à la réduction du parallépipède A *g* en un parallépipède équivalent *a g*, en lui retranchant d'un côté le prisme triangulaire A *d e* pour lui ajouter de l'autre le prisme triangulaire égal B *e f*.



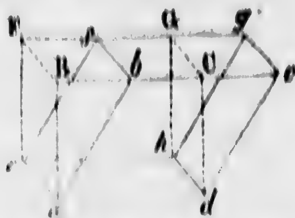


parallèles AB, DC
lan AC de la base
èles entre eux, le
llépipède et on aura
allèles à AB, DC et
: on aura de même
omme AE est aussi
s EA e, HD h seront
: les parallélogram-
ne les parallélogrs.
riangles EA e, HD h
EB f, HC g seront
A g en conséquence
ntes A f, D g étant
constr. au plan AC

parallépipède A g
es, le parallépipède
ent pas, on procède-



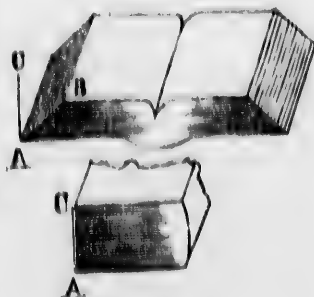
Enfin si les bases parallèles *a e*, *e g* n'étaient pas des rectangles ou ce qui (**948**) revient au même, si les deux dernières faces *a f*, *d g* n'étaient pas perpendiculaires aux faces parallèles *a h*, *b g*, on réduirait encore le solide *a g* en un parallépipède équivalent *a* G, en lui retranchant d'un côté le prisme triangulaire *d e* G pour le remplacer du côté opposé par le prisme triangulaire égal *a b* F ; ce qui se ferait en menant par les droites *a e*, *d h* les plans *a* F, *d* G perpendiculaires au plan *a h* ou *b g*.



(**1009**) **Autrement.** On peut encore concevoir le parallépipède oblique AB réduit en un paralépipède rectangulaire, en se rappelant ce qui a été dit au par. (**119**) ; c.-à-d., en le supposant composé d'une série de surfaces ou de tranches infiniment minces superposées les unes aux autres et en faisant glisser (*) ces tranches l'une sur l'autre parallèlement à elles-mêmes jusqu'à ce qu'elles rencontrent une droite OP perpendiculaire



(*) L'étudiant se fera une excellente idée de ce mouvement de tranches minces l'une sur l'autre en considérant les feuilles superposées d'un livre ouvert AB que l'action de fermer le livre fera glisser sur elles-mêmes jusqu'à ce que la face oblique AB devienne la face perpendiculaire AC.

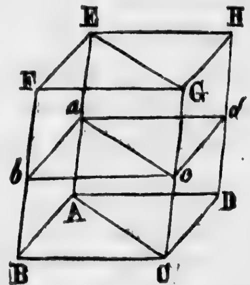


au plan AE ou PE de la base. Il est clair que de cette manière le parallépipède oblique AB deviendra le parallépipède droit AC, et si les bases parallèles PD, OF de ce dernier n'étaient pas des rectangles, on répéterait l'opération en prenant pour base une des faces rectangulaires AO ou AF du solide et en supposant encore le sol. composé de tranches parallèles à cette base.

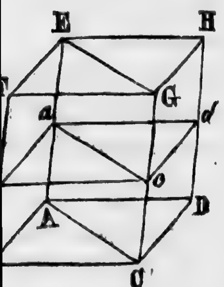
(1010) Cor. **Deux parallépipèdes ayant une base commune ou des bases égales ou équivalentes situées dans un même plan et leurs bases opposées** (parallèles) **aussi situées dans un même plan, c'est-à-dire,** (888) **ayant même hauteur, sont équivalents.**

PROP. V. THÉOR.

(1011) **Tout prisme tringulaire** ABC–EFG **est moitié d'un parallépipède correspondant** BH, c.-à-d. d'un parallépipède décrit avec le même angle solide B et les mêmes côtés BA, BC, BF (1007).

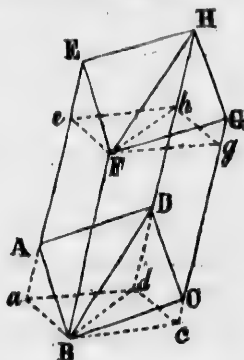


Les côtés AE, CG tous deux parallèles (948) à DH, sont en conséquence (911) parallèles entre eux et le plan EC de ces parallèles divise le parallépipède BH en deux prismes triangulaires équivalents ACF, ACH ; car AC, EG, diagonales des parallélogrammes BD, FH, partagent (270 et 281) ces bases égales (1003) en triangles égaux ABC, ACD, EGF, EGH ; de plus, les faces opposées BG, AH sont égales et les faces AF, DG aussi égales ; donc les plans qui contiennent les angles solides B, H des deux prismes sont respectivement égaux, et les angles plans correspondants de ces angles solides sont en conséquence égaux, savoir : ABC à GHE, ABF à GHD et CBF à EHD ; mais les plans composants



des deux angles solides sont situés dans un ordre inverse dans les deux prismes et ces angles ne peuvent en conséquence être superposés l'un à l'autre, mais n'en sont pas moins égaux par symétrie (**936**) ; on prouverait de même l'égalité des angles solides D, F ainsi que de ceux en C, E, et en A, G ; les deux solides sont donc sous tous les rapports symétriques et équivalents l'un à l'autre, et par conséquent équivalents chacun à la moitié du parallépipède correspondant BH.

(**1012**) **D'ailleurs**, regardant le parallépipède comme composé de tranches infiniment minces ou (**119**) de surfaces superposées ; il est clair que le plan coupant AG intersectera chacune de ces surfaces BD, *b d*, FH, etc. dans sa diagonale respective AC, *a c*, EG, etc., partageant ainsi toutes les surfaces ou tranches composantes en deux parties égales ABC, ADC, *a b c*, *a d c*, EFG, EHG, etc. et par suite le parallépipède lui-même aussi en deux parties égales.

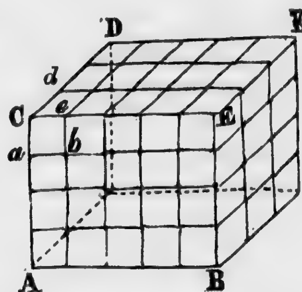


(**1013**) **Autrement** encore, ayant fait passer par les sommets B, F, les plans *a c*, *e g* perpendiculaires au côté BF et par conséquent (**915**) parallèles entre eux, le solide B *h* sera (**944**. 3°) un parallépipède droit (**946**) équivalent à BH ; car on aura (**912**) *a* B, *a d* respectivement parallèles et égales à *e* F, *e h*, ce qui donnera *a e*=BF=AE et par conséquent *a* A=*e* E ; on aura aussi *d h*=BF=DH et par suite *d* D=*h* H et comme AD=EH et *a d*=*e h*, les plans composants *a* BA, ABD, A *d*, *e* FE, EFH, E *h* des angles solides correspondants A, E des deux pyramides A *d*–B, E *h*–F seront respectivement égaux et disposés dans le même ordre ; ces pyramides seront donc (**1001**) égales et le demi-parallépipède B *d e*=BDE ; on prouverait de même l'égalité (de volume) des demi-parallépipèdes B *d g*, BDG ;

mais les demi-parallépipèdes droits B *d e*, B *d g* sont égaux (**1002**) leurs bases B *d a*, B *d c* étant égales (**270**) et leurs hauteurs aussi égales ; donc (**68 Ax.**) les deux prismes triangulaires composants du parallépipède BH soit égaux.

PROP. VI. THÉOR.

(**1014**) **La solidité** (**120**) ou le volume **d'un parallépipède rectangulaire** AF **est égale au produit de sa base** DE **par sa hauteur** AC.



Pour comprendre la nature de ce mesurement, il est nécessaire de se rappeler (**333**) que le nombre d'unités linéaires C*e* dans une dimension CE de la base, multiplié par le nombre d'unités linéaires C*d* dans l'autre dimension CD de la base, donnera le nombre d'unités de surface dans la base DE du parallépipède. Pour chaque unité en hauteur C*a*, il est clair qu'il y aura autant d'unités solides ou cubiques (**24**) *d b* que d'unités de surface dans la base ; d'où il suit que le nombre d'unités superficielles dans la base multiplié par le nombre d'unités linéaires dans la hauteur, donne le nombre d'unités de volume dans le parallépipède.

2° **En d'autres termes**, la solidité du parallépipède rectangulaire est égale au produit continu (**41**) de ses trois dimensions EC, DC, AC.

(**1015**) **Sco. 1**. Cette mesure du parallépipède n'est absolue qu'autant que l'on suppose à l'unité de mesure *d b* ou à sa racine (**40**) *a b* certaine valeur définie comme celle d'un mètre, pied, pouce, ligne, etc. (**334**) ; dans ce cas l'unité de volume *d b* vaudra un mètre, pied, pouce, ligne, etc. cubique

et le produit EC×DC×AC donnera évidemment le nombre de mètres, pieds, pouces, lignes, etc., cubiques contenus dans le parallépipipède, c.-à-d. la solidité ou le volume du corps dont il s'agit.

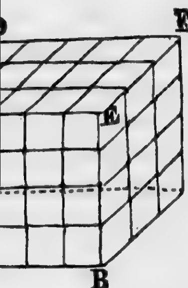
(1016) Sco. 2. Si l'on ne suppose pas à l'unité de mesure une valeur définie, le produit de la multiplication ne signifiera rien par lui même, puisque, etc. par. **(335)**.

(1017) Sco. 3. Si les trois dimensions d'un autre parallépipède sont divisées en unités linéaires égales à celle du solide dont il s'agit et multipliées ensemble la même manière, les deux produits seront entre eux **(336)** comme les solides et serviront à exprimer leur volume, étendue, grandeur ou solidité relative.

(1018) Sco. 4. Le cube, ayant toutes ses dimensions égales, si le côté est 1, la solidite sera 1×1×1=1 : si le côté est 2, la solidité sera 2×2×2=8 : si le côté est 3, la solidité sera 3×3×3=27 et ainsi de suite ; de là, si les côtés d'une série de cubes sont entre eux comme les nombres 1, 2, 3, etc. les cubes eux-mêmes ou leurs solidités ou volumes seront entre eux comme les nombres 1, 8, 27, etc. C'est de là qu'en arithmétique, le cube d'un nombre est le nom qu'on donne à un produit résultant de trois facteurs **(23)** chacun égal à ce nombre.

(1019) Sco. 5. S'il s'agissait de trouver un cube qui fût double d'un cube donné, le côté du cube requis devrait être à celui du cube donné comme la racine cubique de 2 est à l'unité. Il est facile par construction géométrique de trouver la racine carrée de 2 **(310)** ; mais on ne peut de même en trouver la racine cubique, au moins on ne peut le faire par les opérations de la géométrie élémentaire, qui consistent à n'employer que des lignes droites dans les quelles on connaît deux points, et des cercles dont les rayons et les centres sont déterminés.

Par suite de cette difficulté, le problème de la **duplication du cube** devint fameux parmi les anciens géomètres, ainsi



que celui de la **trisection d'un angle** (note, page 330) qui est à peu près de la même nature. On a cependant depuis longtemps découvert les solutions dont ces problèmes sont susceptibles, et quoique moins simples que les constructions de la géométrie élémentaire, elles n'en sont pas pour cela moins rigoureuses ou moins satisfaisantes.

(1020) Cor. 1. **La solidité d'un parallépipède et généralement d'un prisme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.**

Car, **en premier lieu,** tout parallépipède est (**1008**) équivalent à un parallépipède rectangulaire ayant la même hauteur et une base équivalente. Or la solidité de ce dernier est, par la prop., égale à sa base multipliée par sa hauteur; de là, la solidité du premier est de même égale au produit de sa base par sa hauteur.

(**1021**) **En second lieu,** tout prisme triangulaire est (**1011**) moitié du parallépipède de même hauteur et de base double de celle du prisme; mais la solidité du parallépipède est (**1020**) égale à sa base multipliée par sa hauteur; de là, celle du prisme triangulaire est aussi égale au produit de sa base, qui est moitié de celle du parallépipède, par sa hauteur.

(**1022**) **En troisième lieu,** il est clair (**207 et 894**) que tout prisme peut se diviser en autant de prismes triangulaires de même hauteur qu'on peut former de triangles dans le polygone qui lui sert de base. Mais la solidité de chaque prisme triangulaire est (**1021**) égale au produit de sa base par sa hauteur; et cette hauteur étant la même pour tous les prismes composants, il suit que la somme de tous les prismes partiels doit être égale à celle de tous les triangles composants de la base, multipliée par la hauteur commune.

Donc la solidité d'un prisme polygone quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

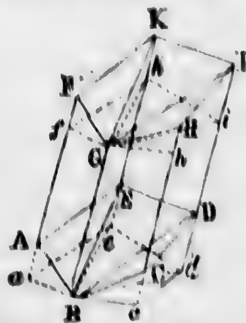
(**1023**) Cor. 2. **La solidité du cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur**; car, on a vu (**951**) que

le cylindre n'est autre chose qu'un prisme droit ayant pour base un cercle et pour hauteur le côté du cylindre ou la perpendiculaire menée entre ses bases parallèles.

(**1024**) **Sco. 6.** Soit AB ou R le rayon de la base du cylindre, H sa hauteur ; la surface de la base sera $\pi.R^2$ ou $\pi\ AB^2$; car, si l'on représente (**671**) par π la circonférence du cercle dont le diamètre est 1, alors, parce que les circonférences sont entre elles (**559**) comme les rayons ou diamètres, on aura le diamètre 1 à sa circonférence π comme le diamètre 2AB est à la circonférence dont le rayon est AB, c.-à-d. $1 : \pi :: 2AB :$ circ. AB ; donc circ. AB $= \pi \times 2AB$. Multipliant de part et d'autre par $\frac{1}{2}AB$, on a $\frac{1}{2}AB \times$ circ. $AB = \pi \times AB^2$ ou surface $AB = \pi \times AB^2$: de là, **la surface du cercle est égale au produit du carré du rayon par le nombre constant** π (**3. 14159** etc.) **qui représente** la circonférence dont le diamètre est 1 ou **le rapport de la circonférence au diamètre.**

On aura donc pour base du cylindre l'expression $\pi \times R^2$, $\pi.R^2$ ou (**30**) $\pi\ R^2$ et pour sa solidité, $\pi.R^2 \times H$ ou $\pi R^2 H$.

(**1025**) **Sco. 7. La solidité du prisme** AI **est encore égale au produit de sa hauteur inclinée ou côté** AF ou BG ou etc. **par la surface d'une section** *a d* ou *f i* **perpendiculaire à ce côté.**



En effet, ayant mené par les points B, G, les plans *a d*, *f i*, tous deux perpendiculaires à BG, le nouveau solide *a i* sera (**944**, 3°) un prisme droit (**946**), et ce prisme *a i* sera équivalent à AI ; car les points B, G servent chacun de sommet à autant de pyramides que le prisme a de faces latérales, moins deux, et ces pyramides sont respectivement égales deux à deux (**Dém.** du par. **1013**) savoir : *a* E-B à *f* K-G, *e* D-B à *k* I-G et *d* C-B à *i* H-G (et ainsi de suite

si les bases AD, FI des prismes étaient des polygones d'un plus grand nombre de côtés); donc le solide *f* K *i* G qu'on retranche du prisme AI d'une part est égal en tout au solide *a* E *d* B qu'on lui ajoute d'autre part, étant composé d'un même nombre de pyramides égales disposées de la même manière dans chaque solide; donc le prisme *a i* est équivalent au prisme AI; or le prisme droit *a i* a pour mesure sa base *a d* multipliée par sa hauteur perpendiculaire BG; donc aussi le prisme oblique AI qui est équivalent à *a i* a pour mesure sa hauteur inclinée ou son côté BG multiplié par la surface d'une section *a d* ou *f i* perpendiculaire à ce côté.

(1026) Sco. 8. **Le cylindre oblique** (997) n'étant autre chose (951) qu'un prisme à base curviligne, **on aura** (1020) **sa solidité en faisant le produit de sa base par sa hauteur ou** (1025) **le produit de son côté par la surface d'une section perpendiculaire à ce côté**; cette section étant, par la déf. du cylindre, un cercle.

(1027) Sco. 9. Et si le solide était celui du par. (998) on en obtiendrait tout de même la solidité par la méthode du dernier par., ce solide n'étant encore autre chose qu'un prisme.

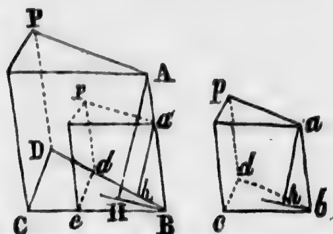
(1028) Cor. 3. **Comparant deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme avec un cylindre, droits ou obliques et de même hauteur; les produits des bases par les hauteurs ou les produits des côtés par des sections perpendiculaires à ces côtés, sont entre eux comme ces bases ou sections, et si les bases ou sections sont égales, les prismes et cylindres seront entre eux comme leurs hauteurs; et si les bases ni les hauteurs ne sont égales, les solidités de ces corps seront entre elles comme les produits de ces bases ou sections par les hauteurs ou côtés de ces solides.**

(1029) Cor. 4. **Les prismes et cylindres droits et obliques dont les bases et hauteurs ou sections perpendiculaires et côtés sont réciproquement proportionnels, sont**

équivalents, et s'ils sont équivalents, leurs bases et hauteurs ou côtés et sections sont réciproquement proportionnels.

PROP. VII. THÉOR.

(1030) **Les prismes triangulaires semblables** CPB, cpb **ont l'un à l'autre le rapport composé (81) des rapports** $BC : bc$, $BD : bd$, $BA : ba$, **de leurs côtés ou autres lignes homologues ;** c'est-à-dire **sont entre eux comme les produits continus (41)** $BA \times BC \times BD$, $ba \times bc \times bd$, **de ces côtés.**



En effet, puisque les prismes sont semblables, les plans qui contiennent les angles solides homologues B, b sont (972, Déf.) semblables, et semblablement situés. Les angles solides B, b sont donc (935) égaux et étant appliqués l'un à l'autre, l'angle cbd coïncidera avec CBD, le côté ba avec BA et le prisme cpb prendra la position cpB. Du point A menez AH perpendiculaire à la base commune des prismes ; le plan ABH sera alors (924) perpendiculaire au plan de la base commune. Par le point a, menez dans le plan ABH la droite ah, perpendiculaire à BH ou parallèle à AH et par conséquent (926 ou 908) perpendiculaire à la base BDC, et AH, ah seront (945) les hauteurs des deux prismes.

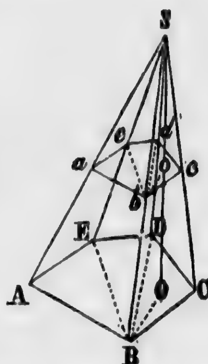
Maintenant, à cause des triangles semblables ABH, aBh et CBD, cBd, et des parallélogrammes semblables AC, ac, on a $AH : ah :: AB : aB :: BC : Bc :: BD : Bd$; or les bases équiangles CBD, cBd sont entre eux (586) comme $BC \times BD$ à $Bc \times Bd$ et les prismes CPB, cpB sont entre eux (1028) comme $CBD \times AH : cBd \times ah$; donc, $CPB : cpB :: BC \times BD \times AB : Bc \times Bd \times aB$.

(1031) **Cor. 1. Les prismes triangulaires semblables sont entre eux comme les cubes (36) de leurs hauteurs, côtés ou autres lignes homologues**; car, les bases semblables des deux prismes donnent (552) base CBD : base cBd :: $BC^2 : Bc^2$; donc base CBD : base cBd :: $AH^2 : ah^2$, et multipliant les antécédents par AH et les conséquents par ah, on obtient (105) base $BCD \times AH$: base $bcd \times ah$ :: AH^3 : ah^3 :: $BC^3 : bc^3$ :: etc.; mais la solidité du prisme est égale a sa base multipliée par sa hauteur (1020); donc, prisme CPB : prisme cpb :: $AH^3 : ah^3$ :: $BC^3 : bc^3$ :: $AB^3 : ab^3$ :: etc.

(1032) **Cor. 2.** En général, **les prismes et les cylindres semblables quelconques**, (le cylindre n'étant autre chose qu'un prisme) **sont entre eux comme les cubes ou produits continus (41) de leurs hauteurs, côtés rayons ou autres lignes homologues**; car, les prismes ou cylindres étant semblables, leurs bases sont (971) des polygones semblables composés (207) d'un même nombre de triangles semblables, semblablement situés; les deux prismes ou les deux cylindres pourront donc se diviser en un nombre égal de prismes triangulaires, dont les faces seront semblables et disposées de même dans les deux solides; donc les prismes triangulaires seront semblables; mais ces prismes triangulaires sont entre eux comme les cubes ou comme les produits continus de leurs côtés homologues, et ces côtés étant proportionnels, les sommes des prismes triangulaires, c.-à-d. les prismes polygones eux mêmes et les cylindres seront entre eux comme les produits continus ou cubes de leurs côtés homologues.

PROP. VIII. THÉOR.

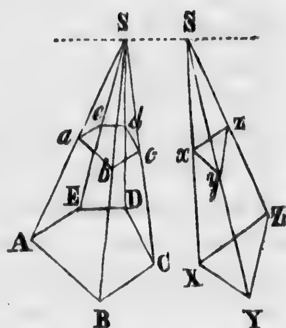
(1033) **Si une pyramide AC–S est coupée par un plan ac parallèle à sa base AC; sa hauteur SO et ses côtés ou arêtes SA, SB, S etc. seront divisés proportionnellement; et la section ac sera un polygone semblable à la base.**



En premier lieu, on aura S a : SA :: S b : SB :: S o : SO :: etc. ; car les plans parallèles AC, $a\,c$ coupés par un troisième plan ASB donnent (**912**) $a\,b$ parallèle à AB ; les triangles SAB, S $a\,b$ sont donc semblables et donnent (**520**) S a : SA :: S b : SB ; on a de même S b : SB :: S c : SC :: S e : SE :: et ainsi de suite. De là les côtés SA, SB, S etc. sont coupés proportionnellement en a, b, c, etc. La hauteur SO est aussi coupée dans la même proportion en o ; car BO et B o sont (**912**) parallèles et donnent SO : S o :: SB : S b.

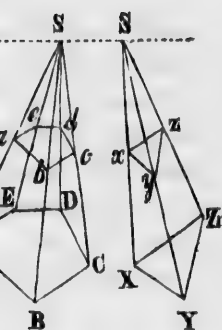
(**1034**) **En second lieu,** concevons la pyramide divisée par les plans ESB, DSB ; on aura (**912**) $e\,b$ parallèle à EB et $d\,b$ parallèle DB et comme on a déjà $a\,b$ parallèle à AB, les triangles semblables ASB, aS b, ESB, e S b, donnent $a\,b$: AB :: S b : SB et $e\,b$: EB :: S b : SB ; d'où on obtient (**75. Ax.**) $a\,b$: AB :: $e\,b$: EB et alt. (**94**) $a\,b$: $e\,b$ :: AB : EB. On prouverait de même que $a\,b$: $a\,e$ :: AB : AE ; les triangles $a\,e\,b$, AEB sont donc équiangles et semblables, leurs côtés étant, comme on vient de le voir, respectivement proportionnels l'un à l'autre. Un raisonnement analogue ferait voir que les autres triangles composants $e\,b\,d$, EBD, $c\,b\,d$, CBD sont respectivement semblables ; les polygones $a\,c$, AC sont donc composés d'un même nombre de triangles semblables disposés de la même manière dans chaque fig. ; donc (**207**) ces polygones sont semblables ; donc, etc.

(1035) Cor. 1. Si deux pyramides AC–S, XYZ–S de même hauteur, ou dont les bases AC, XYZ sont situées dans un même plan et les sommets S, S aussi dans un même plan parallèle au premier, sont coupées par un troisième plan parallèle aux deux autres, les sections *a c*, *x y z* **faites par ce plan seront entre elles comme les bases ;** c.-à-d., les surfaces de ces sections seront proportionnelles à celles des bases ou $ac : xyz :: AC : XYZ$. En effet, les polygones *a c*, AC étant par la prop., semblables, leurs surfaces sont (**554**) comme les carrés des côtés homologues *a b*, AB ; mais $ab : AB :: Sa : SA$; d'où, $ac : AC :: Sa^2 : SA^2$. Pour la même raison $xyz : XYZ :: Sx^2 : SX^2$. Mais puisque *a c*, *x y z* sont dans un même plan parallèle à celui des bases et sommets on a aussi (**922**) $Sa : SA :: Sx : SX$; donc (**75. Ax.**) $ac : AC :: xyz : XYZ$ ou alt. $ac : xyz :: AC : XYZ$; donc etc.



(1036) Cor. 2. Si les bases AC, XYZ de deux pyramides de même hauteur sont équivalentes, toutes sections *a c*, *x y z* **de ces pyramides faites par des plans parallèles aux bases et à des distances égales de ces dernières, seront aussi équivalentes.**

(1037) Cor. 3. Deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes, sont équivalentes ou égales en volume ; car, en concevant les bases de ces pyramides sur un même plan et les pyramides elles-mêmes coupées par des plans parallèles aux plans des bases, les sections correspondantes *a c*, *x y z* seront égales (**204**) par le dernier corallaire. La même chose aura lieu pour toutes les sections correspondantes, faites par d'autres plans parallèles à celui de la base ; donc puisqu'on peut (**119**) concevoir les pyramides divisées dans



aces de ces sections
ou $a\,c : x\,y\,z$ :: AC:
étant par la prop.,
omme les carrés des
: S a : SA ; d'où, $a\,c$:
$x\,y\,z$: XYZ :: S x^2:
ns un même plan
a aussi (922) S a:
$x\,y\,z$: XYZ ou alt.

de deux pyramides
toutes sections $a\,c$,
plans parallèles
de ces dernières,

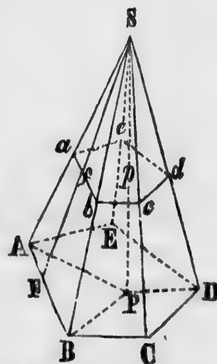
ême hauteur et de
ou égales en volu-
pyramides sur un
upées par des plans
ns correspondantes
orallaire. La même
correspondantes,
i de la base ; donc
nides divisées dans

toute leur hauteur par des plans infiniment rapprochés l'un de l'autre et en conséquence composées de tranches ou sections d'une même épaisseur infiniment petite, et que ces sections sont en nombre égal, puisque les pyramides ont même hauteur, il est visible que ces pyramides sont égales.

(1038) **Cor. 4. De deux pyramides AC–S, XYZ–S de hauteur égale et de bases équivalentes, les troncs compris par un même plan parallèle à celui de la base ou par des plans parallèles à ceux des bases et à des distances égales de ces dernières, sont équivalents ou égaux en volume** ; car, par le dernier cor. la pyramide $a\,c$–S est équivalente à la pyramide $x\,y\,z$–S et comme les pyramides entières AC–S, XYZ–S sont aussi égales par le même cor. ; il suit que si des pyramides entières on retanche les pyramides partielles, les restes, c.-à-d. les troncs AC–b et XZ–y seront équivalents.

PROP. IX. THÉOR.

(1039) **La surface latérale ou convexe d'une pyramide regulière AD–S est égale au périmètre de sa base AD multiplié par sa demi-hauteur inclinée SF.**

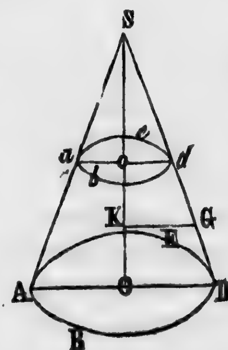


En effet, dans la pyramide régulière le point P où la perpendiculaire SP rencontre la base est (959) le centre du pol. rég. AD ; et (555, 2°) les rayons PA, PB, P etc. du pol. sont égaux entre eux. Dans les triangles rectangles SPA, SPB, SP etc., les côtés sont donc égaux et les hypoténuses SB, SC, S etc. en conséquence égales (311). Les triangles ASB, BSC, etc. qui composent la surface latérale de la pyramide sont donc égaux entre eux puisque leurs côtés sont égaux et leurs bases AB, BC, etc.

aussi égales. Mais la surface de l'un quelconque ASB de ces triangles est égale (**344**) à sa base par la demi-perpendiculaire SF qui est (**960**) la hauteur inclinée de la pyramide ; de là, la surface de tous les triangles composants ou la surface latérale de la pyramide est égale au périmètre de sa base par sa demi-hauteur inclinée.

(**1040**) **Cor. 1. La surface convexe d'un tronc** AD–*e* **de pyramide régulière** AD–S **est égale à la demi-somme des périmètres de ses bases supéreure et inférieure** *a d*, AD **multipliée par sa hauteur inclinée** *f* F.

Car, la section *a d* est semblable (**1034**) à la base AD et cette base étant un polygone régulier, il suit que $ab = bc = cd =$etc. De plus, on a (**912**) *a b*, *b c*, etc. respectivement parallèles à AB, BC, etc. La surface latérale du tronc de cône est donc composée des trapèzes (**172**) égaux AB *b a*, BC *c b*, etc. et la hauteur perpendiculaire *f* F de tous ces trapèzes est égale, puisqu'elle n'est que la différence entre les hauteurs égales des triangles composants ASB, BSC, etc. et *a* S *b*, *b* S *c*, etc. des pyramides régulières AD–S, *ad*–S; mais la surface d'un de ces trapèzes, comme AB *ba*, est (**346**) égale à $\frac{1}{2}(AB+ab)\times fF$; de là, la surface de tous ces trapèzes ou la surface latérale du tronc est égale à la demi-somme des périmètres des bases inférieure et supérieure multipliée par la hauteur inclinée du tronc.



(**1041**) **Cor. 2.** On a vu (**961**) que le cône n'est autre chose qu'une pyramide régulière ayant pour base un cercle ; donc, **la surface latérale du cône est égale au périmètre ou à la circonférence de sa base par son côté ou (962) sa hauteur inclinée.**

(**1042**) **Cor. 3. La surface latérale du tronc de cône** B *e* **est égale**

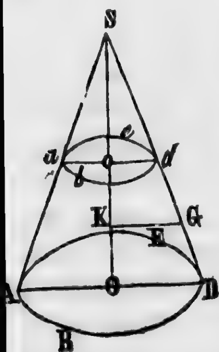
au produit de son côté ou de sa hauteur inclinée A a par la demi-somme des circonférences de ses bases parallèles BE, $b\,e$; car, le tronc de cône n'est autre chose (**968** 2°) qu'un tronc de pyramide régulière, et tout ce qui est vrai du tronc de pyramide, l'est également du tronc de cône.

(**1043**) **Cor. 4.** Soient K, G, les points milieux des côtés O o, D d du trapèze générateur (**966**) O d du tronc de cône ; GK sera (**325**)$=\frac{(\mathrm{OD}+o\,d)}{2}$ et puisque (**557** et **559**) les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, on a cir. GK$=\frac{1}{2}$(cir. OD+cir. $o\,d$) ; donc **la surface convexe du tronc de cône est égale à son côté multiplié par la circonférence d'une section** à distances égales de ses bases parallèles.

(**1044**) **Sco. 1.** Si une ligne Dd située entièrement du même côté de la droite O o et dans le même plan, tourne autour de l'axe Oo, la surface décrite par D d aura pour mesure (**1043**) D $d\times\frac{(\text{cir. OD}+\text{cir. } o\,d)}{2}$ ou D $d\times$cir. KG, les lignes OD, $o\,d$, KG étant des perpendiculaires abaissées des extrémités et du milieu de D d sur l'axe O o ; car, si l'on prolonge O o, D d jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en S, il est évident que la surface décrite par D d est celle d'un tronc de cône ayant pour rayons respectifs de ses bases les droites OD, $o\,d$ et pour sommet du cône entier le point S. Donc, etc.

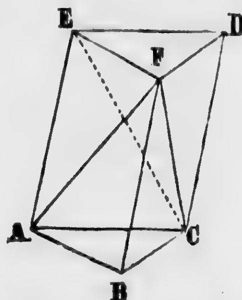
Cette mesure vaudra toujours, même quand le point o tombera en S, formant ainsi un cône complet, ou encore quand la ligne D d sera parallèle à l'axe, formant ainsi un cylindre. Dans le premier cas $o\,d$ n'aurait aucune valeur et dans le second cas l'on aurait $o\,d$=OD=KG.

(**1045**) **Sco. 2.** Soit L le côté d'un cône, R le rayon de sa base; la circonférence de cette base sera (**671**) 2π.R, et la surface du cône sera $2\pi\mathrm{R}\times\frac{1}{2}\mathrm{L}$, ou $\pi\,\mathrm{RL}$.



PROP. X. THÉOR.

(1046) Toute pyramide triangulaire ABC–F **est le tiers d'un prisme triangulaire** ABC–DEF **de même base et de même hauteur.**



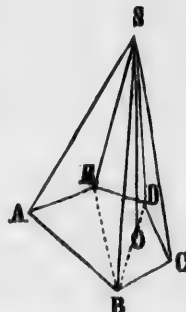
Menez le plan FAC qui enlèvera du prisme la pyramide ABC–F; il restera la pyramide quadrangulaire ACDE–F ayant F pour sommet et pour base le parallélogramme AD. Menez la diagonale EC et le plan EFC qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires ACE–F, DCE–F. Ces deux dernières ont bases égales ACE, DCE dans un même plan et ont même hauteur (la perpendiculaire abaissée du sommet F sur le plan AD de la base) ; ces pyramides sont donc (**1037**) équivalentes. Mais les pyramides DCE–F et ABC–F ont bases égales ABC, DEF et même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée entre les bases parallèles ; de là, les deux pyramides sont équivalentes. Or, on vient de voir que la pyramide DCE–F est équivalente à ACE–F; donc les trois pyramides ABC–F, ACE–F, CDE–F qui composent le prisme BED sont toutes équivalentes l'une à l'autre. Donc la pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

(**1047**) **D'ailleurs,** on a vu (**1006**) que le cube peut être décomposé en six pyramides égales entre elles et chacune par conséquent équivalente à la sixième partie du cube ou au tiers du demi-cube, c.-à-d. au tiers d'un prisme ayant pour base, la base de la pyramide ou du cube et pour hauteur la hauteur de la pyramide ou (**1006**) la demi-hauteur du cube. Or, (**1037**) les pyramides dont les hauteurs sont égales et les bases équivalentes sont elles-mêmes équiva-

lentes ; et (**1028**) les prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases ; donc si ces bases sont équivalentes, les prismes eux-mêmes seront de volume égal ; donc, **toute pyramide est le tiers d'un prisme de même hauteur et de base égale ou équivalente.**

(**1048**) **Cor. 1.** Il suit du par. (**1046**) que **la solidité d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.**

(**1049**) **Cor. 2.** Il suit du par. (**1047**) que **la solidité de toute pyramide est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.**

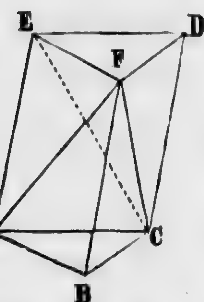


D'ailleurs, on arrive encore à cette conclusion sans l'aide du par. (**1047**) en supposant la pyramide dont il s'agit divisée en pyramides triangulaires ABE–S, DBE–S, etc., par des plans ESB, DSB passant (**893**) par ses arêtes opposées ES, BS, etc. ; cette construction donnera autant de pyramides partielles que le pol. AC contient de triangles et ayant toutes une hauteur commune SO. Mais chacune de ces pyramides composantes a pour mesure (**1048**) le tiers du produit de sa base par sa hauteur ; de là, la somme des pyramides triangulaires ou la pyramide polygone entière AC–S aura pour mesure le tiers du produit de la somme des bases partielles par la hauteur commune ; donc, etc.

(**1050**) **Cor. 3. Le cône n'étant (961) qu'une pyramide, sa solidité est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.**

(**1051**) **Cor. 4. Toute pyramide est le tiers du prisme de même hauteur et de même base** ; conclusion déjà établie au par. (**1047**).

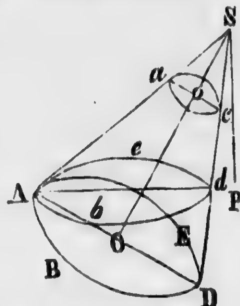
(**1052**) **Cor. 5. Tout cône est le tiers du cylindre de mêmes base et hauteur.**



(1053) **Cor. 6. Deux pyramides ou deux cônes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et ceux de même base, comme leurs hauteurs.**

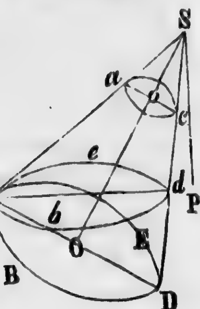
(1054) **Cor. 7. Les pyramides et les cônes sont entre eux comme les produits de leurs bases et hauteurs.**

(1055) **Sco. 1.** S'il s'agissait de la **solidité d'un cône oblique** *be*–S, c.-à-d., d'un cône BE–S dont on aurait retranché un onglet ou partie ABE–*d* par un plan *be* incliné à l'axe SO du cône, il est clair que l'on obtiendrait encore cette solidité en faisant (437) le produit de sa base curviligne *be* par sa hauteur SP, ce cône n'étant autre chose qu'une pyramide oblique.



(1056) **Sco. 2.** Et **si la section du cône par un plan** *ac* **perpendiculaire à son axe, n'était pas un cercle** ; c.-à-d., si le solide *be*–S ne formait pas partie d'un cône régulier, mais avait au contraire pour base une figure curviligne ou mixtiligne quelconque et pour section *ac* une figure analogue à celle de la base, on regarderait encore ce solide comme une pyramide dont on obtienderait la solidité comme il a déjà été dit.

(1057) **Sco. 3.** On peut **arriver à la solidité d'un corps polyèdre quelconque** en divisant ce corps en pyramides par des plans menées par un même angle solide ; dans ce cas, le polyèdre sera divisé en autant de pyramides partielles que le solide a de faces, moins les faces composantes de l'angle solide dont partent les plans de section ; mais si on fait passer tous les plans par un point quelconque situé à l'intérieur du solide, il y aura alors autant de pyramides composantes que de faces composantes dans la surface entière du polyèdre, et comme la solidité de chacun de ces pyramides sera égale à la surface de sa base (face du



polyèdre) par sa hauteur (perpendiculaire menée du sommet commun de toutes les pyramides au plan de la base de chacune d'elles) il est clair qu'on arrivera à la solidité du polyèdre dont il s'agit en faisant la somme des solidités de toutes les pyramides composantes.

(1058) **Sco. 4.** Il est à peine nécessaire de remarquer que pour **arriver à la surface latérale d'une pyramide ou d'un cône oblique**, il y aura à déterminer séparément celle de toutes les faces latérales composantes du solide et à en prendre la somme, et si le solide était de la nature de celui du par. (**1056**) le même procédé conduirait encore infailliblement au même résultat, la surface latérale plane, courbe ou mixte du solide pouvant toujours être considérée comme composée d'un nombre plus ou moins grand de triangles aboutissant à un sommet commun et ayant pour bases les côtés plus ou moins grands du polygone ou de la figure plane servant de base au solide, et pour côtés les arêtes ou côtés du solide.

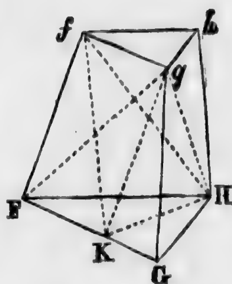
(1059) **Sco. 5. On obtiendra la surface d'un polyèdre quelconque en faisant la somme des surfaces de toutes ses faces composantes.**

(1060) **Sco. 6.** Soit R le rayon de la base d'un cône, H sa hauteur ; la solidité du cône sera $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$ ou $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

PROP. XI. THÉOR.

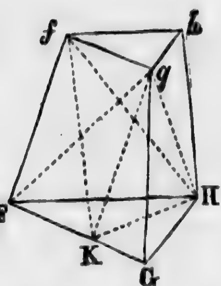
(1061) **Le tronc de pyramide FHG-*fgh* compris (956) entre deux plans parallèles, est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases, la base inférieure du tronc, la base supérieure et une moyenne proportionnelle entre les**

deux bases. Séparez par le plan F *g* H (892) la pyramide triangulaire FGH-*g* ayant pour base la base inférieure du tronc et pour hauteur celle du tronc, le sommet *g* étant dans le plan de la base supérieure.



Cette pyramide enlevée, il restera la pyramide quadrangulaire FH *h f*-*g* ayant pour base le quadrilatère F *h* et *g* pour sommet. Par les points *f*, *g*, H, menez un plan qui divisera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires F *f* H-*g*, *f h* H-*g*. Cette dernière a pour base la base supérieure *f g h* du tronc et pour hauteur la hauteur du tronc, parce que son sommet H est dans la base inférieure. On connaît donc déjà deux des pyramides qui composent le tronc.

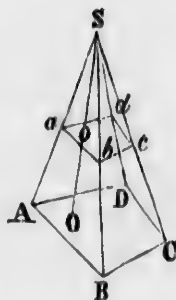
Il reste à considérer la troisième pyramide F *f* H-*g*. Ayant mené K *g* parallèle à *f* F, concevons une nouvelle pyramide F *f* H-K ayant K pour sommet et pour base le triangle F *f* H; ces deux pyramides sont équivalentes (**1037**) ayant même base F *f* H et même hauteur, car les sommets *g*, K sont situés dans une même droite *g* K parallèle à *f* F et par conséquent (**887**) parallèle au plan de la base et (**884**) à des distances perpendiculaires égales de cette base. Mais la pyramide F *f* H-K peut être regardée comme ayant son sommet en *f*, et sa hauteur sera de cette manière égale à celle du tronc; il reste donc à démontrer que sa base FKH est moyenne proportionnelle entre les bases FGH, *f g h*; or, les triangles FHK, *f g h* ont chacun un angle égal en F, *f*; de là (**586**) FHK : *f g h* :: FK × FH : *fg* × *f h*; mais à cause des parallèles, FK = *fg*, donc FHK : *f g h* :: FH : *f h*; on a aussi FHG : FHK :: FG : FK ou *fg*; mais les triangles semblables FGH, *f g h* donnent FG : *fg* :: FH : *f h*; d'où FGH : FHK :: FHK : *f g h*; c.-à-d. que FHK est moyenne proportionnelle entre les deux bases FGH, *f g h*. Donc, etc.



pour sommet. Par
visera la pyramide
angulaires F f H–g,
ase supérieure fgh
ronc, parce que son
On connaît donc
le tronc.

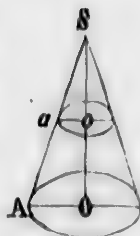
ide F f H–g. Ayant
nouvelle pyramide
e le triangle F f H;
(1037) ayant même
sommets g, K sont
allèle à fF et par
base et (884) à des
ette base. Mais la
comme ayant son
te manière égale à
que sa base FKH
ses FGH, fgh; or,
angle égal en F, f;
fh; mais à cause
h::FH:fh; on a
s les triangles sem-
H:fh; d'où FGH:
t moyenne propor-
. Donc, etc.

On a vu (1038) que le tronc de pyramide triangulaire est équivalent au tronc de pyramide polygone de même hauteur et de base équivalente; cette proposition dont on vient de démontrer la vérité dans le cas d'un tronc de pyramide triangulaire est donc vraie pour un tronc de pyramide quelconque.

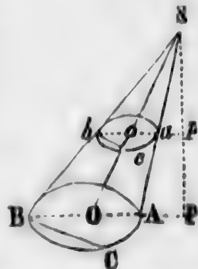


(1062) **D'ailleurs,** on peut aussi déterminer le volume d'un tronc de pyramide AC b en faisant le volume de la pyramide entière AC–S et retranchant le volume de la pyramide partielle ac–S. A cet effet, ayant prolongé deux quelconques A a, B b des côtés du tronc donné jusqu'à leur rencontre en S et mené SO perpendiculaire au plan de la base; SO sera (957) la hauteur de la pyramide entière, S o, celle de la pyramide partielle et O o, celle du tronc; or on a vu (1033) que la section abc parallèle à ABC donne AB : ab :: SA : S a :: SO : S o et div. (96) AB—ab : ab :: SO—S o : S o, ou AB—ab : ab :: O o : S o, ce qui donnera (1049) le volume du tronc=surf. AC$\times\frac{1}{3}$SO (ou O o+S o)—surf. $ac\times\frac{1}{3}$S o.

(1063) **Cor. 1. Le tronc de cône compris entre deux plans parallèles est égal en solidité à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases, la base inférieure du tronc, sa base supérieure et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases;** car, comme on l'a vu (968) le tronc de cône n'est autre chose qu'un tronc de pyramide régulière ayant pour bases parallèles des cercles. Soit OA le rayon de la base inférieure du tronc de cône, oa celui de sa base supérieure et O o sa hauteur; on aura (1024) pour surface de la base inf. $\pi\,\mathrm{OA}^2$, pour surface de la base sup. $\pi\,oa^2$ et pour moyenne proportionnelle entre ces bases $\pi\,\mathrm{OA}\times oa$; l'expression de la solidité du tronc sera donc $\frac{1}{3}\mathrm{O}\,o\times\mathrm{OA}^2.\,\pi+\frac{1}{3}\,\mathrm{O}\,o\times oa^2.\,\pi+\frac{1}{3}\,\mathrm{O}\,o\times\mathrm{AO}\times a\,o.\pi$, ou ce qui est la même chose, $\frac{1}{3}\,\pi\mathrm{O}\,o\times(\mathrm{OA}^2+oa^2+\mathrm{OA}\times oa)$.



(1064) **D'ailleurs**, on aura encore le volume du tronc de cône en faisant la différence des volumes du cône entier et du cône partiel dont on obtiendra la hauteur en faisant AO—*ao*:*oa*::O*o*:S*o* et on aura SO=S*o*+O*o*; AO, *ao* étant les rayons des bases parallèles.

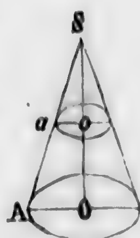


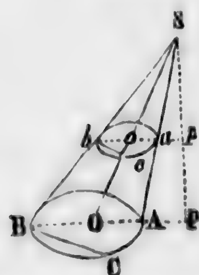
(1065) **Sco. 1.** S'il s'agissait de la **solidité du tronc d'un cône oblique,** on ferait tout de même la différence des volumes (**1055**) des cônes obliques entier et partiel dont on aurait encore les hauteurs respectives en faisant AO—*ao*:*ao*::P*p*:S*p* ou AP—*ap*:*ap*::P*p*:S*p* et SP=S*p*+P*p*; AO, *ao* ou AP, *ap* étant évidemment des lignes homologues formant partie des droites parallèles (**912**) AB, *ab* (prolongées s'il le faut) que déterminera dans les bases parallèles du tronc un plan SBP passant par l'axe SO du cône et par la perpendiculaire SP qui en est la hauteur.

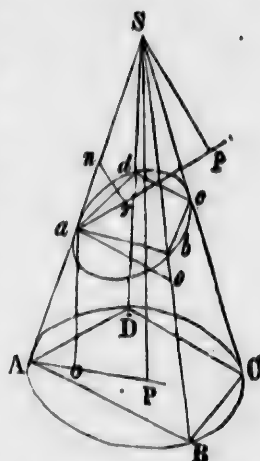
Il est clair aussi (**1062**) que toutes autres lignes homologues quelconques BC, *bc* des deux bases parallèles donneraient BC—*bc*:*bc*::P*p*:S*p*.

(1066) **Sco. 2. Et si le tronc B*a* était celui du solide du par.** (**1056**) on aurait encore son volume égal à la différence des volumes du sol. entier et du sol. partiel, et les hauteurs de de ces solides en faisant BC—*bc*:*bc*::P*p*:S*p*, et SP=S*p*+P*p*; BC, *bc* étant comme auparavant deux lignes homologues quelconques des bases parallèles du tronc.

(1067) **Sco. 3. Prob. Déterminer le volume d'un tronc de pyramide ou d'un tronc de cône AC *c* dont les bases AC, *ac* ne sont pas des plans parallèles.**







Ayant prolongé deux quelconques A a, B b des côtés du tronc de pyramide jusqu'à leur rencontre en S, sommet commun des pyramides entière et partielle, on mènera dans le plan A b la droite $a\,e$ parallèle à AB. On aura alors $AB - a\,e : a\,e :: A\,a : a\,S$ et $A\,a : AS :: a\,o : SP$, les droites $a\,o$, SP étant (**975**) toutes deux perpendiculaires au plan de la base AC et par conséquent (**910**) parallèles entre elles. On mènera ensuite Sp perpendiculaire au plan, prolongé s'il le faut, de la base $a\,c$ et on aura le volume du tronc=surf. $AC \times \frac{1}{3}\,SP -$ surf. $a\,c \times \frac{1}{3}\,S\,p$. Si le point S était inaccessible, on mènerait d'un point quelconque n du côté a S une perpendiculaire $n\,r$ au plan de la base $a\,c$. Il est clair (**910**) que $n\,r$ serait alors parallèle à Sp et toutes deux perpendiculaires à la commune intersection $a\,p$ d'un plan Spa perpendiculaire (**924**) au plan $a\,c$, ce qui donnerait, dans les triangles rectangles semblables $a\,n\,r$, $a\,S\,p$, $a\,n : a\,S :: n\,r : S\,p$.

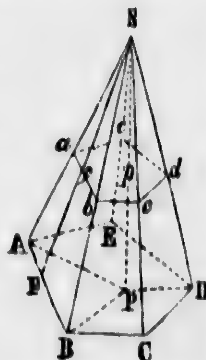
(**1068**) **Pour ce qui est du tronc de cône,** il y aurait à prendre sur le périmètre de sa base inférieure, deux points quelconques A, B, et à déterminer sur sa surface latérale, la direction de deux droites A a, B b qui étant prolongées, se rencontreraient au sommet commun S des deux cônes. A cet effet, il suffirait d'appliquer à la surface latérale du tronc une ligne droite A a, B b passant par le point A, B et touchant dans toute sa longueur à cette surface, comme le fait (**968** 2°) le côté A a, B b du tronc de pyramide inscrit. On établirait encore les lignes requises A a, B b en appliquant à la surface convexe du tronc en A et B, respectivement, une surface plane, comme serait (**968** 2°) une des faces du tronc de pyramide circonscrit, et qui à l'endroit de son contact

avec le périmètre de la base supérieure du tronc, déterminerait un point a, b, dans la direction requise AS, BS. On a maintenant dans le triangle ASB, la base AB et les angles adjacents A, B, pour trouver AS et par suite aS=AS—A a, et les triangles rectangles semblables A o a, APS donnent A a : $o a$ :: AS : PS. Enfin on aura comme auparavant $an : nr :: a$S : S p et volume du tronc=surf. AC×⅓ SP—surf. $a c$×⅓ S p.

PROP. XII. THÉOR.

(1069) Les pyramides semblables AC–S, a c–S ont l'une à l'autre le rapport composé des rapports AB : a b, BC : b c, BS : b S, etc. **de leurs côtés, hauteurs, ou autres lignes homologues,** c'est-à-dire **sont entre elles comme les produits continus** BA×BC×BS, b a×b c×b S **de ces côtés,** etc.

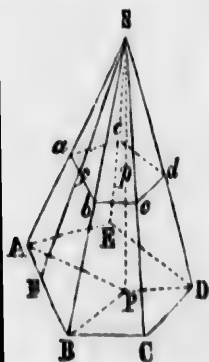
En effet, puisque les pyramides sont semblables, les angles solides au sommet sont contenus par un même nombre de plans semblables, disposés de la même manière et par conséquent (972) également inclinés entre eux; on pourra donc faire coïncider ces angles solides et les deux pyramides seront alors disposées, comme dans la fig., de manière à avoir l'angle solide au sommet S commun.



Dans cette position, les bases AC, $a c$ seront parallèles, à cause des faces semblables ABS, a b S, BCS, b c S, qui donnent : angle S a b=SAB et S b c=SBC ; de là le plan $a c$ est (919) parallèle au plan AC. Cela posé, SP étant la hauteur de la pyramide AC–S et S p celle de la pyramide $a c$–S, on aura (1033) SP : S p :: SB : S b :: AB : a b :: BC : $b c$; or les bases équiangles AC, $a c$ sont entre eux (586) comme BA×BC : b a×b c, car les triangles équiangles ABC, a $b c$, ont entre eux (586) ce rapport et ces triangles sont (207) des

parties correspondantes ou des sous-multiples égaux des bases AC, $a\,c$; et les pyramides AC–S, $a\,c$–S sont entre elles (**1054**) comme les bases multipliées par les hauteurs ; donc ces pyramides sont aussi entre elles comme SB×AB×BC : $S\,b \times a\,b \times b\,c$.

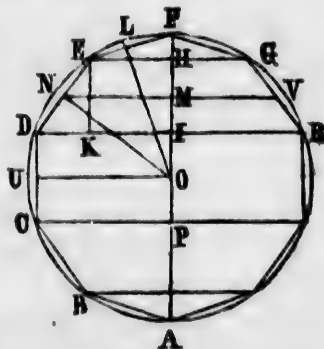
(**1070**) **Cor. Les pyramides et les cônes** (qui ne sont autre chose que des pyramides) **semblables, sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, côtés, rayons ou autres lignes homologues** ; car, les bases semblables AC, $a\,c$ sont entre elles comme les carrés AB^2, $a\,b^2$ des côtés homologues :: $SB^2 : S\,b^2 :: SP^2 : S\,p^2 :: AP^2 : a\,p^2$ et multipliant les antécédents et conséquents par SP, $S\,p$, on a base AC×SP : base $a\,c \times S\,p :: SP^3 : S\,p^3 :: SB^3 : S\,b^3 :: AB^3 : a\,b^3 :: AP^3 : a\,p^3$ :: etc. ou (**73 Ax.**) pyr. AC–S : pyr. $a\,c$–S :: SB3 : $S\,b^3$ :: etc.



PROP. XIII. THÉOR.

(**1071**) **La surface d'une sphère est égale au produit de son diamètre par un de ses grands cercles.**

Car, le demi-cercle ACF qui en tournant autour de son axe AF engendre (**974**) la sphère BG, peut être regardé comme un demi-polygone régulier d'un nombre indéfini de côtés AB, BC, etc. et chacun de ces côtés en conséquence (**665**) indéfiniment petit. La droite DE peut dans



ce cas être regardée (**430**) comme partie de l'arc générateur et (**667**) le rayon ON comme rayon du cercle. Cela posé, on a vu (**1044**) que la surf. DG décrite par la partie DE du périmètre générateur et qui est celle d'un cône tronqué DG,

d'un cône EFG, ou d'un cylindre CR, est dans chaque cas égale au produit du côté DE par la circonférence d'une section NV à distances égales des bases parallèles EG, DR; mais à cause des triangles semblables (**323**) DKE, NMO, on a DE : EK ou HI :: ON : NM ($\frac{1}{2}$NV); d'où, HI×ON=DE×NM. Le même raisonnement donnera pour surface latérale du cône EG–F le produit FH×circ. OL ou ON et pour surface latérale du cylindre CR on aura IP×circ.OU ou ON ; la surface latérale d'une zone (**975**) quelconque CG est donc égale à (HI+IP)×circ. ON, celle d'une zone quelconque DFR n'ayant (**979**) qu'une base DR, égale à (FH+HI)×circ. ON, et celle de la sphère entière égale à (FH+HI+IP+PA) ×circ. ON; c.-à-d. à FA×circ. ON.

(**1072**) **Cor.** Puisque la surface d'un grand cercle est égale (**431**) au produit de sa circonférence par le demi-rayon ou par le quart du diamètre, il suit que **la surface d'une sphère est égale à quatre de ses grands cercles** ; ou à $4\pi.ON^2$ ou $4\pi.OA^2$.

(1073) Sco. 1. La surface d'une zone est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la sphère.

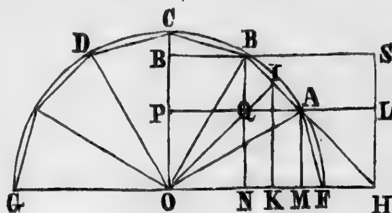
(1074) Sco. 2. Deux zones prises dans la même sphère ou dans des sphères égales, sont entre elles comme leurs hauteurs, et toute zone est à la surface de la sphère comme la hauteur de la zone est au diamètre de la sphère.

2° Il est clair aussi, d'après ce qui a déjà été dit que **les surfaces de deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou autres lignes homologues de ces sphères, et que les surfaces de deux zones semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou lignes homologues de ces zones ou des sphères dont ces zones font partie.**

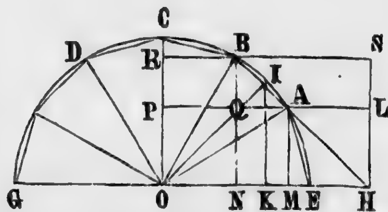
PROP. XIV. THÉOR.

(1075) La solidité d'une sphère est égale à sa surface multipliée par le tiers de son rayon.

En effet, regardant encore comme ligne droite la partie indéfiniment petite AB de l'arc générateur de la sphère et OI en conséquence (**667**) comme rayon de la sphère, si l'on prolonge AB jusqu'à ce qu'elle rencontre en H l'axe prolongé GH de la sphère, le triangle OBH composé des triangles rectangles ONB, HNB, décrira (**963**) pendant la révolution du périmètre générateur, des cônes qui seront (**1052**) les tiers des cylindres correspondants décrits par les rectangles RN, SN, et le triangle OAH composé des triangles OMA, HMA décrira des cônes qui seront les tiers des cylindres correspondants décrits par les rectangles PM, LM. Le solide décrit par le triangle AOB sera donc égal à la différence des solides ou double-cônes décrits par les triangles OBH, OAH, et ces double-cônes sont entre eux (**1053**) comme BN^2 à AM^2, c.-à-d. (**557**) comme les surfaces des cercles décrits par les rayons BN, AM autour de l'axe commun OH; or, ces solides ont respectivement pour mesure (**1050**) surf. $BN \times \frac{1}{3}OH$ (ou $\frac{1}{3}ON + \frac{1}{3}NH$) et surf. $AM \times \frac{1}{3}OH$ (ou $\frac{1}{3}\,\overline{OM+MH}$) ou (**1024**) $\pi BN^2 \times \frac{1}{3}OH$ et $\pi AM^2 \times \frac{1}{3}OH$; donc, le solide aura pour mesure $\pi(BN^2 - AM^2) \times \frac{1}{3}OH$. Mais (**370**) $BN^2 - AM^2 = (BN+AM) \times (BN-AM) =$ (**347**) $2IK \times BQ$; donc la mesure du solide dont il s'agit est $\pi \times 2IK \times BQ \times \frac{1}{3}OH$, ou ce qui est la même chose, $\frac{2}{3}\pi \times IK \times BQ \times OH$ ($2 \times \frac{1}{3}$ étant $= \frac{2}{3}$); or, le triangle AOB étant isocèle et OI par conséquent (**236**) perpendiculaire



à AB, les triangles semblables OIH, AQB donnent BQ : OI :: AB : OH ; d'où, AB×OI=BQ×OH, mais AB×OI=2 surf. AOB ; de là, on a BQ×OH=2 surf. AOB ; donc le solide décrit par AOB est encore $=\frac{2}{3}\pi\times IK\times 2AOB$, ou $\frac{4}{3}\pi\times AOB\times IK$, ou ce qui est la même chose AOB×⅔circ. IK, $\frac{4}{3}\pi IK$ étant=⅔ circ. IK. Donc le solide décrit par le triangle AOB a pour mesure la surface de ce triangle multipliée par les ⅔ de la circonférence décrite par le point milieu I de sa base.



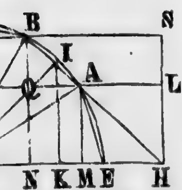
Maintenant, les triangles AQB, OKI sont (323) semblables et donnent la proportion AB : AQ ou MN :: OI : IK ; d'où, AB×IK=MN×OI et le volume du solide est encore égal (*) à $\frac{2}{3}\pi\times OI^2$ MN, c.-à-d. aux ⅔ du produit continu de π par le carré de la perpendiculaire OI menée du centre à la base AB, par la distance MN entre les deux perpendiculaires tombant sur l'axe.

Mais, par hyp. AB est partie de la demi-circonférence génératrice de la surface de la sphère et OI est le rayon de la sphère ; le solide décrit par le triangle AOB est donc le secteur sphérique (975) décrit par le secteur AOB du demi-cercle générateur de la sphère solide ; or, on prouverait tout de même que le volume du secteur sphérique décrit par BOC ou par $AOF=\frac{2}{3}\pi\times OI^2\times ON$ ou $\frac{2}{3}\pi\times OI^2\times MF$, et la somme des secteurs sphériques composants est égale à la sphère ; donc le volume de la sphère $=\frac{2}{3}\pi OI^2\times(FM+MN+NO+OG)$ ou $\frac{2}{3}\pi OI^2\times FG$ qui est encore égal à $\frac{1}{3}\pi OI^2\times 2FG$; mais πOI^2 est

(*) L'étudiant verra que $\frac{2}{3}\pi\times OI^2\times MN = AOB\times\frac{2}{3}$ circ. IK, car $AOB=\frac{1}{2}AB\times OI$; d'où il suit que $AOB\times\frac{2}{3}$ circ. $IK=\frac{1}{2}AB\times OI\times\frac{2}{3}$ circ. IK = par transp. $\frac{1}{2}AB\times IK\times\frac{2}{3}$ circ. OI, et puisque $AB\times IK = MN\times OI$, on a $\frac{1}{2}AB\times IK\times\frac{2}{3}$ circ. $OI=\frac{1}{2}MN\times OI\times\frac{2}{3}$ circ. $OI=\frac{1}{2}MN\times\frac{2}{3}$ circ. $OI^2=\frac{1}{2}MN\times\frac{4}{3}\pi$ $OI^2=MN\times\frac{2}{3}\pi$. O $=\frac{2}{3}\pi$.OI ·MN.

la surface d'un grand cercle ; donc la solidité de la sphère est égale à celle d'une cône ayant pour base un grand cercle et pour hauteur le double diamètre de la sphère.

Substituant à FG son égal 2OF, on a pour la solidité de la sphère $\frac{4}{3}\pi OF^2 \times OI$ ou (à cause de $OI=OF$) $\frac{4}{3}\pi OF^2 \times OF$ qui est égal à $4\pi OF^2 \times \frac{1}{3}OF$. Mais $4\pi OF^2$ est égal (**1072**) à la surface de la sphère ; de là, la solidité de la sphère est égale à sa surface multipliée par le tiers de son rayon.



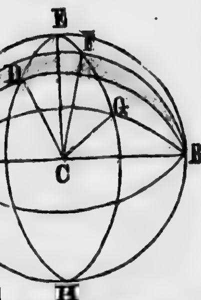
(**1076**) **Autrement.** On peut encore concevoir la sphère composée d'un nombre indéfini de pyramides ayant chacune pour base une partie assez petite de la surface de la sphère pour qu'on puisse la considérer comme étant sensiblement une surface plane ; le sommet commun de toutes ces pyramides étant au centre de la sphère et l'ensemble ou la somme de leurs bases égale à la surface de la sphère. Or, chacune de ces pyramides est égale (**1049**) au produit de sa base par le tiers de sa hauteur, c.-à-d. par le tiers du rayon de la sphère ; donc la somme de toutes ces pyramides est égale au produit de la surface entière de la sphère par le tiers de son rayon ; mais la surface de la sphère est égale (**1072**) à quatre de ses grands cercles ; donc la solidité de la sphère est égale au produit de quatre de ses grands cercles par le tiers du rayon, ou au quadruple du produit d'un de ses grands cercles par le tiers du rayon, ou au produit des $\frac{4}{3}$ du rayon par un grand cercle.

(**1077**) **Sco. 1. La solidité de tout secteur sphérique est égale au produit de la zone qui en constitue la base, par le tiers du rayon** ; car la mesure du secteur est, par la prop. $=\frac{2}{3}\pi OF^2 \times MN$ qui est égale à $2\pi OF \times MN \times \frac{1}{3} OF$. Mais, $2\pi OF$ est (**1024**) la circonférence d'un grand cercle de la sphère et cette circonférence multipliée par MN donne (**1073**) la surface de la zone qui forme la base du secteur ; et la preuve s'applique également au secteur sphérique décrit par le secteur circulaire AOF ou par BOC, DOA, DOF, etc. ; donc, etc.

(1078) **D'ailleurs** ; cette conclusion dérive aussi immédiatement du par. (**1076**) ; car le secteur, comme la sphère peut se décomposer en pyramides ayant leurs sommets au centre de la sphère et la solidité du secteur est égale à la somme de ces pyramides, c.-à-d., à la somme de leurs bases (zone de la sphère) multipliée par le tiers du rayon.

(1079) **Sco. 2. PROB. Déterminer le volume d'un onglet sphérique** ADBFA **et la surface de la lune qui lui sert de base.**

Il est clair que ce volume et cette surface sont tous deux en raison directe de la valeur ou grandeur de l'angle DCF qui mesure (**878**) l'inclinaison mutuelle des deux plans ADB, AFB qui contiennent l'onglet. En effet, si l'on suppose que l'onglet et la sphère entière soient divisés par un nombre indéfini de plans ayant pour intersection commune le diamètre AB et que tous les angles d'inclinaison ECF, FCG, etc., de ces plans soient égaux (**50** et **51**) entre eux, l'onglet et la sphère solide seront de cette manière divisés tous deux en unités égales de volume et de surface, c-.à-d. en un nombre d'onglets partiels AEBFA, AFBGA égaux, et leurs surfaces respectives en un nombre correspondant de lunes égales; car, par superposition, du demi-grand cercle (**983**) AGB d'un de ces onglets au demi-grand cercle égal AEB d'un des autres, l'autre plan AFB du premier tombera sur le plan correspondant ADB du second, à cause des inclinaisons égales DCE, FCG de ces plans, et comme (**974**) nul point de la lune ou base du premier n'est plus ou moins éloigné du centre C de la sphère qu'un point quelconque du second, les deux surfaces tomberont entièrement l'une sur l'autre et les onglets coïncideront dans toutes leurs parties et seront



en conséquence égaux. Or, la section DHG des droites DC, EC, FC, etc., est (**900**) un plan, à cause de AB perpendiculaire (**878**) à chacune d'elles ; de plus, ce plan est (**981**) un cercle et (**423**) les angles au centre sont proportionnels aux arcs qui les sous-tendent et aux nombres respectifs d'unités de mesure qu'ils contiennent, et chacune de ces unités correspond, comme on vient de le voir, à une unité de volume et de surface ; donc **l'onglet est à la sphère entière comme l'angle qui le contient est à 4 angles droits ou (427) comme l'arc qui mesure cet angle est à la circonférence entière, et la surface de la lune qui en est la base est aussi à celle de la sphère dans le même rapport.**

Pour résoudre le prob., il suffira donc d'établir (**Dém.** de **720**) le rapport de l'angle d'une lune ou d'un onglet donné à 4 angles droits. On fera ensuite les surface et volume de la sphère entière qu'on divisera dans le rapport ainsi trouvé, pour avoir la surface de la lune donnée et la solidité de l'onglet.

(1080) Cor. 1. Deux lunes ou deux onglets sphériques sont l'un à l'autre comme leurs angles respectifs.

(1081) Cor. 2. Le volume d'un onglet sphérique est égal au produit de la surface de la lune qui en est la base, par le tiers du rayon.

D'ailleurs, il est clair que l'onglet, comme la sphère, peut se décomposer en pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère et dont la somme des volumes est égale à la somme des surfaces de leurs bases, si petites qu'elles soient, multipliée par le tiers de la hauteur de ces pyramides, c.-à-d. par le tiers du rayon.

(1082) Sco. 1. Le volume d'une partie quelconque de la sphère solide contenue par un nombre indéfini de plans passant par le centre de la sphère, est égal (1076) à la surface sphérique de cette partie multipliée par le tiers du rayon; car, quelle que soit la forme de la surface sphérique, elle pourra se subdiviser en triangles ou poly-

gones assez petits pour qu'on puisse les regarder sensiblement comme surfaces planes et en obtenir en conséquence les surperficies par les règles (**437**) applicables à ces surfaces ; or ces faces seront les bases d'autant de pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère et pour hauteur commune le tiers du rayon ; donc, etc.

(**1083**) **Sco. 2.** Si du secteur et de l'onglet sphériques, ou même de la sphère entière, ou d'une partie quelconque (**1082**) de la sphère comprise par des plans passant par le centre, on enlevait une partie par une section parallèle à la surface sphérique de ces solides, il est clair d'après ce qui a déjà été dit au sujet des troncs de pyramides, qu'on obtiendrait les volumes de ces solides ou troncs de solides (*) en faisant la différence des volumes des solides entiers et partiels ; or les surfaces de deux sphères sont (**1074** 2°) comme les carrés de leurs rayons respectifs, et les surfaces sphériques des solides dont il s'agit sont évidemment des parties correspondantes ou homologues des surfaces des sphères dont ils font partie, et par suite, proportionnelles elles-mêmes aux surfaces de ces sphères ou aux carrés de leurs rayons ; on aura donc pour expression du solide dont il s'agit $A \times \frac{1}{3} R - a \times \frac{1}{3} r$, A et a étant les surfaces sphériques respectives des bases inférieure et supérieure du solide et R, r les rayons respectifs des sphères entière et partielle dont le solide entier et le solide partiel font partie. On aurait aussi surf. a : surf. A :: $r^2 : R^2$ et $a = \frac{A \times r^2}{R^2}$.

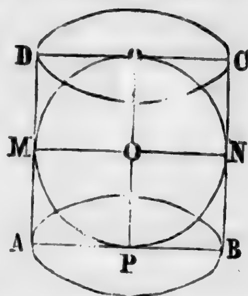
(**1084**) **Sco. 3.** Puisque les surfaces des sphères sont (**1074**) entre elles comme les carrés de leurs rayons, diamètres, ou autres lignes homologues, et que leurs solidités sont (**1075**) par la prop., comme leurs surfaces multipliées par leurs rayons ; il suit que **les solidités des sphères sont entre elles comme les cubes de leurs rayons,** diamètres ou autres

(*) Un obus ou une partie quelconque d'un obus comprise par des plans passant par le centre de la sphère dont l'obus fait partie, fournit l'idée des solides dont il s'agit dans ce paragraphe.

lignes homologues, et il est de plus évident que **les solidités de toutes parties homologues ou semblables des sphères sont entre elles comme les cubes des rayons, diamètres, ou autres lignes homologues de ces sphères.**

(**1085**) **Sco. 4.** Soit R le rayon d'une sphère; sa surface sera (**1072**) $4\pi R^2$ et sa solidité $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$ ou $\frac{4}{3}\pi R^3$. Soit D le diamètre, on aura $R = \frac{1}{2}D$ et $R^3 = \frac{1}{8}D^3$; d'où, la solidité de la sphère peut encore s'exprimer $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}D^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$.

(**1086**) **Sco. 5.** On a vu (**1072**) que la surface d'une sphère MNPQ est égale à quatre de ses grands cercles, et la surface latérale du cylindre circonscrit AC est égale (**993**) à la circonférence de sa base AB par sa hauteur AD ; or cette base est évidemment égale à un grand cercle de la sphère et cette hauteur au diamètre de la sphère ; donc la surface latérale ou convexe du cylindre est égale à quatre grands cercles ou sa surface entière à six grands cercles ; **la surface de la sphère est** donc **à celle du cylindre circonscrit comme 2 est à 3.**



2° De plus, la solidité de la sphère étant égale à sa surface par le tiers du rayon, et cette surface elle-même égale à quatre grands cercles, il suit que la solidité de la sphère est égale à quatre cônes ayant chacun pour base un grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère ou ce qui est la même chose à deux cônes ayant pour base un grand cercle et pour hauteur le diamètre de la sphère ou la hauteur du cylindre circonscrit ; or le cône est (**1052**) le tiers du cylindre circonscrit et la sphère par conséquent vaut les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit. **Les solidités du cône, de la sphère et du cylindre sont** donc **entre eux comme 1 : 2 : 3.**

3° **Les solidités de la sphère et du cylindre circonscrit** étant entre elles comme 2 : 3 et les surfaces de ces corps

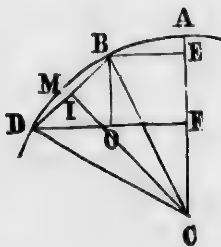
aussi comme 2 : 3 ; il suit que les solidités de ces corps **sont entre elles comme leurs surfaces.**

(1087) **Sco. 4.** Concevez un polyèdre dont toutes les faces soient tangentes à la sphère ; ce polyèdre peut être regardé comme composé de pyramides ayant toutes leur sommet au centre de la sphère et pour bases les faces du polyèdre ; or il est évident que toutes ces pyramides ont pour hauteur commune le rayon de la sphère ; de là, chaque pyramide sera égale en solidité à une face du polyèdre multipliée par le tiers du rayon, et le polyèdre entier sera égal en solidité au produit de sa surface par le tiers du rayon de la sphère inscrite. Il est donc évident que **les solidités des polyèdres circonscrits à la sphère sont entre elles comme les surfaces de ces polyèdres.** Ainsi, la propriété dont on a démontré la vérité dans le cas du cylindre circonscrit s'entent également d'une infinité d'autres corps.

2° On aurait pu aussi tirer directement du par. (663) que **les surfaces des polygones circonscrits au cercle sont entre eux comme les périmètres de ces polygones.**

PROP. XV. THÉOR.

(1088) Tout segment (975) d'une sphère a pour mesure la demi-somme de ses bases parallèles multipliée par sa hauteur EF, plus la solidité d'une sphère ayant pour diamètre cette hauteur.



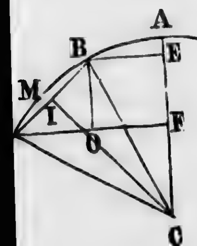
Il est clair que le segment sphérique est composé du cône tronqué engendré par la révolution du trapèze BEFD et du solide engendré par la révolution du segment de cercle BMD. Menez au centre C de la sphère les rayons BC, DC et aux lignes DF, BD, les perpendiculaires BO, CI.

En premier lieu, la solidité du cône tronqué décrit par DE est (1063) égale à $\frac{1}{3}\pi.EF\,(BE^2+DF^2+BE.DF)$.

(1089) En second lieu, le volume du solide décrit par le segment BMD est égal à la différence entre le secteur sphérique décrit par le secteur BCD et le solide décrit par le triangle isocèle BCD; or (1077) le secteur vaut $\frac{2}{3}\pi CB^2.EF$ et le sol. décrit par le triangle a pour mesure $\frac{2}{3}\pi CI^2.EF$; de là, le solide décrit par le segment$=\frac{2}{3}\pi CB^2.EF-\frac{2}{3}\pi CI^2.EF$ ou $\frac{2}{3}\pi(CB^2-CI^2)EF$. Maintenant le triangle rectangle CIB donne $CB^2-CI^2=BI^2=\frac{1}{4}BD^2$; de là, le sol. décrit par le segment BMD a pour mesure $\frac{2}{3}\pi.\frac{1}{4}BD^2.EF$ ou $\frac{1}{6}\pi BD^2EF$, c.-à-d. le produit continu de $\frac{1}{6}\pi$ par le carré de la corde BD par la distance EF entre les perpendiculaires BE, DF abaissées des extrémités de la corde sur l'axe.

(1090) Sco. Le solide décrit par le segment BMD est à la sphère qui a BD pour diamètre comme $\frac{1}{6}\pi.BD^2.EF:\frac{1}{6}\pi BD^3$ ou comme EF à BD; car $BD^2.EF:BD^3$ (ou$BD^2.BD$)$::$ $EF:BD$.

(1091) En troisième lieu, le segment dont il s'agit, et qui, comme on vient de le voir, est équivalent à la somme du cône tronqué et du sol. décrit par le segment BMD, a pour mesure $\frac{1}{6}\pi.BD^2.EF+\frac{1}{3}\pi.EF\,(BE^2+DF^2+BE.DF)$ ou $\frac{1}{6}\pi.EF.\,(2BE^2+2DF^2+2BE.DF+BD^2)$ car il est clair que $\frac{1}{3}(BE^2+DF^2+BE.DF)=\frac{1}{6}(2BE^2+2DF^2+2BE.DF)$. Maintenant, menant BO parallèle à EF, on aura $DO=DF-BE$; d'où, $DO^2=DF^2-2DF.BE+BE^2$ (365); et en conséquence, $BD^2=BO^2+DO^2=EF^2+DF^2-2DF.BE+BE^2$. Mettant cette valeur de BD^2 à la place de BD^2 dans l'expression $\frac{1}{6}\pi.EF.$ $(2BE^2+2DF^2+2BE.DF+BD^2)$ de la solidité du segment, supprimant les quantités $+2BE.DF$, $-2BE.DF$ qui se détruisent, on aura pour solidité du segment $\frac{1}{6}\pi\,EF.\,(3BE^2+3DF^2$ $+EF^2)$, expression que l'on peut décomposer en deux parties; l'une, $\frac{1}{6}\pi.EF.\,(3BE^2+3DF^2)$ ou $EF.\,(\frac{\pi.BE^2+\pi.DF^2}{2})$, c.-à-d.

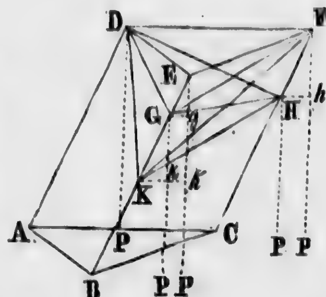


la demi-somme des bases multipliée par la hauteur ; l'autre, $\frac{1}{6}\pi$ EF.EF² ou $\frac{1}{6}\pi$ EF³, la sphère dont EF est (**1085**) le diamètre ; donc, etc. (**57**).

(**1092**) **Cor.** Si l'une ou l'autre des deux bases est nulle, le segment dont il s'agit devient une calotte (**975**) sphérique, ou un segment sphérique n'ayant qu'une seule base ; de là, tout segment sphérique à une seule base est équivalent à la moitié du cylindre de même base et hauteur que le segment, plus la sphère ayant pour diamètre cette hauteur.

PROP. XVI. THÉOR.

(**1093**) **Le volume d'un tronc** ABC-DGF ou ABC-DGH **de prisme triangulaire** ABC-DEF, c.-à-d., d'un prisme triangulaire dont on a enlevé une partie DEFG ou DEFHG, par un plan DGF ou DGH non parallèle à la base ABC du prisme, **est égal au produit de sa base par le tiers de la somme des hauteurs de ses côtés ou arêtes,** ou des perpendiculaires DP, GP, FP ou DP, GP, HP abaissées des sommets D, G, F, ou D, G, H, du tronc sur le plan de la base.



En premier lieu, pour ce qui est du tronc ABC-DGF **qui a deux** AD, CF, **de ses côtés égaux et le troisième côté** BG **moindre que chacun des deux autres,** la différence DEFG entre le tronc et le prisme entier, n'est autre chose qu'une pyramide triangulaire ayant pour base la base DEF du prisme et pour sommet le point G; or le volume du prisme = (**1020**) surf. ABC×DP (ou EP ou FP)=ABC×$\frac{1}{3}$(DP+EP+FP) et le volume de la

pyramide $=$ (**1049**) DEF (ou ABC) $\times \frac{1}{3}$ (EP$-$GP) ou Eg; d'où il suit que le vol. du tronc $=$ ABC $\times \frac{1}{3}$ (DP$+$EP$+$FP $-$Eg) ou, ce qui est la même chose : vol. ABC-DGF$=$ABC $\times \frac{1}{3}$ (DP$+$GP$+$FP).

(**1094**) **En second lieu, la différence entre le prisme entier et le tronc** ABC-DGH **dont deux** BG, CH, **des côtés sont égaux ou inégaux entre eux, mais chacun d'eux moindre que le troisième côté** AD, est la pyramide quadrangulaire EFHG-D qu'on réduira (**1037**) en une pyramide triangulaire équivalente EFK-D, en remplaçant (**292**) par un triangle équivalent EFK, le quadrilatère EFHG qui lui sert de base. Mais la pyramide EFK-D peut être considérée comme ayant pour base la base DEF du prisme et pour sommet le point K.

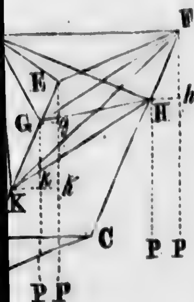
Soit $g\,k$$=G\,k$, FP$-HP=F\,h$$=$GK, à cause de GK$=$FH par construction (**292**) ; on aura E$g$$+F\,h$$=Eg$$+$$g\,k$$=E\,k$$=$hauteur de la pyramide DEF-K ; or vol. DEF-K$=$DEF (ou ABC) $\times \frac{1}{3}$ E$\,k$$=$DEF $\times \frac{1}{3}$ (E$g$$+F\,h$) et le volume du prisme entier étant ABC $\times \frac{1}{3}$ (DP$+$EP$+$FP), il restera, comme auparavant, pour vol. du tronc, ABC $\times \frac{1}{3}$ (DP$+$GP$+$HP).

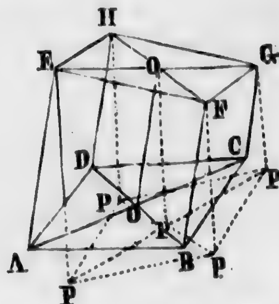
(**1095**) **Sco. 1.** Il est clair, d'après ce qui a été dit au par. (**1025**) que **le volume du tronc de prisme est encore égal au tiers du produit de la somme de ses trois côtés** AD, BG, FC, ou AD, BG, CH **par la surface d'une section perpendiculaire à ces côtés.**

2° Il est de même évident que l'on prendrait indifféremment pour base du tronc, le plan DGF ou DGH et pour hauteurs, les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, sur ce plan.

(**1096**) **Sco. 2. Le volume d'un parallépipède tronqué** AG **est égal au produit de sa base** ABCD **par la demi-somme des hauteurs** EP, GP ou FP, HP **de deux de ses côtés non adjacents** AE, CG ou BF, DH. (*)

(*) Dans la pratique, les surfaces EFGH étant rarement des plans parfaits, il vaut mieux prendre la moyenne des quatre hauteurs que la demi-somme de deux seulement de ces hauteurs.



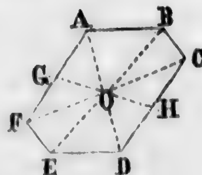


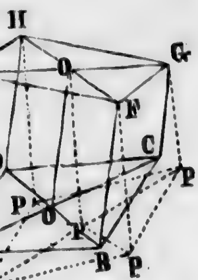
En effet, la section, par le plan EFGH, du parallépipède dont le tronc fait partie, est (912) un parallélogramme dont les diagonales EG, HF se bissectent mutuellement (283) en O; et parce que les droites EP, GP et FP, HP sont perpendiculaires (945) à un même plan ABCD, et par conséquent (910) parallèles entre elles, les figures EPPG, FPPH sont (894) des figures planes, et ces figures sont (172) des trapèzes.

Menant OP perpendiculaire au plan de la base et par conséquent parallèle à EP, FP, etc., OP sera (325) la moyenne ou demi-somme des hauteurs EP, GP, ainsi que de celles FP, HP, des côtés correspondants du tronc; or, le vol. du prisme tronqué ABD–EFH=(par la prop.) ABD$\times\frac{1}{3}$ (EP+FP+HP), le vol. du tronc BCD–FGH=BCD$\times\frac{1}{3}$ (FP +GP+HP) et parce que (FP+HP)=(EP+GP) à cause de OP commune aux deux trapèzes FPPH, EPPG, il est clair que la somme des volumes des deux troncs composants =(ABD+BCD)$\times\frac{1}{2}$(EP+GP)=ABCD$\times\frac{1}{2}$(EP+GP)=ABCD $\times\frac{1}{2}$ (FP+HP)=AG.

Il est a peine nécessaire de remarquer que toute autre position du plan de section EFGH autour du point O (OP demeurant constant) donnerait le même volume.

(**1097**) **Sco. 3.** Il suit assez directement du dernier par. que **le volume d'un tronc de prisme ayant pour base un polygone régulier quelconque ou toute autre figure** ACE **capable d'être divisée par une diagonale ou un diamètre** AD, BE, etc. **en deux figures égales (203 DÉF.)** ABCF, DEFC **est égal à sa base multipliée par la demi-somme des hauteurs de deux quelconques** F, C **ou**

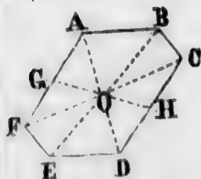




elles, les figures
nes, et ces figures

le la base et par
P sera (**325**) la
, GP, ainsi que de
du tronc ; or, le
la prop.) ABD×$\frac{1}{3}$
GH=BCD×$\frac{1}{3}$ (FP
P+GP) à cause de
EPPG, il est clair
ones composants
EP+GP)=ABCD

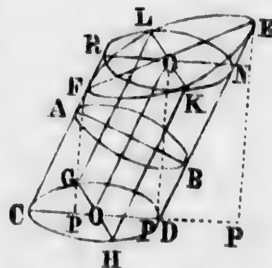
que toute autre
du point O (OP
olume.
t du dernier par.
nt pour base un
utre figure ACE



A, D, etc. **de ses côtés opposés,** ou de deux autres points opposés quelconques G, H, à cause de $\frac{1}{2}$ (A+D)=O=$\frac{1}{2}$ (B+E) =$\frac{1}{2}$ (G+H)=$\frac{1}{2}$ etc.

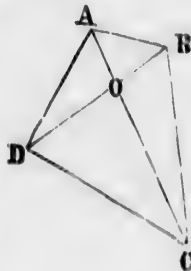
On peut aussi dire de tout tronc de prisme de cette espèce, que son volume est égal à la surface de sa base (supérieure ou inférieure) par la perpendiculaire abaissée du point milieu O de sa base opposée sur le plan de la première ; énoncé, qui s'applique également à tout tronc de parallélépipède.

(**1098**) **Sco. 4**. En général, **on fera le volume d'un tronc de prisme quelconque, en calculant séparément** (**1093**) **celui de tous les troncs de prismes triangulaires composants, pour prendre ensuite la somme de ces volumes.** (*)



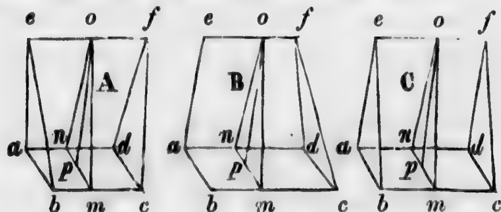
(**1099**) **Sco. 5**. Le cylindre droit ou oblique n'étant autre chose qu'un prisme ayant pour section AB un cercle ou polygone infinitaire, et pouvant se diviser par un plan CDNR, GHKL, etc., en deux demi-cylindres ou demi-prismes égaux, et ses bases, en figures

(*) **Rem**. Si l'étudiant était d'abord tenté de croire que l'on dût arriver au volume d'un prisme quelconque, comme on le fait pour un tronc de parallélépipède ou de tout autre prisme ayant pour bases des figures divisibles par un diamètre en parties égales, c.-à-d., en prenant pour hauteur moyenne la demi-somme des hauteurs de deux de ses côtés opposés ou, ce qui est la même chose, le quotient de la somme des hauteurs de tous ses côtés par le nombre de ces côtés ; il lui suffira de considérer le cas d'un tronc de prisme ayant pour base un quadrilatère irrégulier ABCD, pour s'apercevoir que la règle applicable au tronc de parallépipède ne peut donner qu'un résultat plus ou moins approximatif.



En effet, il est clair que si, pendant que la surface ADC, par exemple, excède ABC, on a en même temps la hauteur D > B, cette plus grande surface affectée de la plus grande hauteur, donnera au tronc composant ADC un volume plus grand

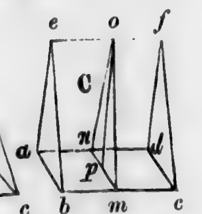
égales RKN, RLN ou LKN, LKR, etc.; il suit que l'on **obtiendra le volume d'un tronc CE de cylindre droit ou oblique, en multipliant la surface de sa base par la demi-somme OP de sa moindre et de sa plus grande hauteur FP, EP ou des hauteurs de deux points L, K situés aux extrémités d'un même diamètre quelconque** LK; ou ce qui est (**1026**) la même chose, en faisant le produit d'une section AB perpendiculaire à son axe par la demi-somme OO de ses côtés CF, DE ou HK, GL, etc., l'onglet LKNE qu'on enlève du tronc, d'une part, étant évidemment égal en tout à celui LKRF qu'on lui ajoute d'autre part.



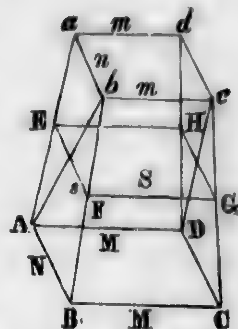
(**1100**) **Sco. 6. Le coin** A, B, C, est un solide ayant pour **base** $a\,b\,c\,d$ un rectangle et dont l'arête $e\,f$ (parallèle à $a\,d$ et à $b\,c$) est plus grande que $a\,d$ (fig. A), plus petite que $a\,d$ (fig. B), ou égale à $a\,d$ (fig. C). Les solides A, B ne sont donc autre chose que des prismes triangulaires tronqués, et le sol. C, un prisme triangulaire entier (ou un demi-parallépipède) dont les volumes sont respectivement égaux (**1095**) à la surf. d'une section $o\,m\,n$, perpendiculaire aux côtés parallèles du solide, $\times\frac{1}{3}\,(a\,d+b\,c+e\,f)$.

que celui qu'on obtiendrait en faisant entrer en compte la moindre hauteur B, c.-à-d. en multipliant la base ADC par le quart de la somme des quatre hauteurs A, B, C, D; et de même, si pendant que la base ADC excède ABC, on a D<B, il est non moins évident que le vol. du tronc composant ADC affecté de la moindre hauteur du point D, sera plus petit que celui que donnerait le produit de la base ADC par une moyenne à la quelle la plus grande hauteur B aurait servi d'élément.

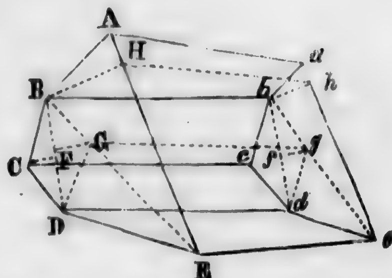
De plus, la somme des volumes des troncs composants ADC, ABC ou DCB, DAB, étant tantôt plus grande et tantôt moindre que le volume que l'on obtiendrait en faisant le produit de la base ABCD par le quart de la somme des hauteurs des quatre côtés A, B, C, D; il arrivera quelquefois que la plus grande base affectée d'une moindre hauteur donnera un résultat exact.



Or, surf. $omn = mn$ ou ab, largeur de la base, par $\frac{1}{2}op$, perpendiculaire menée d'un point quelconque o de l'arête ef au plan ac de la base. L'expression, surf. $omn \times \frac{1}{3}(ad+bc+ef)$ peut donc se traduire : $\frac{1}{6}(ad+bc+ef) \times ab \times op$, ou (à cause de $ad=bc$) $\frac{1}{6}(2\overline{ad+ef} \times ab \times op)$.



(1101) **Sco 7. Le prismoïde rectangulaire** Bd est un solide dont les bases opposées AC, ac sont des plans parallèles et des rectangles à côtés parallèles. Le prismoïde se décompose en deux coins ou troncs de prisme triangulaire ABCD–bc et $abcd$–AD. Soient M et N, m et n, S et s les longueurs et largeurs respectives de la base inférieure AC, de la base sup. ac et d'une section EG à distances égales des bases parallèles et elle même parallèle à ces bases et soit h la hauteur du solide ; on aura par le dernier par. : vol. B$d = \frac{1}{6}(2\overline{M+m} \times N \times h) + \frac{1}{6}(\overline{2m+M} \times n \times h)$ ou, ce qui est la même chose, $\frac{1}{6}h(\overline{2M \times N} + \overline{m \times N} + \overline{2m \times n} + \overline{M \times n})$; mais (325) $S = \frac{1}{2}\overline{M+m}$ et $s = \frac{1}{2}\overline{N+n}$, ce qui réduit l'expression pour le volume du prismoïde à $(\overline{M \times N} + \overline{m \times n} + 4\overline{S \times s}) \times \frac{1}{6}h$; car, après avoir retranché $\overline{M \times N} + \overline{m \times n}$, il reste $\overline{M \times N} + \overline{m \times N} + \overline{m \times n} + \overline{M \times n}$, ou $\overline{M+m} \times N$ et $\overline{M+m} \times n$, ou $\overline{M+m} \times \overline{N+n}$, c.-à-d. $2S \times 2s$ ou $4S \times s$. **Pour obtenir le volume du prismoïde rectangulaire, il faut donc à la somme des surfaces de ses bases parallèles, ajouter 4 fois la surface d'une section parallèle à demi-distances entre ces bases, multiplier le tout par la hauteur du solide et prendre la 6ième partie du résultat.**



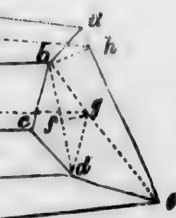
(1102) **Sco. 8. Le volume d'un prismoïde quelconque** (*) ABCDE -*abcde*, c.-à-d. d'un solide ayant pour bases parallèles, des figures planes quelconques AD, *a d*, à côtés parallèles AE, *a e* DE, *d e* AB, *a b* etc., **est égal au 6ième du produit de sa hauteur** ou de la distance perpendiculaire qui sépare ses bases parallèles **par la somme des surfaces de ses bases plus quatre fois la surface d'une section parallèle à demi-distance entre elles.**

Car les deux bases peuvent se réduire en triangles correspondants BCD, *b c d* BDE, *b d e* ABE, *a b e* et chacun de ces triangles en deux ou plusieurs triangles rectangles ABH, *a b h* EBH, *e b h* GDE, *g d e* etc. Maintenant, il est clair que chacun des solides composants ABH-*a b h*, EBH-*e b h*, etc. peut être regardé comme un demi-prismoïde rectangulaire, et puisque (**73. Ax.**) les moitiés sont comme les touts et que ce qui est vrai de chaque prismoïde triangulaire composant, l'est également de la somme de ces solides, il suit que la règle pour obtenir le vol. du prismoïde rectangulaire s'applique indifféremment à tout autre prismoïde quelconque.

SCOLIE GÉNÉRAL.

(**1103**) Les principales propositions de ce livre se rapportant à la solidité des polyèdres et des trois corps ronds (**991**) peuvent se résumer comme suit.

(*) Les déblais et remblais pour canaux et voies-ferrées, etc. offrent le plus souvent au calcul des solides de cette espèce. Remarquons aussi qu'il faut se garder de confondre le prismoïde, dont les côtés opposés ne sont que parallèles entre eux, avec le tronc de pyramide dont les bases opposées sont des figures semblables (**525, 526**), c.-à-d. dont les côtés sont proportionnels en même temps que parallèles.



1° Soit B la base d'un **prisme,** H sa hauteur ; la solidité du prisme sera (**1020**) B×H, ou BH.

Soit encore S la section d'un **prisme** perpendiculaire à son côté, C le côté ou la hauteur inclinée du prisme ; la solidité sera (**1025**) S×C, ou SC.

2° Soit B la base d'une **pyramide,** H sa hauteur ; la solidité de la pyramide sera (**1049**) $B \times \frac{1}{3} H$, ou $H \times \frac{1}{3} B$, ou $\frac{1}{3} BH$.

3° Soit H la hauteur d'un **tronc de pyramide à bases parallèles** A et B ; $\sqrt{AB}$ sera la moyenne proportionnelle entre ces bases, et la solidité du tronc sera (**1061**) $\frac{1}{3} H \times (A+B+\sqrt{AB})$.

4° Soient B et b les bases d'un **tronc quelconque de pyramide,** H et h les hauteurs respectives des pyramides entière et partielle ; la solidité du tronc sera (**1062, 1067**) $B \times \frac{1}{3} H - b \times \frac{1}{3} h$.

5° Soient P et p les solidités de deux **prismes ou pyramides semblables,** A et a deux côtés ou arêtes homologues ; on aura (**1032, 1070**) $P : p :: A^3 : a^3$.

6° Soit R le rayon de la base d'un **cylindre droit,** H sa hauteur ; la solidité du cylindre sera (**1023**) $\pi R^2 \times H$, ou $\pi R^2 H$.

Soit B la base d'un **cylindre oblique,** H sa hauteur ; sa solidité sera (**1026**) B×H ou BH.

Soit encore S la section d'un **cylindre oblique** perpendiculaire à son côté, C le côté ou la hauteur inclinée du cylindre ; sa solidité sera (**1026**) S×C ou SC.

7° Soit R le rayon de la base d'un **cône droit,** H sa hauteur ; la solidité du cône sera (**1050**) $\pi R^2 \times \frac{1}{3} H$, ou $\frac{1}{3} \pi R^2 H$, (**1060**).

Soit B la base d'un **cône oblique,** H sa hauteur ; sa solidité sera (**1055**) B×H ou BH.

8° Soient A et B les rayons des **bases parallèles** d'un **cône tronqué,** H sa hauteur; la solidité du tronc sera (**1063**) $\frac{1}{3}\pi H\,(A^2+B^2+AB)$.

9° Soient B et *b* les bases d'un **tronc de cône quelconque,** H et *h* les hauteurs des cônes entier et partiel; la solidité du tronc sera (**1068**) $B\times\frac{1}{3}H-b\times\frac{1}{3}h$.

10° Soit R le rayon d'une **sphère**; sa soliditè sera (**1075, 1085**) $\frac{4}{3}\pi R^3$, ou $\frac{1}{6}\pi\,(2R)^3$.

11° soit R le rayon d'un **secteur sphérique,** H la hauteur de la zone qui en constitue la base; la solidité du secteur sera (**1077**) $\frac{2}{3}\pi R^2H$.

12° Soient P et Q les deux bases d'un **segment sphérique,** H sa hauteur; la solidité du segment sera (**1088**) $\frac{P+Q}{2}\times H+\frac{1}{6}\pi H^3$.

Si le segment sphérique n'a qu'une base P, l'autre étant nulle; la solidité sera (**1092**) $\frac{1}{2}PH+\frac{1}{6}\pi H^3$.

13° Soient S et *s* les surfaces extérieure et intérieure d'une **sphère creuse** ou évidée, ou d'une **partie de sphère creuse comprise par des plans passant par le centre,** R et *r* les rayons extérieur et intérieur de cette sphère ou partie de sphère; les solidités respectives seront (**1083**) $S\times\frac{1}{3}R-s\times\frac{1}{3}r$.

14° Soient P et *p* les solidités de deux **cylindres ou cônes semblables,** ou celles de deux **sphères,** A et *a* deux lignes homologues quelconques de ces corps; on aura (**1032, 1070, 1084**) $P:p::A^3:a^3$.

15° Soient P et *p* les solidités de deux **polyèdres semblables** quelconques ou de deux **troncs** ou parties **homologues** quelconques **de polyèdres semblables,** ou **de cylindres et cônes semblables** ou **de sphères,** on démontre facilement que $P:p::A^3:a^3$, A et *a* étant deux lignes homologues quelconques de ces corps.

16° Soit S la surface de la base d'un **tronc de prisme triangulaire** et A, B, C les hauteurs de ses côtés ; le vol. (**1093**) $= S \times \frac{1}{3}(A+B+C)$.

Soit encore S la surface d'une section d'un **tronc de prisme triangulaire** perpendiculaire à ses côtés et A, B, C ces côtés ; le vol. du tronc=(**1095**) $S \times \frac{1}{3}(A+B+C)$.

17° Soient A, B, C, les côtés parallèles d'un **coin**, L la largeur de sa base et H sa hauteur ; on aura (**1100**) pour vol. du coin $\frac{1}{6}(\overline{A+B+C} \times L \times H)$.

18° Soient B et *b* les bases opposées d'un **prismoïde**, S la surface d'une section parallèle à demi-distance entre ces bases ; le vol. du prismoïde sera (**1102**) $\frac{1}{6}(\overline{B+b+4S} \times H)$.

19° Soit S la suface de la base d'un **tronc de parallélépipède, de cylindre, ou de prisme ayant pour base une figure divisible par une diagonale en deux parties égales** et soient A et C les hauteurs de deux côtés ou points situés aux extrémités opposées d'un diamètre de la base (**1095**, 2°) ; le vol. du tronc sera (**1096, 1099, 1097**) $S \times \frac{1}{2}(A+C)$.

20° Soient ABC, ACD, ADE, etc. les bases des troncs triangulaires composants d'un tronc de prisme quelconque et A, B, C, D, etc. les hauteurs de ses côtés ; le vol. sera (16°) et (**1098**) $\overline{ABC \times \frac{1}{3}(A+B+C)} + \overline{ACD \times \frac{1}{3}(A+C+D)} + \overline{ADE \times \frac{1}{3}(A+D+E)} +$etc.

PROBLÈMES.

(**1104**) Il suffit de ce qui à déjà été dit (pars. **42**, **349**, **571** LEM., **674** à **681**, **684** à **689**, etc.) pour indiquer de suite la manière de **revenir du volume d'un solide quelconque à ses éléments,** ou pour **obtenir et comparer entre eux les volumes absolus ou relatifs des divers solides, au moyen de données autres que celles dont on a jusqu'ici traité.** Soit, par exemple à :

(1105) **PROB. Déterminer le diamètre d'une sphère dont on a le volume.** A cet effet, il suffit de supposer (prob. analogue à **684**) à la sphère donnée, un diamètre quelconque, faire le volume de la sphère supposée et poser ensuite (**1084**) : le volume de le sphère supposée (:) est au cube de son diamètre comme (::) le volume de la sphère donnée (:) est au cube de son diamètre ; extrayant la racine cubique du quotient, on obtient le diamètre voulu.

(1106) **On aura la hauteur d'un prisme en divisant son volume par la surface de sa base,** et **celle d'une pyramide ou d'un cône en divisant son volume par le tiers de sa base** ; de même, **le quotient du volume du prisme par sa hauteur donnera sa base,** et **celui du volume d'une pyramide ou d'un cône par sa hauteur, le tiers de sa base.**

(1107) **PROB. Connaissant le nombre d'unités de volume dans un prisme donné ; déterminer les dimensions linéaires du solide, en termes de ce volume.** (prob. analogue à **676**). A cette fin, on établira d'abord (page 180) la surface de sa base, en mesurant, au moyen d'une même unité linéaire quelconque, les éléments de ses surfaces composantes (**352**) ; on fera ensuite le produit de cette base par la hauteur du solide exprimée en unités égales à celles des côtés de la base ; puis on établira la proportion : le volume supposé (ou calculé) du prisme (:) est au volume donné (:) comme le cube d'un de ses côtés en unités de l'échelle qui a servi à le mesurer (:) est au cube du nombre d'unités linéaires de l'espèce de celles du volume donné. La racine cubique du résultat sera le nombre d'unités linéaires dans le côté choisi, et le nombre de mètres, pieds, pouces, lignes etc., dans ce même côté, divisé par celui de ces unités, établira l'espèce c.-à-d. la grandeur d'une de ces unités, et au moyen d'une échelle de ces unités on déterminera enfin les dimensions des autres côtés du solide donné en termes du volume.

1108) **Sco.** Inutile d'observer que **cette règle est applicable à tout autre polyèdre ou corps quelconque** dont on aurait la solidité, faisant attention seulement à la manière d'établir son volume auxiliaire, suivant que le solide serait une pyramide ou un cône, une sphère, un prismoïde, un tronc de prisme, de pyramide ou de cône, etc., etc.

(1109) PROB. Etant donnés le volume V d'un parallélipipède et le rapport m à n à h entre ses longueur, largeur et hauteur ; trouver ces trois dimensions. (prob. analogue à **694**).

On fera le produit continu des termes m, n, h du rapport, pour obtenir (**1030, 1032**) un volume auxiliaire v, et désignant par M, N, H les côtés ou dimensions cherchés, on fera $v : V :: m^3 : M^3 :: n^3 : N^3 :: h^3 : H^3$, ou après avoir trouvé $M = \sqrt[3]{M^3}$ on fera $m : M :: n : N :: h : H$.

(1110) PROB. Diviser un cône ou une pyramide en deux parties de même volume par un plan parallèle à celui de la base (prob. analogue à **569**). Soit V le volume du solide donné, S son sommet, SA son côté ; soit aussi v le vol. du solide partiel$=\frac{1}{2}$V, Sa son côté ; on fera (**1070**) $V : v :: SA^3 : Sa^3$ et on aura $Sa = \sqrt[3]{Sa^3}$; menant alors par le point a, un plan parallèle à la base, le problème sera résolu.

(1111) **PROB.** Si l'on avait à **diviser le cône ou la pyramide en plusieurs parties ayant entre elles des rapports donnés, par des plans parallèles à la base** ; (prob. analogue à **569**, 2°). Appelant encore SA le côté du solide donné ; a, b, c, d, etc. les points de trajet des plans parallèles, et m, n, r, etc. les termes du rapport ; on diviserait d'abord le nombre d'unités de volume V en parties M, N, R, etc. ayant entre elles le rapport voulu et on ferait $V : SA^3 :: M : Sa^3 :: \overline{M+N} : Sb^3 :: \overline{M+N+R} : Sc^3 :: \overline{M+N+R+\text{etc.}} : Sd^3$ et ainsi de suite, ou encore $V : SA^3 :: V - M : Sa^3 :: V - \overline{M+N} : Sb^3 :: V - \overline{M+N+R} : Sc^3 ::$ etc. suivant la disposition à observer dans l'ordre relatif des parties, et aussi suivant que l'on

poursuivrait l'opération de la base au sommet ou du sommet à la base.

(1112) **PROB.** **Eût on un tronc de cône ou de pyramide à bases parallèles, à diviser en parties proportionnelles, par des plans parallèles aux bases** ; (prob. analogue à **754**) on compléterait le solide pour faire entrer en compte son volume additionnel ou auxiliaire, et on procéderait ensuite comme au dernier par.

(**1113**) **Rem.** On ne peut (**1019**) trouver, par construction géométrique, la racine cubique (**40**) d'un volume ou le côté d'un cube équivalent en volume à un corps donné, tout aisé qu'il soit (**Prop. XI, LIV. 1** et par. **376**) d'arriver à la racine carrée (**40**) d'une surface, et on ne peut en conséquence résoudre d'une manière purement géométrique les problèmes à la solution desquels la racine cubique est un élément essentiel. Néanmoins quand il s'agit de prismes, de cylindres, de pyramides ou de cônes à hauteurs égales ou à bases égales, ou ayant entre elles des rapports donnés ; tous ces corps étant entre eux comme leurs bases quand leurs hauteurs restent constantes, ou comme leurs hauteurs quand leurs bases ne varient point ; on pourra résoudre par construction géométrique les problèmes ayant trait à ces solides ; en effet.

(**1114**) **PROB.** Soit à **construire un prisme ayant pour base un octogone régulier et équivalent en volume à la somme de deux ou plusieurs prismes donnés quelconques de même hauteur que le prisme voulu.**

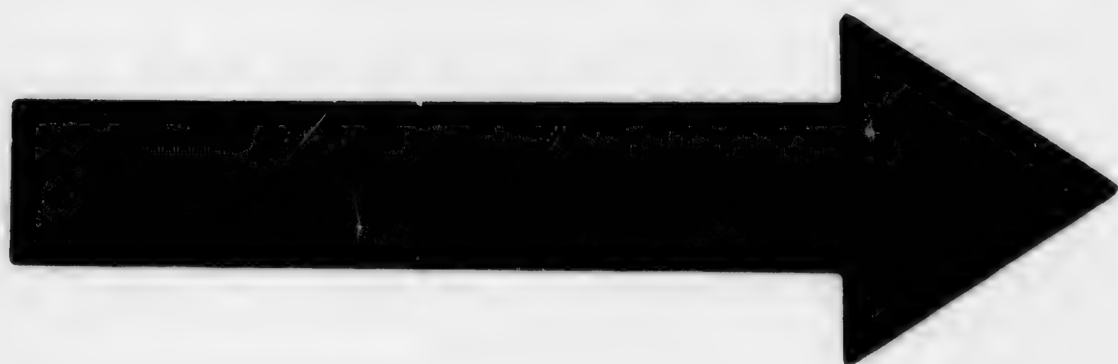
Le polygone régulier qui doit servir de base au prisme demandé est composé (**622**) de 8 triangles isocèles égaux, ayant pour bases les côtés, et pour côtés, les rayons obliques du polygone. Un de ces triangles composants aura pour surface la huitième partie de la surface combinée des bases de tous les prismes donnés, et (**620**) pour angle vertical, un huitième de quatre angles droits. Le problème se réduit donc à décrire un triangle qui remplira ces conditions, ou à trouver

le côté du triangle, avec ce côté décrire un cercle dont on divisera (**633** et **651**) la circonférence en 8 parties égales, pour relier ensuite par des droites les points de division et compléter ainsi la base voulue du prisme requis. Pour cela, on réduira (**302**) en un rectangle équivalent l'ensemble des bases des prismes donnés, on divisera ensuite (**330**) ce rectangle en huit parties égales et on fera (**674**) un triangle isocèle équivalent en surface à l'une de ces parties et dont l'angle au sommet soit=($\frac{4 \text{ angles droits}}{8}$). Ayant ensuite mené, à une distance de la base égale à la hauteur des prismes donnés, un plan parallèle à cette base, et relié les plans opposés par des droites parallèles partant de chacun des points angulaires de l'octogone et faisant avec la base un angle quelconque, le problème sera résolu.

(**1115**) **PROB. Etant donnés un prisme et une pyramide de même hauteur ; construire un cylindre qui soit équivalent en volume à la somme de ces solides et dont la hauteur soit moitié de celle du prisme.**

On fera à cet effet un cercle dont la surface soit double de la somme des surfaces de la base du prisme et du tiers de la base de la pyramide. On a vu (**431**) que le cercle est équivalent à un rectangle ayant pour hauteur le rayon et pour base une ligne égale en longueur à la demi-circonférence, et on sait que le rapport entre le rayon et la demi-circonférence est (**686**) de 7 : 22 ou 113 : 355 ou 1 : 3. 14159 etc. On a donc à faire (**302**) un rectangle quelconque de surface égale à celle de la base du cylindre voulu, diviser (**694**, **330**) cette surface en 7×22 parties, réduire (**376**) une de ces parties en un quarré équivalent et prendre le rayon égal à 7 fois le côté de ce carré.

On obtiendrait **arithmétiquement** (**684**) le rayon voulu, en divisant le nombre d'unités dans la surface par .7854, extrayant la racine carrée du quotient et prenant la moitié de la racine.



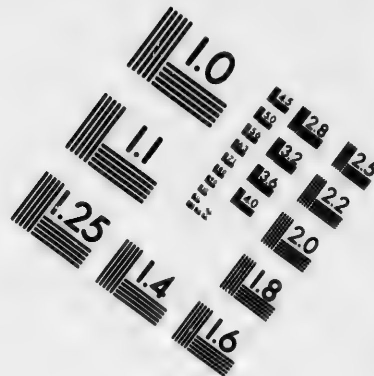
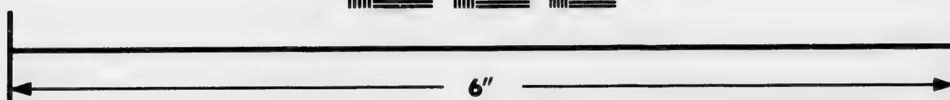
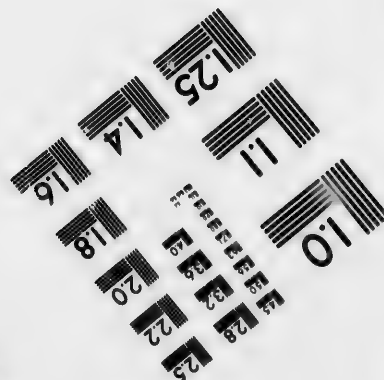


IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)



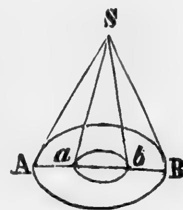








(1116) PROB. Etant donnés un prisme, une pyramide de hauteur double et de base égale et un cylindre de hauteur moitié et de base triple de celle du prisme; réduire le tout à un cône évidé dont la hauteur soit à celle du prisme comme 5 est à 3 et dont le diamètre égale la hauteur.



On aura d'abord pour base d'un cylindre équivalent à la somme des solides donnés et de hauteur égale à celle du prisme, un cercle de surface égale à la somme de la base du prisme, les $\frac{2}{3}$ de la base de la pyramide et les $\frac{3}{2}$ de la base du cylindre. Maintenant, si la hauteur du cône devait être égale à celle du cylindre, sa base serait nécessairement triple de celle du cylindre pour donner même volume, mais comme la hauteur du cône doit être $\frac{5}{3}$ de celle du cylindre, il est clair que la base du cône voulu devra être les $\frac{9}{5}$ de celle du cylindre, puisque $\frac{5}{3}\times\frac{9}{5}=3$. Il reste à faire la surface d'un cercle du diamètre donné, de laquelle on déduira celle de la base annulaire du cône voulu pour avoir celle du cercle *a b* dont on aura le rayon par la méthode du par. (**684**) ou par constr. comme au par. (**1115**).

(**1117**) **Rem.** Ces quelques problèmes sur les solides suffiront pour donner une idée de la manière de résoudre presque tous ceux qui pourraient se présenter, soit en mettant à profit les connaissances déjà acquises, ou en faisant une combinaison ou modification convenable des méthodes enseignées.

Observons aussi comme on l'a fait (page 180) au sujet des lignes et surfaces, que la solution numérique de tout problème ayant trait aux solides, offrira toujours l'avantage d'être de beaucoup plus concise et facile que la solution obtenue par construction géométrique, et les éléments numériques nécessaires pourront toujours s'obtenir à tel

dégré d'exactitude que l'on voudra, au moyen d'une échelle divisée et subdivisée en parties égales assez petites pour éviter toute erreur sensible dans la comparaison des volumes de solides dont les côtés ou autres lignes homologues seraient plus ou moins incommensurables.



DES POLYÈDRES RÉGULIERS.

(1118) Un **polyèdre régulier** est un solide dont toutes les faces sont des polygones réguliers et égaux, et dont les angles solides sont en conséquence (**935, 938 Cor.**) tous égaux entre eux. Il y a cinq polyèdres de cette espèce.

(**1119**) **En premier lieu.** Si les faces composantes du solide sont des triangles équilatéraux, on pourra en former des polyèdres dont les angles solides seront contenus par trois de ces triangles, par quatre, ou par cinq : de là, il résulte trois corps réguliers, le trièdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. L'on ne peut en former aucun autre avec des triangles équilatéraux ; car six angles d'un triangle équilatéral valent quatre angles droits et ne peuvent (**931**) former un angle solide.

(**1120**) **En second lieu.** Si les faces sont des carrés, leurs angles pourront se disposer trois à trois ; d'où il résulte **l'hexaèdre** ou **cube** (**949**). Quatre angles d'un carré font quatre angles droits et ne peuvent former un angle solide.

(**1121**) **En troisième lieu.** Si les faces sont des pentagones réguliers, leurs angles pourront s'adapter trois à trois, et il en résultera le **dodécaèdre** régulier.

On ne saurait aller au-delà, trois angles d'un hexagone régulier étant égaux à quatre angles droits et les trois d'un heptagone, plus grand.

(**1122**) Donc, il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers, trois formés par des triangles équilatéraux, un par des carrés et un avec des pentagones.

ON DÉMONTRE FACILEMENT LES PROPOSITIONS SUIVANTES.

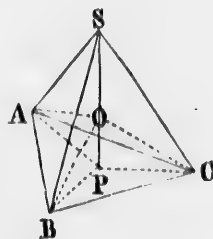
(**1123**) Tout polyèdre régulier peut se diviser en autant de pyramides régulières (**959**) que le polyèdre a de faces. Le sommet commun de ces pyramides est le centre du polyèdre et en même temps (**1087**) celui des sphères inscrite et circonscrite.

(**1124**) **La solidité d'un polyèdre régulier est égale (1087) à sa surface multipliée par le tiers du rayon de la sphère inscrite.**

(**1125**) Deux polyèdres réguliers de même nom sont (**972**) deux solides semblables et leurs dimensions homologues sont proportionnelles : de là, les rayons des sphères inscrites ou circonscrites sont entre eux comme les côtés des polyèdres.

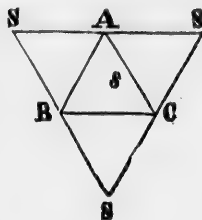
(**1126**) Si l'on inscrit dans une sphère, un polyèdre rég., les plans menés par le centre et les côtés ou arêtes du polyèdre, diviseront la surface de la sphère en autant de parties ou de figures (triangles (**1148**) ou polygones (**1150**) sphériques) semblables et égales, que le polyèdre a de faces; car, les côtés égaux des faces composantes sont en même temps les cordes des arcs de grands cercles (**983**) qui mesurent les angles plans contenants de chaque pyramide composante du polyèdre, et ces arcs sont égaux puisque les côtés ou cordes qui les sous-tendent sont égaux et les rayons égaux ; ce qui permet de comparer par superposition et de prouver l'égalité des surfaces sphériques dont il s'agit.

DU TÉTRAÈDRE.



(**1127**) Pour **construire le tétraèdre,** on élèvera au point milieu P du triangle équilatéral ABC qui doit lui servir de face, une perpendiculaire indéfinie PS et du point A, avec un rayon AB, on intersectera la perpendiculaire en S, d'où l'on mènera SB, SC et la pyramide ABC–S sera le tétraèdre voulu; car, puisque PA=PB=PC, on a (**901**) SA=SB=SC et comme AS=AB=BC=AC, les quatre faces du solide seront des triangles égaux à ABC et tous les angles solides A, B, C, S seront aussi égaux, (**935**) étant formés chacun de trois angles plans égaux l'un à l'autre.

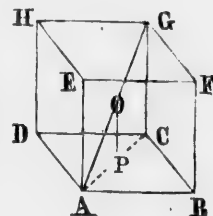
(**1128**) **Trouver le** centre commun (**1123**) O des sphères inscrite et circonscrite. A cet effet, dans le triangle APS, rectangle en P, on a l'hypoténuse AS, côté ou arête du tétraèdre et l'on obtient facilement AP=BP=CP, pour trouver la perpendiculaire SP et l'angle ASP; or, le triangle AOS est isocèle, à cause de OA=OS; d'où, l'angle SAO=ASO pour trouver OS, rayon de la sphère circonscrite, et par suite OP=SP—OS=**rayon de la sphère inscrite**.



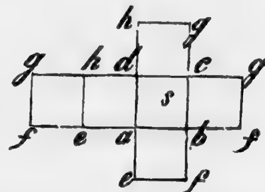
(**1129**) Soit s la **surface** développée **du tétraèdre**; cette surface est égale à 4 ABC, et le **volume** du solide est égal à sa surface s multiplié par le tiers du rayon de la sphère inscrite$=s\times\frac{1}{3}$OP.

L'HEXAÈDRE.

(**1130**) N'étant autre chose que le cube (**949**) et le cube un prisme droit, sa construction est facile (**941**) et ses faces composantes étant toutes des carrés égaux, ses angles solides sont égaux, étant formés chacun de trois angles droits.



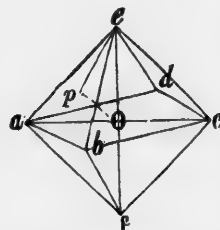
Il est clair (**1006**) que le rayon OA de la sphère circonscrite à l'hexaèdre rég. vaut la demi-diagonale AG du solide et qu'on peut trouver facilement le rayon OP de la sphère inscrite.



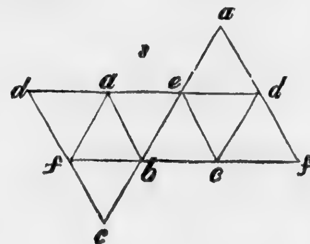
Comme on l'a déjà dit (**992. REM.**) on aura la **surface** s **de l'hexaèdre**=6 AC et son **volume**=$s\times\frac{1}{3}$ OP=AC×AE=AB^3.

L'OCTAÈDRE.

(**1131**) Dont la coupe $abcd$ est évidemment un carré et le rayon de la sphère circonscrite=O a=O c=O e=la demi-diagonale du carré bd, n'offrira dans sa construction aucune difficulté, et on obtiendra Op, rayon de la sphère inscrite, à l'aide du triangle Ope, rectangle en p et dans lequel on connaît l'hypoténuse Oe $=\sqrt{\frac{1}{2}(ae)^2}$ et un côté pe=(**902**) pa=pb.

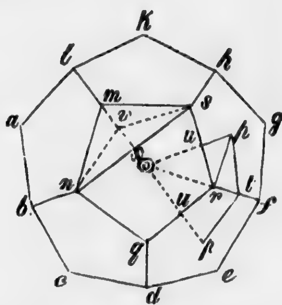


La **surface** s de l'octaèdre =8abe et son **volume**=$s\times\frac{1}{3}$ Op.



LE DODÉCAÈDRE.

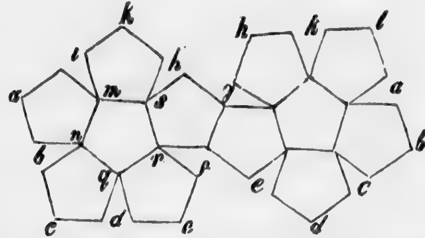
(**1132**) Pour construire ce solide ou pour en obtenir le volume, quand on en connaît le côté $a\,b$, $m\,n$, bn, ou la surface (**679**) $b\,m$, $n\,r$, d'un des plans composants ; il devient nécessaire de déterminer l'angle $p\,t\,p$ formé par deux $f\,h$, $f\,d$ de ses faces adjacentes. A cet effet, menez par la droite $n\,s$ un plan $n\,v\,s$ perdiculaire à l'intersection $b\,m$ prolongée des faces $m\,b$, $m\,h$ et intersectant en $v\,n$, $v\,s$, les plans prolongés de ces faces ; $n\,v\,s$ sera (**878** et **882**) l'angle requis et $n\,v\,x$ la moitié de cet angle. Dans le triangle $n\,v\,m$, rectangle en v (**882**), on a l'hypoténuse $m\,n$ et l'angle $n\,m\,v=$ supplément de $l\,m\,n$, pour trouver $n\,v$, et dans le triangle rectangle $n\,x\,v$ on a $n\,v$ et $n\,x=\frac{1}{2}n\,s$, demi-diagonale du pentagone $n\,r$, pour trouver l'angle voulu $n\,v\,x$.



Maintenant, soit O le centre du polyèdre et Op le rayon de la sphère inscrite : pour trouver ce rayon, on a dans le triangle O$\,p\,t$, rectangle (**977**) en p, l'angle O$\,t\,p=\frac{1}{2}\,p\,t\,p=$ $n\,v\,x$, et le côté $p\,t$, rayon droit du polygone composant. On aura le **volume**=surface$\times\frac{1}{3}$ rayon$=12\,n\,r\times\frac{1}{3}$ O$\,p$.

(**1133**) **Construction.** Soit encore O le centre du solide et o le centre d'un polygone composant, on aura O$\,o=o\,p$. Autour du centre o, décrivez dans un plan perpendiculaire à O$\,o$, le polygone $n\,r$, égal au polygone demandé ; par les points milieux u de ses côtés, menez des plans dont l'intersection commune soit O$\,o$ et dans chacun de ces plans menez du centre O un rayon Op tel que l'angle o O $p=p$ O p. Les extrémités p de ces rayons seront (**902**) les centres respectifs des cinq autres polygones du demi-dodécaèdre. On répétera l'opération à l'extrémité opposé o du diamètre $o\,o$, faisant

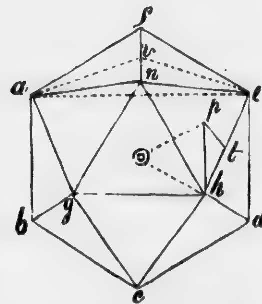
attention seulement de disposer le polygone opposé à *n r* de manière que le rayon droit de l'un corresponde au rayon oblique de l'autre.



D'ailleurs, on construirait aussi le dodécaèdre, en décrivant d'abord douze polygones égaux entre eux et au polygone voulu, et en disposant ensuite ces faces de manière à former entre elles des angles chacun égal à *p t p*.

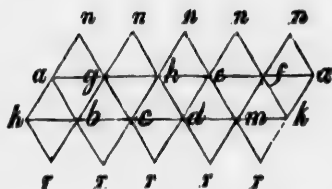
De plus, il suffit de faire attention que les sommets de tous (vingt) les angles solides du polyèdre sont situés, deux à deux, sur dix plans passant par le diamètre *o o* et formant l'un avec l'autre un angle$=\frac{1}{10}$ quatre angles droits, et que l'on obtient facilement les angles au centre *o* O *s*, *o* O *h*, *o* O *g*, pour s'apercevoir de suite comment on établirait sur la surface d'une sphère donnée les points nécessaires à la construction du solide.

L'ICOSAÈDRE.



(1134) Il suffit de ce qu'on vient de dire relativement à la construction du dodécaèdre, pour faire comprendre de suite celle du solide dont il s'agit ici. Soit *n* le sommet d'un des angles solides du polyèdre, *a e* la diagonale du pentagone régulier *a g h e f* formé par les côtés des plans composants de cet angle, et soit *a v e* un plan mené par la droite *a e* perpendiculairement à l'intersection *f n* des faces adjacentes *a f n*, *e f n* du solide. Il est clair que le plan *a v e* intersectera

le côté *fn* au point milieu *v* de ce côté, et on aura alors dans le triangle isocèle *a v e*, la base *a e* et les autres côtés, *a v*, *e v*, chacun égal au rayon droit du triangle équilatéral composant du solide, pour trouver l'angle d'inclinaison *a v e* des faces adjacentes, et par suite, dans le triangle O *p t* rectangle en *p*, le rayon O*p* de la sphère inscrite.



La surface S de l'icosaèdre $=20\, g\, h\, n$, et son volume$=$S $\times\frac{1}{3}$O *p*. (*)

(**1135**) Dans ce polyèdre et le dernier, on trouve au besoin le rayon O*r* ou O*h* de la sphère circonscrite, à l'aide du traingle O*p r*, O*p h*, dans lequel on a l'angle droit O*p r* ou O*p h*, le côté O*p*, rayon de la sphère inscrite, et le côté *p r* ou *p h*, rayon oblique du polygone composant *h r* ou *e h n*.

DE QUELQUES SOLIDES DE RÉVOLUTION ET AUTRES.

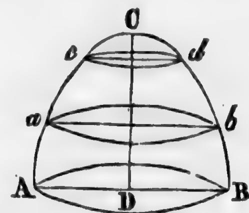
(**1136**) On a déjà étudié la sphère, le cylindre et le cône et quelques segments ou troncs de ces solides et on a enseigné la manière d'en déterminer la surface et le volume.

Il reste à considérer quelques solides de révolution et autres dont on peut établir approximativement les surfaces et volumes à l'aide des connaissances déjà acquises et sans recourir à l'étude des Sections Coniques qui enseignent à déterminer avec exactitude les surfaces et solidités de ces corps.

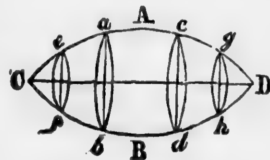
(*) L'étudiant, à l'aide de carton découpé suivant les surfaces développées des cinq polyèdres, et en coupant à demi à l'endroit des lignes *a a*, *k k*, *a b*, etc. pourra replier sur elles-mêmes les diverses faces composantes jusqu'à faire rejoindre les parties de même nom et se fera ainsi une idée assez juste des solides dont il s'agit ici.

D'ailleurs, même avec l'aide des Sections Coniques, la difficulté consistera souvent à se rendre compte tout d'abord de la nature des solides dont il s'agit, c'est-à-dire, de la nature ou espèce des courbes qui ont servi à les engendrer, et si ces courbes ne sont pas des sections de cône, ce qui arrivera le plus souvent, on sera forcé, après tout le travail nécessaire pour en déterminer la nature, de recourir enfin à la méthode suivante.

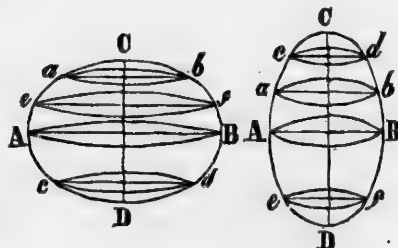
(1137) Le **conoïde** AB–C qu'engendre la révolution de la figure CDB *b* C autour de l'axe CD, se décompose en troncs de cônes *a* B, *c b*, à bases parallèles, surmontés d'une calotte sphèrique *c d* C. On en obtiendra la solidité et la surface en faisant d'abord celles de ses éléments composants, pour prendre ensuite la somme de ces parties ; et les résultats obtenus seront évidemment d'autant plus exacts qu'on aura pris les arcs B *b*, *b d*, assez petits pour pouvoir les considérer comme étant sensiblement des lignes droites.



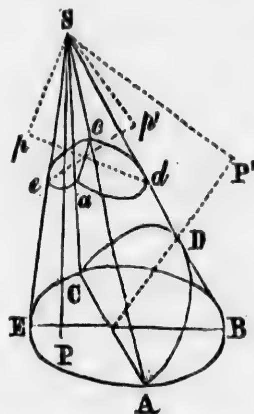
(1138) Le **Fuseau**, engendré par la révolution d'un arc CAD de cercle, ou de toute autre courbe, autour de l'axe CD, se décomposera en un cylindre *a d*, deux cônes *ef*–C, *g h*–D, et deux ou plusieurs troncs de cônes *c h*, *e b* ; ce qui indique la manière d'arriver à la surface et au volume de ce corps.



(1139) Le **sphéroïde** aplati ou allongé qu'engendre la courbe surbaissée ou surhaussée CBD autour de l'axe CD, se décomposera comme auparavant en troncs de cônes **A** *b*, A *d*, etc., et en



calottes sphériques abC, efD, ou si l'on veut, en un cylindre, deux calottes et deux ou plusieurs troncs de cônes ; ou encore en segments sphèriques, etc.



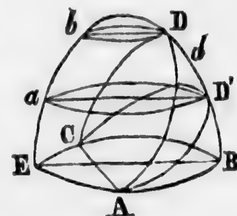
(**1140**) **PROB. Déterminer le volume et la surface d'un onglet quelconque** ABC–D **de cône ou de pyramide.** Quelle que soit la base ABC du tronc ou partie de cône ou de pyramide ABC–S, on en aura (**1056**) le volume en multipliant cette base par le tiers de la hauteur SP du solide ; mais l'onglet dont il est question est évidemment la différence entre le solide ABC–S et le solide ACD–S; or le volume du solide ACD–S=surf. ACD$\times\frac{1}{3}$SP′ perpendiculaire au plan de ACD; donc le volume de l'onglet ABC–D=ABC$\times\frac{1}{3}$ SP –ACD$\times\frac{1}{3}$SP′, conclusion d'ailleurs que l'on aurait pu déduire immédiatement du par. (**1067**). On aura la surface convexe de l'onglet en décomposant au besoin cette surface, comme (**1058**) celle du solide dont cet onglet fait partie, en parties assez petites pour qu'on puisse les considérer sensiblement comme surfaces planes et en obtenir ainsi le contenu.

D'ailleurs, pour ce qui est de la surface de l'onglet ou tronc de cône, il y a lieu de remarquer ici que cette surface, comme celle du cône dont elle fait partie, peut se développer en surface plane. En effet, il suit immédiatement de la définition d'un cône droit, que sa surface développée n'est autre chose qu'un secteur de cercle ayant pour rayon le côté incliné du cône. De même, la surface développée du cylindre droit est évidemment un rectangle, et tout autre surface engendrée comme celle du cône, par une ligne droite tournant autour d'un point fixe, ou comme celle du cylindre droit ou oblique, par une ligne droite se mouvant parallèlement à elle même,

est une surface de simple courbure, pouvant se développer en surface plane ; tandis qu'au contraire toute surface engendrée comme celle de la sphère, sphéroïde ou conoïde, etc., par une ligne courbe, se mouvant autour d'un axe ou d'un point, ou non parallèlement à elle même, est une surface à double courbure, qu'on ne saurait en conséquence développer en surface plane.

(**1141**) S'il s'agissait du solide EADCE–S, il est clair qu'on en aurait le volume$=$ACE$\times\frac{1}{3}$ SP$+$ACD$\times\frac{1}{3}$SP′ ou$=$ABCE–S—ABC–D.

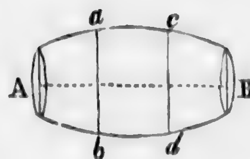
Enfin on aurait le volume d'un tronc quelconque ACDE–*acde* de pyramide ou de cône$=$(ACE$\times\frac{1}{3}$ SP$+$ADC$\times\frac{1}{3}$ SP′) —(*ace*$\times\frac{1}{3}$ S*p*$+$*adc*$\times\frac{1}{3}$ S*p*′).



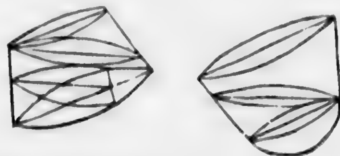
(**1142**) Eût-on a **déterminer, le volume d'un onglet quelconque** ABC–D **de conoïde, de sphère, ou de sphéroïde** ; il y aurait simplement à diviser au besoin l'onglet donné en deux ou plusieurs onglets ABC–D′, ACD′–D de cônes ou de troncs de cônes *a*B, *b*D′, en prenant BD′, D*d*, etc., assez petits pour pouvoir être considérés sans erreur sensible comme lignes droites ; puis on établirait (**1140**) le volume de chacun des onglets composants et par suite la somme de ces parties ou le volume de l'onglet donné.

(**1143**) **Enfin** il est clair qu'à l'aide des éléments dont on a jusqu'ici traité dans ce livre, on établirait au besoin le volume ou la surface d'un corps ou d'un tronc de corps quelconque, en le décomposant en prismes, cylindres, pyramides, cônes, troncs de prismes, de cylindres, de pyramides ou de cônes, calottes et segments shpériques, onglets, etc.

La tonne ou futaille, par exemple, n'est autre chose qu'un tronc de fuseau (**1138**) à bases parallèles A,B et se décomposera en un cylindre ad, et en troncs des cônes a A, c B.



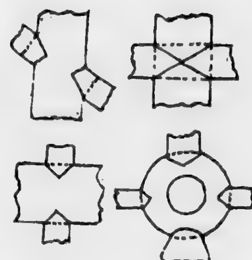
Les cuves et chaudières seront ordinairement des cylindres, troncs de cônes droits ou renversés, ayant pour bases des surfaces planes, des cônes surbaissées, ou des calottes. Ces vaisseaux seront quelquefois des demi-sphéroïdes ou des conoïdes renversés et quand ils seront plus ou moins inclinés, les liqueurs qu'ils pourraient contenir présenteront au calcul des onglets ou des troncs de la nature de ceux dont on vient de parler.



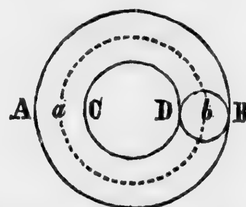
Le dôme sera en général un conoïde ou un demi-sphéroïde surbaissé ou surhaussé dont on déterminera la surface, tant intérieure qu'extérieure, par les règles applicables à ces solides. On aura aussi le volume du dôme ou de la partie solide du dôme en faisant les volumes respectifs des conoïdes extérieur et intérieur composants, pour en prendre ensuite la différence.

La voûte ne sera autre chose qu'un demi cylindre droit ou oblique (*) et si la coupe en est une courbe plus ou moins surbaissée, on en obtiendra tout de même la surface par les règles déjà données (**993**) (**997** et **998**) et le volume de son contenu solide, en faisant séparément les volumes des demi-cylindres extérieur et intérieur, pour en prendre la différence, ou en multipliant la demi-somme des surfaces extérieure et intérieure de la voûte par l'épaisseur de la voûte, si cette épaisseur est uniforme.

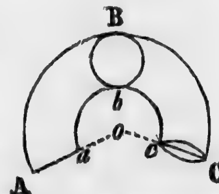
(*) Les ponts et chaussées qui traversent obliquement une rivière ou un cours d'eau, c'est-à-dire, dans une direction perpendiculaire au courant ou fil de l'eau, présentent assez souvent au calcul des voûtes de cette espèce.



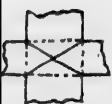
Les intersections de deux voûtes de largeurs et hauteurs égales ou inégales, se rencontrant à angles droits ou à angles obliques, ou l'intersection d'nne voûte avec un dôme, offriront aussi à la considération, des troncs ou onglets de cylindres, de cônes, ou de conoïdes, etc., qu'on résoudra par une combinaison convenable des moyens déjà enseignés ; et quant aux voûtes cylindriques qui seraient en même temps circulaires ou spirales comme celles des escaliers tournants, par exemple, ou autres, le paragraphe suivant fournira la manière d'en déterminer la surface et le volume.

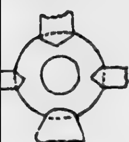


(**1144**) On n'a pas encore fait mention de l'**anneau cylindrique** AB qui n'est autre chose qu'un cylindre recourbé ou plutôt un tronc de cylindre dont on aura le volume en faisant (**1099**) le produit d'une section *b* perpendiculaire à l'axe *a b* par la longueur de cet axe=circ. *a b* ou $\frac{1}{2}$ (circ. AB+circ. CD). On aura sa surface=circ. *b*×circ. *a b*, et s'il s'agissait d'un **anneau circulaire** AB on aurait sa surface=surf. cercle AB—surf. cercle *c* D. Si la coupe DB de l'anneau n'était pas celui d'un cylindre, on aurait tout de même (**998**) sa surface=périmètre DB×$\frac{1}{2}$ (circ. AB+circ. CD) et le volume=surface DB×circ. *a b*.

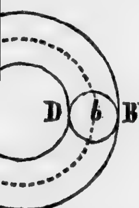


(**1145**) En dernier lieu, on obtient la **surface d'un tronc** ou partie **d'anneau circulaire**=surf. secteur ABC—surf. secteur *a b c*, et les **surface et volume d'un tronc d'anneau cylindrique**, la première=circ. B *b*×$\frac{1}{2}$ (circ. ABC+circ. *a b c*), le second= surf. B *b*×$\frac{1}{2}$ (circ. ABC+circ. *a b c*).

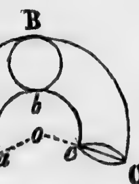




venable des
cylindriques
ales comme
u autres, le
terminer la



axe=circ. *a b*
=circ. *b*×circ.
AB on aurait
Si la coupe
re, on aurait
DB×½ (circ.
a b.



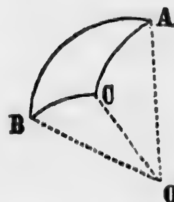
le second=

LIVRE IV.

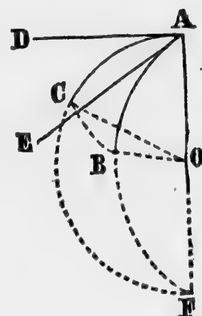
GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

DÉFINITIONS ET CONSÉQUENCES.

(1146) **Déf.** Un **angle sphérique** A est un angle sur la surface d'une sphère, ayant pour **côtés** les arcs AB, AC de deux grands cercles qui s'intersectent, et est le même que l'angle d'inclinaison (878) des plans AOB, AOC de ces cercles.



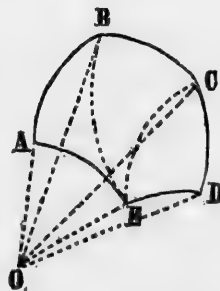
(1147) **Cor. Tout angle sphérique** A (BAC) **est égal à l'angle rectiligne** DAE **formé par les tangentes** AD, AE **menées de son sommet** A **aux arcs** AC, AB **qui en**



constituent les côtés ; car la tangente AD menée dans le plan OAC du côté ou de l'arc AC est (**466 et Dém.** de **977**) perpendiculaire au rayon AO de la sphère, et la tangente AE dans le plan OAB du côté AB est perpendiculaire au même rayon AO, intersection commune des grands cercles ABF, ACF, dont les côtés de l'angle sphérique font partie ; or l'angle DAE mesure (**878**) l'inclinaison des plans des deux arcs et cet angle est par la déf. (**1146**) celui de ces arcs.

(**1148**) **Déf.** Un **triangle sphérique** est une partie ABC de la surface d'une sphère terminée par trois arcs AB, AC, BC, de grands cercles. Ces arcs sont les **côtés** du triangle, chacun d'eux étant moindre qu'une demi-circonférence ; et les angles A, B, C, que forment entre eux les plans AOB, AOC AOB, BOC AOC, BOC de ces côtés, sont (**1146**) les angles du triangle.

(**1149**) **Déf.** Un triangle sphérique, comme un triangle rectiligne, est appelé **rectangle**, quand un de ses angles est droit ; **isocèle**, quand deux de ses côtés sont égaux ; **équilatéral**, quand tous ses côtés sont égaux, ou **équiangle**, quand tous ses angles sont égaux.



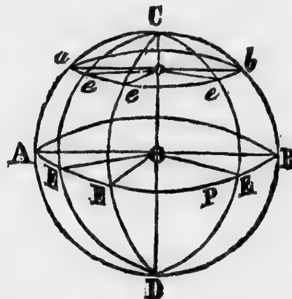
(**1150**) **Déf.** Un **polygone sphérique** ABCDE est une partie de la surface d'une sphère terminée par plusieurs arcs de grands cercles, et peut évidemment se décomposer en autant de triangles sphériques ABE, EBC, etc. que le polygone a de côtes moins deux.

(**1151**) **Déf.** Une **pyramide sphérique** est (**1076**) une partie ADB-O de la sphère solide comprise entre les plans

AOB, BOC, etc. d'un angle solide (**891 Déf.**) dont le sommet est au centre O de la sphère. La **base** de la pyramide est le polygone sphérique AD.

2° Il est clair que les plans BOE, COE décomposent la pyramide sphérique polygone en autant de pyramides sphériques triangulaires, et la base AD en autant de triangles sphériques, que cette base contient de côtés moins deux.

(**1152**) **Déf.** Le **pôle d'un cercle,** grand AEB ou petit *a e b* **de la sphère** est un point C ou D dans sa surface, également éloigné de tous les points A, E, etc. *a*, *e*, etc. de la circonférence de ce cerle; car il est clair (**Dém. de 901 et 902**) que ce point **est situé à l'extrémité du diamètre CD perpendiculaire au plan du cercle** dont il s'agit, et comme tout diamètre à deux extrémités, **tout cercle de la sphère a deux pôles.**



2° Il est de plus évident, (**986**) que **le pôle d'un grand cercle AB est en même temps celui de tout petit cercle** *a b* **parallèle au grand.**

(**1153**) **Cor. 1.** Puisque les distances ou cordes AC, EC etc. *a c*, *e c*, etc. sont égales, les arcs AC, EC, etc. *a c*, *e c*, etc. que sous-tendent ces cordes sont (**403**) égaux, et quand (**882**) les angles AOC, EOC sont droits, leur sommet commun O étant en même temps le centre commun des arcs égaux AC, EC, il est clair que ces arcs sont des **quart-de-circonférences,** comme le sont aussi les arcs AD, ED, etc. Donc, **tout arc EC de grand cercle mené d'un point quelconque E sur la circonférence d'un autre grand cercle, au pôle** C ou D **de ce dernier, est un quart-de-circ.;** et **ce quart-de-circ. fait en même temps un angle droit avec le grand cercle ou arc** AE, car la droite CD étant perpendiculaire (**1152**) au plan AEB, tout plan

CED passant par CD est (**924**) perpendiculaire au plan AEB ; donc l'angle de ces plans, c'est-à-dire l'angle AEC est un angle droit.

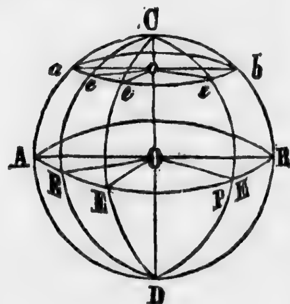
(1154) Cor. 2. Réciproquement, si la distance du point C aux points A, E, est égale à un quart-de-circ., le point C sera le pôle de l'arc AE et les angles CAE, CEA seront des angles droits ; car les angles droits AOC, EOC donnent OC perpendiculaire à AO, EO, et par conséquent (**895**) perpendiculaire au plan ABE de ces lignes. Donc le point C est le pôle de l'arc AE et les angles en A et E son droits.

(1155) Sco. 1. PROBS. Les propriétés de ces pôles nous permettent de **décrire des arcs de cercles sur la surface d'une sphère,** avec la même facilité que sur une surface plane. Il est clair, par exemple, qu'en faisant tourner autour du point C, un arc C *e* ou toute autre ligne s'étendant à la même distance, l'extrémité *e* décrira le petit cercle *a e b* ; et en tournant le quart-de-circ. C *e* E autour du point C, son extrémité A décrira l'arc de grand cercle AEB.

(1156) Sco. 2. PROB. Pour **trouver le pôle** C ou D **d'un grand cercle** AB, on mènera, prenant pour centre un point quelconque P sur la circonférence de AB et pour rayon un arc = quart-de-circ., un arc indéfini EC ou ED qui sera (**1153**) perpendiculaire à AEB et on prendra EC, ou ED, égal à un quart-de-circ.

2° **Autrement.** On déterminera le pôle d'un grand cercle AB à l'endroit C ou D de l'intersection de deux arcs AC, EC ou AD, ED perpendiculaires au premier.

(1157) Sco. 3. PROBS. Si l'on demandait à **prolonger un arc AE, de grand cercle,** les seules données étant les deux points de trajet A, E ; il y aurait à **déterminer d'abord le pôle** C ou D de **cet arc** à l'endroit de l'intersection de deux arcs décrits des points A, E, comme centres, avec une dis-



tance égale à un quart-de-circ. Le pôle trouvé, on décrirait de ce point pris pour centre, et avec la même distance qu'auparavant, l'arc AE et son prolongement.

(**1158**) **Sco. 4. PROB. D'un point quelconque** e **sur la surface d'une sphère, mener une perpendiculaire à un arc donné AE de grand cercle.** Du point e comme pôle, avec un rayon=quart-de-circ., intersectez l'arc donné AE ou son prolongement (**1157**) en un point P. Ce point sera le pôle d'où on décrira un arc eE perpendiculaire à l'arc donné.

(**1159**) **Sco. 5. PROB. Déterminer le pôle d'un petit cercle** $a\,b$ **de la sphère.** A cet effet on mènera par le centre O de la sphère, un plan AB parallèle à celui du petit cercle et on établira (**1156**) le pôle du petit cercle à l'endroit (**1152**, 2°) de celui du grand.

2° **Si le rayon** $o\,e$ **du petit cercle est connu,** on a dans le triangle O $o\,e$, rectangle en o, le côté $o\,e$ et l'hypoténuse O e, rayon de la sphère, pour trouver l'angle eOo ou $e\,o$C et par conséquent l'arc eC, et des points quelconques a, e, comme centres, avec un rayon=eC, on décrira des arcs qui s'intersecteront en C, le pôle voulu.

3° **Si on a la distance** Oo **du plan du petit cercle** $a\,b$ **au centre de la sphère,** on aura $o\,C = OC - O\,o$ et $o\,D = OD + O\,o$, pour trouver $o\,e$ ou $o\,a =$ (**530**, 2°) $\sqrt{o\,D \times o\,C}$, et par suite, l'arc eC mesure de l'angle eOC.

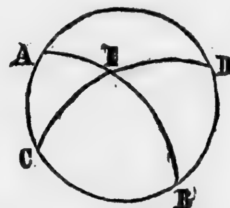
(**1160**) **Cor. 3.** Puisque l'angle sphérique C est égal (**Dém. de 1147**) à l'angle formé par deux droites menées d'un même point, l'une dans chacun des plans des côtés et toutes deux perpendiculaires à la commune intersection de ces plans, et puisque les droites AO, EO sont (**1154**) perpendiculaires à CO quand les arcs AC, EC valent chacun un quart-de-circ. ; il suit que l'angle AOE mesure aussi l'angle sphérique C ; mais la mesure de l'angle AOE est (**425**) l'arc AE décrit du centre ou sommet O, c'est-à-dire (**1152**) l'arc de grand cercle, AE, décrit du sommet C de l'angle ; donc **la mesure d'un angle sphérique quelconque** a C e **est l'arc**



AE de grand cercle décrit du sommet de l'angle comme centre, et terminé par les côtés *a* C, *e* C de l'angle, prolongés s'il le faut.

(**1161**) **Cor. 4**. On peut comparer ensemble les angles de triangles sphériques, au moyen des arcs de grands cercles décrits de leurs sommets, comme pôles, et compris entre leurs côtés; de là il est facile de faire un angle de cette sorte qui soit égal à un angle donné.

On pourrait aussi dans la comparaison de ces angles se servir indifféremment d'arcs de petits cercles décrits avec un même (**425**, 2°) rayon quelconque, si ce n'était que les relations intimes qui existent, comme on le fera voir par la suite, entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, c.-à-d. entre les angles que mesurent ces côtés ou arcs et les angles que forment entre eux les plans de ces côtés, rendent avantageux et nécessaire de n'employer que des arcs d'un même rayon que celui des côtés, c.-à-d. d'un rayon égal à celui de la sphère sur laquelle on opère.

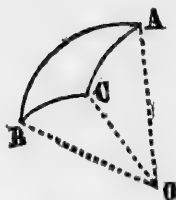


(**1162**) **Cor. 5. Les angles opposés au sommet** tels que AEC, DEB **sont égaux,** car chacun de ces angles est celui des plans AEB, CED de la dernière figure.

(**1163**) **Cor. 6.** Il est de plus évident que **dans l'intersection de deux arcs** AEB, CED, **les deux angles adjacents** AEC, AED, ou AEC, BEC, **valent ensemblent deux angles droits,** c.-à-d., sont supplémentaires l'un de l'autre.

PROPOSITION I. THÉORÈME.

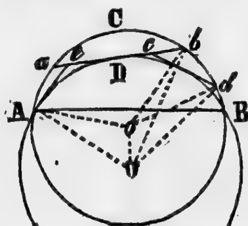
(1164) Dans tout triangle sphérique ABC, l'un quelconque des côtés est moindre que la somme des deux autres.



Car, O étant le centre de la sphère, les angles plans AOB, AOC, BOC de l'angle solide O ont pour mesure les côtés ou arcs AB, AC, BC du triangle sphérique ; mais chacun des trois angles plans composants d'un angle solide est (**930**) moindre que la somme des deux autres ; de là aussi, chacun des côtés du triangle est moindre que la somme des deux autres.

PROP. II. THÉOR.

(**1165**) **Tout arc ADB de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, est moindre qu'un arc quelconque ACB de petit cercle sous-tendu par la même corde AB.**

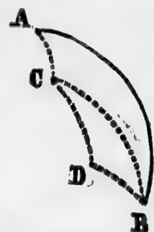


Il est clair, tout d'abord (**228**) que l'arc ACB enveloppe dans toute sa longueur l'arc ADB, puisque tout point b du premier autre que A et B est en dehors de l'arc ADB, à cause de $\mathrm{O}\,b>\mathrm{OB}$ (**269**), l'angle $b\,o\,\mathrm{O}$ du triangle de même nom étant plus grand que l'angle $\mathrm{B}\,o\,\mathrm{O}$ du triangle $\mathrm{OB}\,o$ et les côtés de l'un égaux à ceux de l'autre, savoir $\mathrm{O}\,o$ commun et $o\,\mathrm{B}=o\,b$. Maintenant soit $a\,b$ tangente à l'arc ADB, on aura (**108**) $a\,b<a\,\mathrm{C}\,b$; soit encore $\mathrm{A}\,e$, $c\,d$, etc. tangentes à ADB, on aura $a\,e<\mathrm{A}\,a+a\,e$, $c\,d<c\,b+b\,d$ et ainsi de suite. Donc l'arc ADB est moindre (**Dém. de 661**) que le polygone circonscrit $\mathrm{A}\,e\,c\,d\,\mathrm{B}$ et à plus forte raison moindre que l'arc ACB.

(**1166**) **Cor. Le plus court chemin d'un point A à un autre B sur la surface d'une sphère, est l'arc ADB de grand cercle qui joint les deux points donnés.**

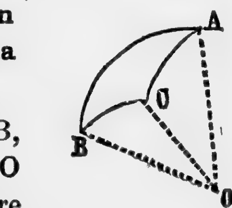
Car, la sphère est telle (**Dém. de 977**) qu'une ligne droite ne peut la toucher qu'en un seul point ; d'où, il est clair que

pour parvenir d'un point à un autre sur la surface de ce corps, il faut nécessairement décrire une courbe qui sera ou un arc de grand cercle, ou un arc de petit cercle, ou qui pourra se décomposer en arcs de grands ou de petits cercles ou les deux. Or, on vient de voir que tout arc de grand cercle est moindre qu'un arc de petit cercle reliant les mêmes points ; donc, il est plus court d'aller d'un point à un autre en parcourant des arcs de grands cercles qu'en passant par des arcs de petits cercles. Mais on a démontré (**1164**) que l'arc AB<AC+CB et CB<CD+DB ; à plus forte raison donc AB est il<AC+CD+DB ; donc un seul et même arc de grand cercle, reliant deux points, est moindre que deux ou un plus grand nombre d'arcs partiels non situés dans un même plan ; donc le plus court trajet entre les points donnés est l'arc d'un seul et même grand cercle ; donc, etc.



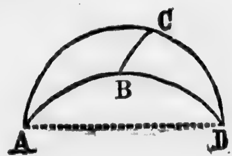
PROP. III. THÉOR.

(**1167**) **La somme des trois côtés d'un triangle sphérique, est moindre que la circonférence d'un grand cerlcle.**



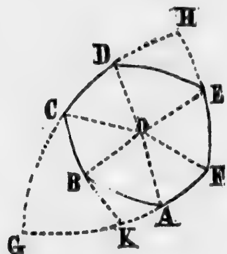
Car, la somme des angles plans AOB, AOC, BOC de l'angle solide au centre O de la sphère est (**931**) moindre que quatre angles droits ; or un angle droit a pour mesure un quart de-circ. ; donc la somme des arcs AB, AC, BC, qui mesurent les angles composants est moindre que quatre quart-de-circ. c.-à-d. moindre qu'une circonférence entière.

(**1168**) **D'ailleurs**, ayant prolongé jusqu'à leur rencontre en D deux quelconques AB, AC des côtés du triangle, les arcs ABD, ACD seront des demi-circonférences, puisque



(**984**) deux grands cercles se bissectent toujours mutellement; mais on a (**1164**) BC, côté du triangle DBC, moindre que BD+CD, somme des deux autres côtés; d'où, $\overline{AB+AC+BC}<\overline{ABD+ACD}$, c.-à-d. moindre qu'une circonférence entière.

(**1169**) **Cor. La somme de tous les côtés d'un polygone sphérique,** ABCDEF, **est moindre que la circonférence d'un grand cercle;** car, prolongeant les côtés CB, FA, jusqu'à leur rencontre en K, puis, les côtés DC, AF, FE, jusqu'à leur rencontre en G et H, on obtient enfin un triangle FGH dans lequel on a AF, FE, CD communs aux côtés FG, FH et GH, et on a DE<DH+EH, AB<AK+BK et CK<CG+KG; or, la somme des côtés du triangle FGH est, par la prop., moindre qu'une circonférence de cercle; à plus forte raison donc la somme des côtés du polygone est-elle moindre qu'une circonférence entière.



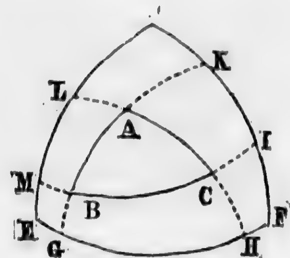
(**1170**) **D'ailleurs,** on a encore (**931**) la somme des angles en O, centre supposé de la sphère, moindre que 4 angles droits, et par conséquent la somme des côtés AB, BC, etc., du polygone, moindre qu'une circonférence de grand cercle.

PROP. IV. THÉOR.

(**1171**) **Si des sommets** A, B, C, **des trois angles d'un triangle sphérique** ABC, **pris pour pôles, on décrit trois arcs** EF, DF, DE, **de grands cercles; formant ainsi un second triangle** EDF; **les sommets des angles de ce second triangle seront respectivement les pôles des côtés du premier; et chaque angle** A, D, **de l'un des triangles, aura pour mesure une demi-circonférence moins le côté** EF, BC **qui lui est opposé dans l'autre**

triangle. En d'autres termes, les deux triangles ABC, EDF sont tels que les côtés de l'un sont les suppléments des arcs qui mesurent les angles de l'autre.

En premier lieu. Puisque A est le pôle de l'arc EF, la distance ou l'arc AE est un quart-de-circ. ; le point C, pôle de ED, donne aussi EC=quart-de-circ. ; donc le point E est éloigné d'un quart-de-circ. de chacun des points A, C; donc E est (**1154**) le pôle de l'arc AC. On démontrerait de même que D est le pôle de l'arc BC, et F le pôle de l'arc AB.



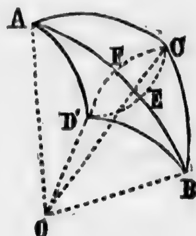
(**1172**) **Cor.** Donc on peut, à l'aide du triangle DEF, décrire le triangle ABC, comme on a décrit DEF à l'aide de ABC. De là, on donne à ces **triangles** le nom de **polaires ou supplémentaires.**

(**1173**) **En second lieu,** ayant prolongé s'il le faut les côtés AB, etc. du triangle ABC, jusqu'à ce qu'ils rencontrent en G, K, etc., les côtés de l'autre triangle, l'arc GH dont le pôle est A sera (**1160**) la mesure de l'angle A. Mais l'arc EH est un quart-de-circ. et il en est de même de l'arc GF, puisque E est le pôle de AH et F le pôle de AG; donc EH+GF vaut une demi-circ. Or, EH+GF est la même chose que EF+GH; d'où, l'arc GH qui mesure l'angle A vaut une demi-circ. moins le côté EF. De même, l'angle B a pour mesure $\frac{1}{2}$ circ.—DF; et l'angle C, $\frac{1}{2}$ circ.—DE.

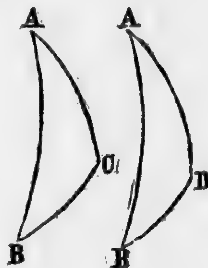
Et cette propriété est réciproque aux deux triangles, puisque chacun d'eux est décrit de la même manière à l'aide de l'autre ; c'est ainsi que l'on aura respectivement pour mesure des angles D, E, F, $\frac{1}{2}$ circ.—BC, $\frac{1}{2}$ circ.—AC, $\frac{1}{2}$ circ.—AB. L'angle D, par exemple, aura donc pour mesure l'arc MI; mais MI+BC=MC+BI=$\frac{1}{2}$ circ. ; de là, l'arc MI, mesure de D, vaut $\frac{1}{2}$ circ.—BC, et ainsi des autres.

PROP. V. THÉOR.

(1174) Si les côtés de deux triangles ABC, ABD′, sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont respectivement égaux; les angles de ces triangles seront aussi respectivement égaux et opposés aux côtés égaux.



En effet, les arcs égaux AC, AD′ BC, BD′ et l'arc commun AB soustendent en O, centre de la sphère, les angles égaux AOC, AOD′ BOC, BOD′ et l'angle commun AOB; et on a vu (**933**) que quand les angles plans composants de deux angles solides sont respectivement égaux l'un à l'autre, les plans des angles égaux sont également inclinés entre eux, et ces inclinaisons, c.-à-d. les angles formés par ces plans, sont (**1148**) les angles des triangles dont il s'agit; donc, l'angle D′=C, l'angle BAC=BAD′ et ABC=ABD′; donc, etc.



(1175) Sco. 1. L'égalité de ces triangles n'est absolue que dans le cas où les côtés correspondants ou homologues AC,AD BC, BD ou les angles C, D, sont tournés dans le même sens; la construction admettant alors la superposition des angles et des côtés égaux, l'un à l'autre, c.-à-d. la superposition des triangles eux-mêmes.

Dans le cas contraire (**936**) l'égalité en est une de symétrie seulement et on donnera à ces triangles le nom de **triangles symétriques.**

(1176) Sco. 2. PROB. Il suffit de remarquer que le sommet D, D′, du triangle sphérique ABD, ABD′, égal ou

symétrique à ABC, se trouve à l'intersection des arcs D'FC, D'EC décrits des deux autres points angulaires A, B, du triangle, comme pôles, avec les distances AC, BC, pour indiquer de suite la manière de **faire un triangle sphérique qui soit égal ou symétrique à un triangle sphérique donné.**

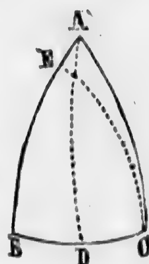
(1177) **Cor. 1. Deux triangles** ABC, ABD ou ABC, ABD' **sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux dans toutes leurs parties, quand deux côtés,** AB, AC **et l'angle inclus** A **de l'un, sont respectivement égaux à deux côtés** AB, AD ou AB, AD' **et à l'angle inclus** A **de l'autre.**

Car, on pourra superposer le triangle ABC à son égal ABD ou à son symétrique ABD', tout de même que l'on applique (**Dém. de 229**) deux triangles rectilignes l'un à l'autre quand ils ont un angle égal compris par des côtés égaux. Cette superposition fera tomber les points B, C de l'un des triangles sur les points B, D ou B, D' de l'autre triangle, ce qui donnera BC=BD ou BD' et les angles en B et C égaux à ceux en B et D ou en B et D'; car il suffit (**892**) de trois points pour déterminer la position d'un plan, et le plan BOC du grand cercle BC est en même temps celui de l'arc BD ou BD'; donc, etc.

(1178) **Cor. 2. Deux triangles sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont égaux dans toutes leurs parties, lorsque deux angles et le côté inclus de l'un, sont respectivement égaux à deux angles et au côté inclus de l'autre**; car on superposerait l'un de ces triangles à son égal ou à son symétrique, comme dans le cas correspondant (**238**) de triangles rectilignes.

PROP. VI. THÉOR.

(1179) **Dans tout triangle isocèle sphérique,** ABC, **les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux ; et réciproquement, si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, le triangle est isocèle.**



En premier lieu. Soit AB=AC, on aura l'angle C=B. Car, ayant mené (**1157**) l'arc AD du sommet A au point milieu D de la base, les deux triangles ABD, ADC auront les côtés de l'un respectivement égaux aux côtés correspondants de l'autre, savoir : AD commun, BD=DC et AB=AC ; de là, les angles seront (**1174**) égaux ; donc B=C.

(**1180**) **En second lieu.** Soit B=C ; on aura le côté AC=AB ; car si non, soit BE=AC, menez EC. Dans les triangles EBC, ACB, on a deux côtés EB, BC et l'angle inclus B de l'un, égaux a deux côtés AC, BC et à l'angle inclus C de l'autre ; donc (**1177**) toutes les autres parties de ces triangles sont égales ; donc l'angle ECB=EBC ; mais par hypothèse, l'angle ACB=EBC ; donc on a (**68 Ax.**) ECB=ACB, ce qui est absurde ; donc il est absurde de supposer AB inégal à AC ; donc les côtés AB, AC opposés aux angles égaux B et C, sont égaux.

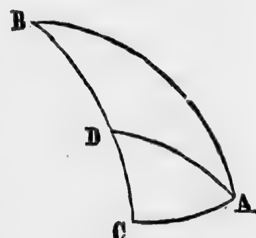
(**1181**) **Sco.** La même démonstration prouve que l'angle BAD=DAC et l'angle BDA=ADC ; de là, les deux derniers sont des angles droits ; donc **l'arc mené du sommet d'un triangle isocèle sphérique au milieu de la base, est perpendiculaire à la base et bissecte l'angle vertical.**

PROP. VII. THÉOR.

(**1182**) **Dans tout triangle sphérique, ABC, le plus grand côté BC est opposé au plus grand angle A, et réciproquement le plus grand angle est opposé au plus grand côté.**

En premier lieu, ayant fait l'angle BAD=B ; on aura (**1180**) AD=DB ; mais (**1164**) AD+DC>AC, c.-a-d. BD+DC>AC, ou BC>AC.

(**1183**) **En second lieu.** Si l'angle BAC était égal à ABC, l'on aurait BC=AC ; si BAC était moindre que ABC, on aurait, comme on vient de le voir, BC<AC. L'angle BAC est donc ni égal à ABC, ni moindre que ABC ; donc il est plus grand que ABC ; donc, etc.



PROP. VIII. THÉOR.

(1184) Si deux triangles A **et** B **sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont mutuellement équiangles, ils seront aussi mutuellement équilatères.**

Soient P et Q les triangles polaires ou supplémentaires de A et B. Puisque les angles sont égaux dans les triangles A et B, les côtés seront (**1171**) égaux dans leurs triangles supplémentaires P et Q; mais puisque les triangles P et Q sont mutuellement équilatères, ils sont aussi (**1174**) mutuellement équiangles ; enfin, les angles étant égaux dans les triangles P et Q, il suit que les côtés sont égaux dans leurs triangles supplémentaires A et B. Donc les triangles A et B qui sont mutuellement équiangles, sont en même temps mutuellement équilatères.

(**1185**) **Sco.** Cette proposition n'est pas applicable aux triangles rectilignes, où l'égalité des angles n'indique autre chose qu'une proportionnalité entre les côtés, et il est facile de s'en rendre compte ; car en traitant de la comparaison des triangles sphériques, on a toujours posé comme condition l'égalité des sphères ; or les arcs semblables sont (**428**) entre eux comme leurs rayons ; de là, sur des sphères égales, deux triangles ne peuvent être semblables sans être égaux. Il n'est donc pas étrange que l'égalité entre les angles produise l'égalité entre les côtés ; mais il en serait autrement si les triangles étaient tracés sur des sphères inégales, car les angles étant dans ce cas égaux, les triangles seraient

semblables, et les côtés homologues seraient entre eux comme les rayons de leurs sphères.

PROP. IX. THÉOR.

(1186) **La somme des trois angles de tout triangle sphérique, est moindre que six et plus grand que deux angles droits.**

En premier lieu, la mesure de chacun des angles d'un triangle sphérique, est (**1171**) égale à la demi-circonférence moins le côté correspondant du triangle supplémentaire; donc la somme des trois angles est mesuré par les trois demi-circonférences moins la somme des côtés du triangle sup.; or, cette dernière somme est moindre (**1167**) qu'une circonférence; donc si on la retranche de trois demi-circonférences, le reste sera plus grand qu'une demi-circ. qui est la mesure de deux angles droits; donc la somme des angles d'un triangle sphérique est plus grand que deux angles droits.

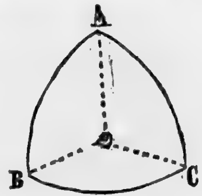
(1187) **En second lieu,** chacun des angles d'un triangle sphérique est moindre que deux angles droits; d'où il suit que la somme des trois est moindre que six angles droits.

(1188) **Sco. 1.** La somme des angles d'un triangle sphérique n'est pas constante, comme l'est celle des angles d'un triangle rectiligne; au contraire elle varie entre 2 et 6 angles droits, sans jamais atteindre ces limites. Car, si petit qu'on suppose le triangle dont il s'agit, il ne fera qu'approcher de plus en plus du triangle rectiligne, sans jamais le devenir, ses côtés étant des arcs de cercles. Et dans le second cas, chacun des angles formés par les plans composants des côtés du triangle, pourra approcher indéfiniment près de 2 angles droits, mais n'atteindra jamais cette limite, puisqu'alors les plans composants ne formeraient plus qu'un seul et même plan, et le triangle sphérique deviendrait enfin un hémisphère.

(1189) **Cor. 1. Dans un triangle sphérique, deux angles donnés ne peuvent servir à déterminer le troisième.**

(1190) **Cor. 2. Un triangle sphérique peut avoir deux**

et même trois angles droits; et de même, **un triangle sphérique peut avcir deux et même trois angles obtus.** (*)

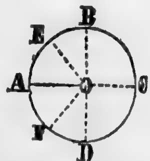


(**1191**) **Cor. 3**. **Si le triangle** ABC **est bi-rectangle,** c.-à-d. s'il a deux angles droits B, C, le sommet A sera le pôle de la base BC et **les côtés** AB, AC **opposés aux angles droits seront des quart-de-circ.**; car les angles B, C sont ceux des plans AOB, BOC AOC, BOC et ces angles étant droits, la commune intersection AO de ces plans sera (**928**) perpendiculaire au plan BOC et par conséquent (**882**) aux rayons OB, OC; donc, AOB, AOC sont des angles droits et AB, AC des quart-de-circ.

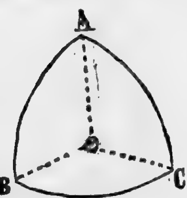
(**1192**) **Si** l'angle A est en même temps droit, **le triangle** ABC **est tri-rectangle**; **ses angles seront** alors **tous des angles droits, et ses trois côtés des quart-de-circ.**

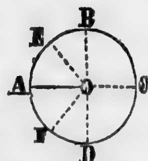
(**1193**) Il est clair, que deux triangles tri-rectangles forment la moitié d'un hémisphère; quatre constituent un hémisphère, et 8, une sphère entière.

(**1194**) **Cor. 4**. On vient de voir que la surface entière de la sphère vaut huit triangles tri-rectangles; de là, **si l'on représente par** T **la surface d'un triangle tri-rectangle,** la surface entière de la sphère sera 8 T. Ceci posé, si l'on prend l'angle droit=1, **la surface de la lune** (**989. Déf.**) **dont l'angle=**A **s'exprimera**: 2 A×T; **car,** (**1079**) 4 : A :: 8 T : 2 A×T, où A représente telle partie de l'unité que l'angle de la lune l'est d'un angle droit.

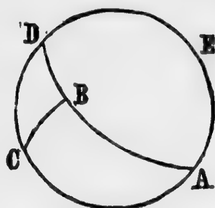


(*) L'étudiant se fera une excellente idée d'un angle, triangle, polygone, ou pyramide sphérique, ainsi que des divers plans composants des angles de ces figures, à l'aide d'un simple cercle en papier, coupé en un seul endroit AO; car, il lui suffira de répartir sur la circonférence de ce cercle, divers arcs EB, BC, EC, etc., moindres, égaux, ou plus grands que des quart-de-circ.; ployer ensuite le papier à l'endroit des rayons OE, OB, O etc., reliant les extrémités de ces arcs au centre O du cercle; puis, faire rejoindre les extrémités opposés du premier et du dernier de ces arcs; pour avoir, à volonté et tour à tour, un triangle isocèle, équilatéral, bi- ou tri rectangle ou obtusangle, etc.





(1195) **Sco. 2.** On a supposé jusqu'ici, conformément à la déf. (**1148**) que chaque côté d'un triangle sphérique est toujours moindre qu'une demi-circ. et chacun des angles en conséquence moindre que deux angles droits ; car si le côté AB est moindre qu'une demi-circ. et AC aussi$<\frac{1}{2}$ circ., chacun de ces arcs pourra se prolonger, soit en BD, CD; or lesang les ABC, CBD pris ensemble valent deux angles droits; donc l'angle ABC est moindre que deux angles droits.

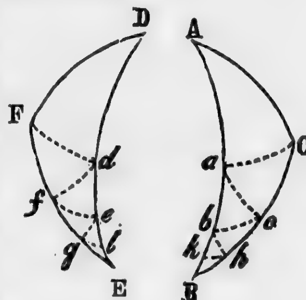


Rien n'empêche cependant de considérer un triangle sphérique dont certain côté soit plus grand qu'une demi-circonférence et certain angle plus grand que deux angles droits. Si l'on prolonge par exemple le côté AC pour en former une circonférence entière ACE, la partie qui reste après avoir soustrait le triangle ABC de l'hémisphère, est un nouveau triangle que l'on désigne encore ABC et dont les côtés sont AB, BC, AEDC. Ici, le côté AEDC est plus grand que la demi-circ. AED ; et en même temps, l'angle B qui lui est opposé, excède deux angles droits, de la quantité CBD ; et il est clair que la solution d'un triangle de cette espèce est toujours réduisible à celle du triangle de même nom qui est la différence entre un hémisphère et le triangle donné.

PROP. X. THÉOR.

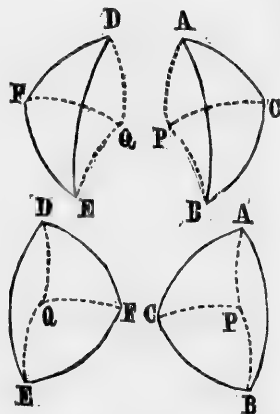
(**1196**) **Les triangles sphériques symétriques** ABC, DEF **sont équivalents, ou égaux en surface.**

Soit A a=AC, D d=DF ; ayant mené (**1157**) les arcs C a, F d, on aura le triangle isocèle aAC égal au triangle isocèle d DF, puisque l'égalité des côtés AC, DF A a, D d et des angles A, D, etc. permettra (**1177**) la superposition de ces triangles et leur coïncidence parfaite. Maintenant, si l'on

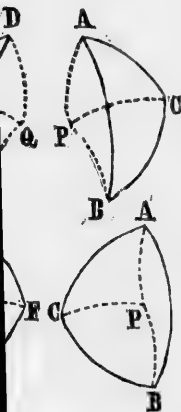


fait C c=C a, F f=F d, on aura le triangle isocèle a C c= d F f; car a C=d F, et comme l'égalité des triangles aAc, dDF donne l'angle ACa=DFd et que l'angle F est par hyp.=C, on aura l'angle d F f=a C c; donc (**1177**) les triangles a C c, d F f peuvent aussi se superposer l'un à l'autre et coïncideront entièrement. Soit encore a b=a c, d e=d f, le triangle isocèle b a c sera égal au triangle isocèle e d f, et si l'on continue indéfiniment cette opération, faisant succesivement c h=c b, f g=f e b k=b h, e l=e g, et ainsi de suite, on aura enfin divisé chacun des deux triangles donnés en un nombre égal de triangles isocèles respectivement égaux entre eux, et dont la somme des surfaces de l'un sera en conséquence égale à celle des surfaces de l'autre ; donc, etc.

(**1197**) **D'ailleurs.** Soient (**1159**) P et Q les pôles respectifs des petits cercles passant par les points A, B, C, D, E, F, des triangles donnés ; ces petits cercles sont égaux, car, les cordes qui sous-tendent les arcs égaux AC, DF, sont égales entre elles ; on a de même : corde CB=corde FE, corde AB=corde DE, et ces cordes égales forment deux triangles rectilignes égaux ABC, DEF dont les cercles circonscrits sont (**417**) en conséquence égaux. Les petits cercles étant égaux, les arcs de grands cercles PA, PB, PC seront (**1152**) égaux entre eux et aux arcs correspondants QD, QE, QF. Les triangles sphériques composants APC, APB, BPC sont donc isocèles et respectivement égaux à DQF, DQE, EQF, pouvant se superposer l'un à l'autre ; donc les triangles donnés ABC, DEF sont égaux ; car on aura, quand le pôle tombe en dehors, ABC=

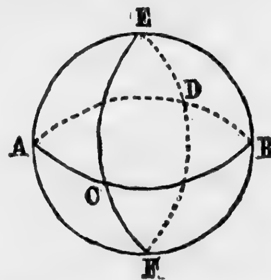


APC+BPC—APB=DQF+EQF—DQE=DEF, et quand le pôle tombe en dedans, on a APC+BPC+APB=DQF+EQF+DQE ; donc, etc.



PROP. XI. THÉOR.

(1198) **Si les circonférences de deux grands cercles AEB, CED s'intersectent sur la surface d'un hémisphère ACBD–E, la somme des triangles opposés AEC, BED ainsi formés, est équivalente à la surface d'une lune dont l'angle est égal à l'angle AEC formé par les cercles.**

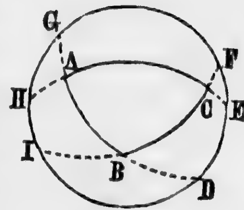


Car, prolongeant les arcs EB, ED, jusqu'à leur rencontre en F sur l'autre hémisphère, l'arc EBF sera une demi-circ. et il en sera de même de l'arc AEB ; de chacune des quelles, si l'on retranche EB, il restera AE=BF. On a de même DF=CE et BD=AC. Les deux triangles AEC, BDF sont donc (**1175**) symétriques et en conséquence (**1196**) égaux en surface ; mais la somme des triangles BDF, BED est équivalente à la lune EBFDE dont l'angle est BED ; de là, AEC+BED est équivalente à la lune dont l'angle est BED.

(**1199**) **Sco.** Il est de plus évident (**1081**) que les deux pyramides sphériques qui ont pour bases les triangles sphériques AEC, BED, sont ensemble égaux à l'onglet sphérique dont l'angle est BED.

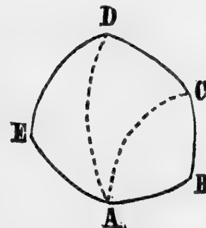
PROP. XII. THÉOR.

(1200) **La surface d'un triangle sphérique, ABC, a pour mesure l'excèdant de la somme de ses trois angles sur deux angles droits, multiplié par le triangle tri-rectangle.**



Prolongez les côtés du triangle jusqu'à ce qu'ils rencontrent en D, G, etc., un grand cercle DFG mené à volonté en dehors du triangle. Par le dernier théor., les deux triangles ADE, AGH valent ensemble la lune dont l'angle est A et qui a pour mesure (**1194**) 2AT. De là, ADE+AGH=2AT ; pour la même raison on a BGF+BID=2BT, et CIH+CFE=2CT ; mais la somme de ces six triangles excède l'hémisphère, de deux fois le triangle ABC, et l'hémisphère est représenté par 4T ; donc deux fois le triangle ABC vaut 2AT+2BT+2CT —4T ; donc, ABC=(A+B+C—2) T ; donc tout triangle sphérique est égal en surface au produit de la somme de ses trois angles moins deux angles droits, multiplié par le triangle tri-rectangle.

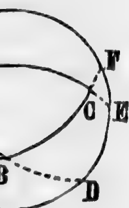
(1201) Cor. 1. La surface d'un polygone sphérique, EBC, a pour mesure le produit de la somme de tous ses angles moins autant de fois 2 angles droits que le polygone à de côté moins deux, par le triangle tri-rect.



Car, chacun de ses triangles composants a pour mesure la somme de ses angles moins deux angles droits, par le triangle tri-rect., et la somme des angles de tous les triangles est évidemment le même que celui de tous les angles du polygone ; donc etc.

2° Soit S la somme des angles du polygone sphérique, n le nombre de ses côtés et T le triangle tri-rect. ; prenant pour l'angle droit l'unité, la surface sera $\overline{S-2\ (n-2)}$ T, ou (S—2 n+4) T.

(1202) Cor. 2. Quelque soit le nombre des angles droits dans la somme des angles moins deux angles droits, le triangle ou le polygone donné contiendra un nombre égal de triangles tri-rectangles ou de huitièmes de la sphère. Si





les angles, par exemple, valent ensemble $4\frac{1}{3}$ angles droits, la somme des angles moins 2 angles droits, sera $2\frac{1}{3}$ angles droits, et la surface du triangle ou polygone vaudra $2\frac{1}{3}$ triangles tri-rect., soit $\frac{2}{8}+\frac{1}{24}$ ou $\frac{7}{24}$ de la surface de la sphère entière.

(**1203**) **Sco.** Il est clair qu'il y a le même rapport entre la pyramide tri-rect. et celle qui a ABC pour base, puisque les pyramides de même hauteur sont (**1053**) entre elles comme leurs bases. On compare de même l'angle solide au sommet de la pyramide avec l'angle au sommet de la pyr. tri-rect. Ces comparaisons sont fondées sur la coïncidence des parties correspondantes, car si les bases coïncident, il est évident que les pyramides elles mêmes coïncideront, de même que les angles solides à leurs sommets ; d'où on déduit que :

(**1204**) 1° Deux pyramides sphériques triangulaires sont entre elles comme leurs bases, et puisqu'on peut diviser une pyramide polygone en un certain nombre de pyramides triangulaires, il suit que **deux pyramides sphériques** quelconques **sont entre elles comme les polygones qui leur servent de bases** ; conclusion qui dérive aussi immédiatement du par. (**1082**).

(**1205**) 2° Les angles solides aux sommets de ces pyramides sont aussi comme leurs bases ; de là, pour comparer deux angles solides, on n'a qu'à placer leurs sommets aux centres de deux sphères égales, et les angles solides seront entre eux, comme les polygones sphériques interceptés entre leurs plans ou faces.

L'angle vertical de la pyr. tri-rect. est formé ou contenu par trois plans à angles droits l'un avec l'autre. Cet angle, que l'on peut appeler un angle droit solide, servira donc de mesure à tout autre angle solide. Par exemple, si la surface du triangle ou du polygone est les $\frac{3}{4}$ du triangle tri-rect., alors l'angle solide correspondant sera aussi les $\frac{3}{4}$ de l'angle solide droit.

LIVRE V.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

DÉFINITIONS ET CONSÉQUENCES.

(**1206**) **Rem.** On a déjà vu (**222**, **243**, **266** et **321**) que des six parties dont tout triangle est composé, savoir, trois côtés et trois angles, il suffit d'en connaître trois, dont l'une soit un côté, pour construire le triangle ; mais ces constructions ou **méthodes graphiques**, exactes qu'elles soient en théorie, ne donnent dans la pratique que des résultats plus ou moins approximatifs, à cause de l'imperfection des instruments dont il est nécessaire de faire usage.

Les **méthodes trigonométriques**, au contraire, enseignent à déterminer, par le calcul, les parties inconnues d'un triangle, et indépendantes que sont ces méthodes de toute opération mécanique, elles donnent avec exactitude les solutions voulues.

Ces méthodes sont fondées sur les propriétés de **lignes** appelées **trigonométriques,** lesquelles fournissent un moyen très simple d'exprimer en nombres les relations entre les côtés et les angles des triangles.

(1207) Déf. Pour les fins du calcul trigonométrique, on divise la circonférence du cercle en 360 parties égales qu'on appelle **dégrés**; chaque dégré se divise en 60 parties égales appelées **minutes**; chaque minute en 60 parties égales qu'on nomme **secondes**; la seconde se divise encore en 60 parties égales appelées **tierces,** et ainsi de suite; mais plus communément on divise la seconde en décimales, c'est-à-dire, en dixièmes, centièmes, millièmes, etc., de seconde. Et, autant il y a de dégrés, minutes, secondes, etc., dans un arc quelconque, autant il y a de dégrés, minutes, secondes, etc., dans l'angle que mesure (**425**) cet arc.

(1208) Cor. 1. La demi-circonférence, ou mesure de deux angles droits, contient $\frac{360}{2}=180$ dégrés; le quart-de-circonférence, ou mesure d'un angle droit, contient $\frac{160}{4}$ ou $\frac{180}{2} = 90$ dégrés.

(1209) Cor. 2. Tout arc est à la circonférence entière dont il fait partie, comme le nombre de dégrés et parties de dégrés qu'il contient, est au nombre 360; et (427) tout angle est à quatre angles droits, comme le nombre de dégrés et parties de dégrés dans l'arc qui en est la mesure, est à 360.

(1210) Cor. 3. De là aussi, **les arcs qui mesurent un même angle, contiennent**—quelque soit le rayon avec lequel on les a décrits—**le même nombre de dégrés et parties de dégrés**; car (**428**) le nombre de dégrés et parties de dégrés contenus dans chacun de ces arcs a le même rapport à 360 que l'angle qu'ils mesurent à quatre angles droits.

(1211) On désigne comme suit les dégrés, minutes, secondes, etc., contenus dans un arc ou angle quelconque; savoir: °, ′, ″, ‴, ainsi 49°, 56′, 24″, 42‴, veut dire 49

dégrés, 36 minutes, 24 secondes et 42 tierces; et 16°, 6′, 15.325″, signifie 16 dégrés, 6 minutes, 15 secondes et 325 millièmes de secondes.

(**1212**) **Déf.** Rappelons-nous que le **complément d'un angle ou d'un arc**, est (**130**) ce qui reste après avoir retranché cet angle ou cet arc de 90°. Ainsi, le complément de 25°, 40′ est égal à 90°—25°,40′=64°,20′, et le complément de 12°, 4′, 32″ est égal à 90°—12° 4′ 32″=79° 55′ 28″.

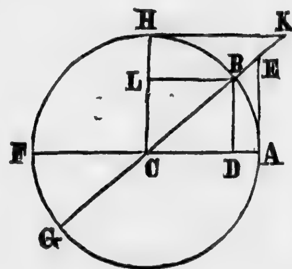
2° **Les deux angles aigus d'un triangle rectangle** valent ensemble (**262**) un angle droit; ils **sont** en conséquence **compléments, l'un de l'autre.**

3° Le complément d'un angle étant, par la déf., la différence entre cet angle et un angle droit; l'excédant d'un angle obtus sur un angle droit ou la différence entre cet angle et un angle droit sera le **complément de l'angle obtus.**

(**1213**) **Déf.** Rappelons-nous aussi que (**130**) deux angles qui valent ensemble deux angles droits et par conséquent (**1207**) deux arcs qui valent ensemble une demi-circonférence, sont appelés suppléments, l'un de l'autre. En d'autres termes, le **supplément d'un angle ou d'un arc** est ce qui reste après avoir retranché cet angle ou cet arc de 180°.

2° **Dans tout triangle, l'un quelconque des angles est le supplément de la somme des deux autres**; puisque (**250**) les trois pris ensemble valent 180°.

(**1214**) **Déf.** On appelle **sinus** d'un arc AB ou de l'angle ACB dont cet arc est la mesure, la droite BD menée par l'une B des extrémités de l'arc, perpendiculairement au diamètre AF qui passe par l'autre extrémité A du même arc.



(1215) **Cor. 1. Le sinus d'un quart-de-circ. ou d'un angle droit, est égal au rayon.**

(1216) **Cor. 2. Le sinus d'un arc est (408) la demi-corde du double de cet arc.** Or, on a vu (**643**) que le rayon du cercle est égal à la corde d'un sixième de la circonférence ; donc le **demi-rayon est le sinus** d'un douzième de la circonférence ou du douzième de 360° ou de 4 angles droits, c.-à-d., de **30°**, ou du tiers d'un angle droit.

2° On trouve donc au besoin la **corde d'un arc, égale au double du sinus de cet arc.**

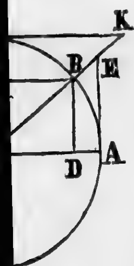
(1217) **Déf.** Le **sinus-verse** d'un arc AB ou d'un angle ACB est la partie AD du diamètre comprise entre l'une A des extrémités de l'arc et le pied D du sinus mené par l'autre extrémité B du même arc.

(1218) **Déf.** La **tangente** d'un arc AB ou d'un angle ACB est la droite AE qui touche l'arc à l'un A de ses extrémités et qui est terminée par le prolongement du diamètre BG passant par l'autre extrémité.

(1219) **Cor. La tangente d'un demi-angle droit, est** (248) **égale au rayon.**

(1220) **Déf.** La **sécante** d'un arc AB ou d'un angle ACB est la droite CE menée du centre C du cercle par l'une B des extrémités de l'arc et terminée par la tangente AE qui passe par l'autre extrémité A.

(1221) **Cor. 1.** Il suit des définitions (**1214, 1218, 1220**) que le **sinus, la tangente et la sécante d'un angle** ACB **ou d'un arc** AB **sont en même temps le sinus, la tangente et la sécante du supplément** FCB ou FHB **de cet angle ou de cet arc** ; car, la droite BD qui passe par l'extrémité B de l'arc FHB est perpendiculaire au diamètre FA qui passe par l'autre extrémité ; et, pour ce qui est de la tangente AE et de la sécante CE, il suffit de substituer à l'arc FHB son égal (**138**) AG, pour s'apercevoir que chacune de ces lignes répond à la définition qu'on vient d'en donner.



2° Il est clair (**1217**) que le sinus-verse de l'angle FCB ou de l'arc FHB=FD.

(**1222**) **Cor. 2. Le sinus** BD, **le sinus-verse** AD, **la tangente** AE **et la sécante** CE **d'un arc** AB **qui mesure un angle donné** ACB, **est au sinus** NO, **sinus verse** MO, **tangente** MP **ou sécante** CP **de tout autre arc** MN **qui mesure le même angle** ACB, **comme le rayon du premier arc est au rayon du second.**

Car, les parallèles BD, NO AE, MP donnent (**518** ou **520**) BD : NO :: rayon CB : rayon CN, et AE : MP :: rayon CA ou CB : rayon CM ou CN ; de plus, CE : CP :: CA : CM ; de même, parce que BC : DC :: NC : OC, c.-à-d., AC : DC :: MC : OC, on a, convertendo (**93**) et alternando (**94**) AD : MO :: AC : MC ; donc, etc.

(**1223**) **Sco.** Donc, si l'on construisait, pour un rayon donné, des tables indiquant en nombres les sinus, tangentes, sécantes et sinus-verses de certains angles ; ces nombres indiqueraient en même temps les relations ou rapports des sinus, tangentes, etc., des mêmes angles, pour un rayon quelconque.

Dans ces **tables** appelées **trigonométriques** et dont on expliquera bientôt la construction et l'usage, le rayon est supposé égal à l'unité ou à 10, 100, 1000, etc.

(**1224**) **Déf.** Pour abréger, on appelle **co-sinus, co-tangente,** et **co-sécante** d'un angle ACB ou de son supplément FCB, le sinus, la tangente et la sécante du complément (**1212**) HCB de cet angle. Ainsi, soit BL ou son égal DC le sinus de l'angle HCB, HK la tangente et CK la sécante du même angle ; BL ou CD sera le cosinus, HK la cotangente et CK la cosécante de l'angle ACB, ou de son supplément FCB.

On peut aussi désigner le cosinus : la partie du rayon comprise entre le centre C et le pied D du sinus.

(1225) **Cor. 1. Le rayon est moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente d'un angle quelconque** ACB ; c-à-d., tang. ACB$\times$cot. ACB$=R^2$; car, les angles HKC, ACB sont (153) égaux, à cause des parallèles HK, CA, et les angles KHC, CAE sont droits ; donc, les triangles CAE, KHC sont semblables et donnent (520) AE : AC :: HC ou AC : HK ; d'où, (86) AE$\times$HK$=$AC$\times$HC$=$AC$\times$AC$=$$AC^2=R^2$.

(1226) **Cor. 2. Le rayon est moyen proportionnel entre le cosinus et la sécante d'un angle quelconque** ACB ; ou, cos. ACB $\times$ séc. ACB$=R^2$; car les parallèles BD, AE donnent CD : CB ou CA :: CA : CE ; d'où, CD$\times$CE$=CA^2=R^2$.

(1227) **Cor. 3. Le carré du rayon d'un arc est égal à la somme des carrés du sinus et du cosinus de cet arc,** ou $\sin.^2 A+\cos.^2 A=R^2$, A étant un arc quelconque, car (305) $CB^2=BD^2+CD^2$. On aura donc, au besoin, le cos. CD d'un arc AB ou d'un angle ACB$=\sqrt{CB^2-BD^2}=\sqrt{R^2-\sin.^2}$; on aura de même le sinus $=\sqrt{R^2-\cos.^2}$.

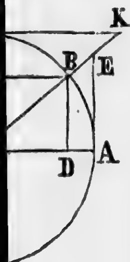
(1228) **Cor. 4**. Etant donnés le sinus et le cosinus d'un arc A ou d'un angle A, on obtient aisément la tangente, la sécante, la cotangente et la cosécante de cet angle ou arc à l'aide des formules ou proportions suivantes, que donnent les triangles semblables CDB, CAE, CHK ; savoir :

CD : BD :: CA : AE ; ou cos. A : sin. A :: R : tang. A$=\dfrac{R \sin. A}{\cos. A}$.

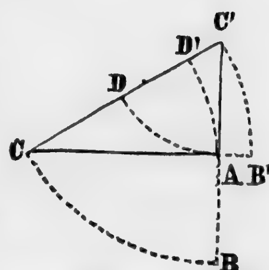
CD : CB :: CA : CE ; ou cos. A : R :: R : sec. A$=\dfrac{R^2}{\cos. A}$.

BD : CD :: CH : HK ; ou sin. A : cos. A :: R : cot. A$=\dfrac{R \cos. A}{\sin. A}$.

BD : CB :: CH : CK ; ou sin. A : R :: R : coséc. A$=\dfrac{R^2}{\sin. A}$.



(1229) **Cor. 5.** Des sommets C, C′, comme centres, ayant décrit, avec les rayons CC′, CA et C′C, C′A, les arcs C′B, D′A et CB, DA, il est clair que **si dans un triangle rectangle quelconque CAC′ on prend pour rayon l'hypoténuse, les côtés AC, AC′ deviennent les sinus des angles opposés C′, C, ou les cosinus des angles adjacents C, C′; et si l'on prend pour rayon l'un AC ou AC′ des côtés, l'autre côté devient la tangente de l'angle opposé, et l'hypoténuse la sécante de cet angle.**



On a donc, en prenant l'hypoténuse CC′ pour rayon :

hyp. CC′ : côté AC′ :: R : sin. C ou cos. C′;
hyp. C′C : côté AC :: R : sin. C′ ou cos. C ;

Prenant maintenant pour rayon le côté AC, on a

côté AC : côté AC′ :: R : tang. C et
côté AC : hyp. CC′ :: R : séc. C.

Et si l'on prend AC′ pour rayon, on aura

côté AC′ : côté AC :: R : tang. C′ et
côté AC′ : hyp. CC′ :: R : séc. C′; donc :

1° **Dans tout triangle rectangle, l'hypoténuse est à l'un ou l'autre des côtés, comme le rayon est au sinus de l'angle opposé à ce côté, ou au cosinus de l'angle adjacent à ce côté.**

2° **L'un quelconque des côtés est à l'autre, comme le rayon est à la tangente de l'angle opposé à ce dernier ou adjacent au premier côté.**

3° **L'un quelconque des côtés est à l'hypoténuse, comme le rayon est à la sécante de l'angle aigu adjacent à ce côté.**

(1230) **Sco. 1.** Si l'on exprime arithmétiquement les analo-

gies du dernier corollaire, on aura (60) en prenant l'unité pour rayon : $\sin. C = \frac{AC'}{CC'} = \cos. C'$; $\sin. C' = \frac{AC}{C'C} = \cos. C$;
$\text{tang. } C = \frac{AC'}{AC}$; $\text{tang. } C' = \frac{AC}{AC'}$; $\text{séc.} C = \frac{CC'}{AC}$; $\text{séc. } C' = \frac{C'C}{AC'}$;
c'est-à-d., que :

1° **Dans tout triangle rectangle, le sinus d'un des angles aigus est égal au côté opposé divisé par l'hypoténuse.**

2° **La tangente d'un des angles aigus est égale au quotient du côté opposé par le côté adjacent.**

3° **La sécante d'un des angles aigus est égale au quotient de l'hypoténuse par le côté adjacent à l'angle aigu.**

(**1231**) **Sco. 2.** Prenant encore l'unité pour rayon, on obtient (**86**) les expressions : $AC' = CC' \times \sin. C$ ou $\cos. C'$; $AC = C'C \times \sin. C'$ ou $\cos. C$; ou, $AC' = AC \times \text{tang. } C$ ou $\cot. C'$; et $AC = AC' \times \text{tang. } C'$ ou $\cot. C$; $CC' = AC \times \text{séc. } C$ ou (**1224**) $\text{coséc. } C' = AC' \times \text{séc. } C'$ ou $\text{coséc. } C$; c'est-à-dire :

1° **Dans tout triangle rectangle, la perpendiculaire** (ou l'un des côtés) **est égale à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle à la base** (ou adjacent à l'autre côté).

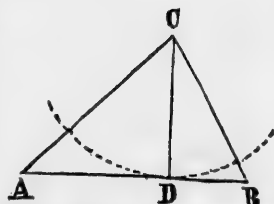
2° **La base** ou l'un des côtés, **est égale à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent à la base** ou à ce côté.

3° **La perpendiculaire** ou l'un des côtés **est égale à la base** ou à l'autre côté **multipliée par la tangente de l'angle à la base** ou adjacent à ce côté.

4° **La base** ou l'un des côtés **est égale à la perpendiculaire** ou à l'autre côté **multipliée par la cotangente de l'angle à la base** ou adjacent à ce côté.

5° **L'hypoténuse est égale à l'un quelconque des côtés multiplié par la sécante de l'angle adjacent à ce côté** ou ce qui est la même chose (**1224**) **par la cosécante de l'angle opposé à ce côté.**

(1232) **Cor. 6. Dans tout triangle ACB, si l'on mène une perpendiculaire CD de l'un quelconque C des angles, au côté opposé AB; les segments AD, BD de ce côté seront entre eux comme les tangentes des parties composantes ACD, BCD de l'angle opposé C.** Car, les triangles rectangles ADC, BDC donnent (**Cor. 5.**) CD : DA :: R : tang. ACD et CD : DB :: R : tang. BCD; d'où, alt. (**94**) CD : R :: DA : tang. ACD et CD : R :: DB : tang. BCD; mais (**75 Ax.**) DA : tang. DCA :: DB : tang. DCB (*); donc, alt. DA : DB :: tang. DCA : tang. DCB.



(1233) **En résumé,** soit AB un arc quelconque et FB son supplément, ou ACB un angle quelconque et FCB son supplément; on a les **Définitions** suivantes:

BD=sin. AB ou FB	=sin. ACB ou FCB
BL=cos. AB ou FB	=cos. ACB ou FCB
AE=tang. AB ou FB	=tang. ACB ou FCB
HK=cot. AB ou FB	=cot. ACB ou FCB
CE=séc. AB ou FB	=séc. ACB ou FCB
CK=coséc. AB ou FB	=coséc. ACB ou FCB
AD=sin.-ver. AB	=sin.-ver. ACB
HL=cosin.-ver. AB ou FB	=cosin.-ver. ACB ou FCB
FD=sin.-ver. FB	=sin.-ver. FCB

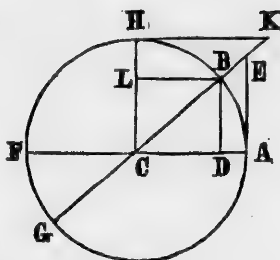
2° Et les **corollaires** suivants:

Sin. 0° = 0, tang. 0° = 0, cos. 0° = R, séc. 0° = R, sin. 90°=R, cos. 90°=0, cos. 0°=sin. 90°=R; $\sin.^2+\cos.^2=R^2$; d'où, $\sin.=\sqrt{R^2-\cos.^2}$, et $\cos.=\sqrt{R^2-\sin.^2}$; tang.×cot. $=R^2$; d'où, $\text{tang.}=\frac{R^2}{\text{cot.}}$ et $\text{cot.}=\frac{R^2}{\text{tang.}}$; cos.×séc.$=R^2$; d'où,

$$\cos.=\frac{R^2}{\text{séc.}} \text{ et } \text{séc.}=\frac{R^2}{\cos.}; \text{ tang.}=\frac{R\times\sin.}{\cos.}; \text{ cot.}=\frac{R\times\cos.}{\sin.};$$

$\text{coséc.}=\frac{R^2}{\sin.}$; etc. Tang. 45°=cot. 45°=R.

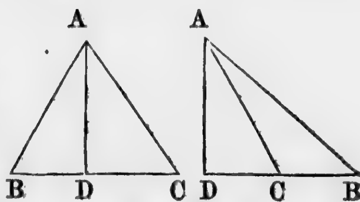
(*) L'élève, en écrivant l'une au-dessus de l'autre, les proportions qui concourent au résultat, DA : DB :: tang. DCA : tang. DCB, saisira de suite



(1234) **Rem.** Quant à la tangente, elle augmente rapidement à mesure que le point B s'approche de H, c.-à-d., à mesure que l'arc AB s'approche d'un quart-de-circ. ou l'angle ACB d'un angle droit; et arrivé à ce point, la tangente proprement dite n'existe plus, puisque la sécante ou droite limitative CE prend alors la direction CH, et devenant parallèle à AE, ne peut plus la rencontrer. La tangente devient donc infinie et s'exprime : tang. $90^{\circ}=\infty$. Le complément de 90° étant 0°, on a tang. $0^{\circ}=$cot. 90° et cot. $0^{\circ}=$tang. 90° ; d'où, cot. $90^{\circ}=0$ et cot. $0=\infty$.

PROPOSITION I. THÉORÈME.

(1235) **Les côtés de tout triangle rectiligne ABC sont entre eux comme les sinus des angles opposés.**



Car, ayant mené, de l'un quelconque A des angles du triangle, une perpendiculaire AD au côté opposé BC, le triangle rectangle ADB donne (1229 1°) AB : AD :: R : sin. B et le triangle rectangle ADC donne AC : AD :: R : sin. C ; d'où, (86 et 68) AB×sin. B = AD×R=AC×sin. C ; donc, (88) AB : sin. C :: AC : sin. B, ou alt., AB : AC :: sin. C : sin. B. On ferait voir de même que AB : BC :: sin. C : sin. A ; donc AB : AC : BC :: sin. C : sin. B : sin. A ; donc, etc.

et plus aisément les nouvelles analogies que feront subir aux termes de ces proportions, l'alternation (**94**) et l'axiome (**75**) dont il s'agit ; et en général, une pareille disposition des termes de deux ou plusieurs proportions fera mieux voir les rapports qui existeront entre ces termes après les opérations de l'inversion (**93**), composition (**95**), division (**96**), etc., etc.

2° **Si la perpendiculaire** AD **tombe en dehors** du triangle ABC, les triangles rectangles ADB, ADC donnent encore les proportions R : sin. ACD :: AC : AD et R : sin. ABD ou B :: AB : AD, dans lesquelles les extrêmes sont égaux et les termes moyens en conséquence proportionnels, savoir : sin. ACD : sin. B :: AB : AC ; mais l'angle ACB est supplément de ACD : de là (**1221**) sin. ACB=sin. ACD et l'on a, comme auparavant, sin. C : sin. B :: AB : AC ou AB : AC :: sin. C : sin. B.

(**1236**) **D'ailleurs.** En inscrivant dans un cercle le triangle donné, il est clair que chacun de ses côtés est la corde d'un arc double (**442**) de celui qui est la mesure de l'angle opposé et (**1216**) la demi-corde d'un arc est le sinus de la moitié de cet arc ; or, les moitiés sont (**69**) comme les touts ; donc les côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés.

PROP. II. THÉOR.

(**1237**) **La somme des sinus de deux arcs** AB, AC, **est à la différence de ces sinus, comme la tangente de la demi-somme de ces arcs, est à la tangente de leur demi-différence** ; c.-à.d., sin. AB + sin. AC : sin. AB—sin. AC :: tang. $\frac{AB+AC}{2}$: tang. $\frac{AB-AC}{2}$.

Soit AD=AB, BD sera (**407**) perpendiculaire à OA et DH=BH ; soit encore CG parallèle à OA et par conséquent perpendiculaire à BD, on aura FH=CE, BF=BH+CE=sin. AB+sin. AC, DF = DH (ou BH)—CE=sin. AB—sin. AC ; de plus, l'arc BC=AB+AC et CD = AD (ou AB)

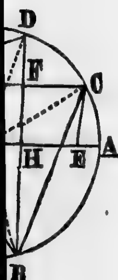
—AC. Ayant mené GD, GB, on a (**1232**) BF : FD :: tang. BGF : tang. DGF; mais tang. BGF ou BGC=tang. $\frac{1}{2}$ arc BC, parce que (**440**) l'angle BGC=$\frac{1}{2}$ BOC dont la mesure est en conséquence (**442**) $\frac{1}{2}$ BC. On a de même, tang. DGF ou DGC=tang. $\frac{1}{2}$ DC; donc, BF : FD :: tang. $\frac{1}{2}$ arc BC : tang. $\frac{1}{2}$ arc CD; donc, etc.

(**1238**) **Cor. 1.** De même que BF est la somme et DF la différence des sinus des arcs AB, AC, il est clair que GF est la somme et FC la différence des cosinus OE, OH de ces arcs; et comme tangente BGF=cot. GBF, on démontre aisément que GF : FC :: cot. $\frac{1}{2}$ arc BC : tang. $\frac{1}{2}$ arc DC; de là, **la somme des cosinus de deux arcs, est à la différence de ces cosinus, comme la cotangente de la demi-somme de ces arcs, est à la tangente de leur demi-différence.**



(**1239**) **Cor. 2.** Le triangle rectangle BFG donne GF : BF :: R : tang. BGF; donc, cos. AB+cos. AC : sin. AB+sin. AC :: R : tang. $\frac{1}{2}$ (AB+AC) et de même, à l'aide du triangle DFG, on a cos. AB+cos. AC : sin. AB—sin. AC :: R : tang. $\frac{1}{2}$ (AB—AC).

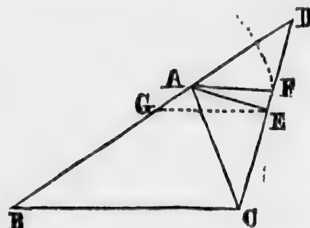
(**1240**) **Cor. 3.** Si les deux arcs valent ensemble 90°, la tangente de leur demi-somme, c.-à-d., de 45°, est égale (**1219**) au rayon, et l'arc CD étant l'excédant de l'arc BD sur l'arc BC ou sur 90°, la moitié de l'arc CD sera l'excédant de la moitié de BD sur la moitié de BC, c.-à-d., sera l'excédant de AD sur 45°; donc, **quand la somme de deux arcs=90°, la somme des sinus de ces arcs, est à leur différence, comme le rayon, est à la tangente de la différence entre chacun d'eux et 45°.**



PROP. III. THÉOR.

(**1241**) **Dans tout triangle rectiligne,** ABC, **la somme de deux quelconques des côtés, est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des deux angles opposés, est à la tangente de leur demi-différence**; c.-à-d., AB+AC : AB—AC :: tang. $\frac{1}{2}$ (B+C) : tang. $\frac{1}{2}$ C—B.

En effet, (**1235**) AB : AC :: sin. C : sin. B ; d'où, div. (**96**) AB—AC : AC :: sin. C—sin. B : sin. B, et comp. (**95**) AB+AC : AC :: sin. B+sin. C : sin. C ; d'où (**100**) AB+AC : AB—AC :: sin. B+sin. C : sin. C—sin. B ; mais, par la dernière proposition, sin. B+sin. C : sin. C—sin. B :: tang. $\frac{1}{2}$ (B+C) : tang. $\frac{1}{2}$ (C—B) ; de là (**75 Ax.**) AB+AC : AB—AC :: tang. $\frac{1}{2}$ (B+C) : tang. $\frac{1}{2}$ (C—B). Voyez la note, page 462.



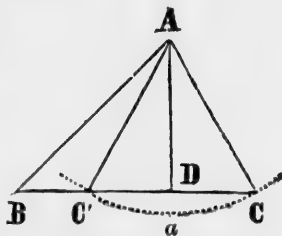
(**1242**) **Autrement**, et sans l'aide du dernier théorème (**1237**). Ayant prolongé BA d'une quantité AD=AC, joint DC, mené AE perpendiculaire à CD, et AF, EG parallèles à BC ; on a (**251**) l'angle extérieur CAD=B+C, l'angle DAE = (**235** et **236**) $\frac{1}{2}$ CAD=$\frac{1}{2}$ (B+C), et parce que l'angle DAF=B, à cause de AF parallèle à BC, il est clair que l'angle FAE=$\frac{1}{2}$(C—B). Maintenant la parallèle EG, menée par le point milieu E de CD, bissecte (**509** ou **518**) le côté BD du triangle BDC ; on a donc GD =GB=$\frac{1}{2}$ BD=$\frac{1}{2}$ (AB+AC), à cause de AD=AC par constr., et AG=(**366**) $\frac{1}{2}$ (AB—AD)=$\frac{1}{2}$ (AB—AC). Dans le triangle rectangle AED, prenant pour rayon le côté AE, l'autre côté ED devient (**1229**) la tangente de l'angle DAE, c.-à-d., de $\frac{1}{2}$ (B+C), et EF la tangente de l'angle FAE, c.-à-d., de $\frac{1}{2}$ (C—B) ; et les triangles semblables GED, AFD donnent (**518**) GD : GA :: ED : EF ou (**73 Ax.**) 2GD : 2GA :: ED : EF, c.-à-d., BD (ou BA+AC) : 2GA (ou AB—AC) :: tang. DAE ou tang. $\frac{1}{2}$ (B+C) : tang. FAE ou tang. $\frac{1}{2}$ (C—B) ; donc, etc.

(**1243**) **Sco.** A l'aide de $\frac{1}{2}$ (B+C) et de $\frac{1}{2}$ (C—B), on obtient B et C séparément (**368**) savoir : C=$\frac{1}{2}$ (B+C)+$\frac{1}{2}$ (C—B) et B=$\frac{1}{2}$ (B+C)—$\frac{1}{2}$ (C—B) ou, après avoir trouvé C, on a B= (B+C)—C ; le plus grand C des deux angles cherchés étant toujours opposé, comme on l'a vu (**267**) au plus grand côté AB, et le plus plus petit angle B, au plus petit côté AC.

PROP. IV. THÉOR.

(1244) **Si du sommet A d'un des angles d'un triangle rectiligne quelconque ABC, l'on abaisse une perpendiculaire AD sur la base BC prolongée s'il le faut ; la somme des segments de la base, est à la somme des deux autres côtés du triangle, comme la différence de ces côtés, est à la différence des segments de la base ;** ou BD+DC : AB+AC :: AB—AC : BD—DC.

Cette proposition a déjà (578) été démontrée, pour le cas où la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, et l'on voit de suite qu'il en est tout de même quand la perpendiculaire tombe en dehors, faisant attention seulement, que les segments de la base sont, dans le second cas, comme dans le premier, les distances BD, C′D de chacune des extrémités B, C′, de la base, à la perpendiculaire AD.

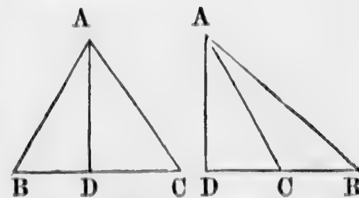


(1245) **D'ailleurs.** On a vu (614) que (AB+AC)×(AB—AC)=(BD+DC)×(BD—DC) ; d'où il suit (88) que (BD+DC) : (AB+AC) :: (AB—AC) : (BD—DC).

(1246) **Sco.** A l'aide de BD+DC et de BD—DC, on obtient BD et DC séparément (367) savoir BD=$\frac{1}{2}$(BD+DC) +$\frac{1}{2}$(BD—DC) et DC=$\frac{1}{2}$(BD+DC)—$\frac{1}{2}$(BD—DC) ou DC= (BD+DC)—BD.

PROP. V. THÉOR.

(1247) **Dans tout triangle rectiligne ABC, le cosinus de l'un quelconque B des angles, est égal au rayon multiplié par, la différence entre la somme des carrés des côtés adjacents à l'angle et le carré du côté opposé, divisée par deux fois le rectangle des côtés adjacents ;** c.-à-d., cos. $B=R\times\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB.BC}$, ou cos .$B=R\times\frac{AC^2-(AB^2+BC^2)}{2AB.BC}$, suivant que l'angle B est aigu ou obtus.



Car, ayant mené AD perpendiculaire à la base BC prolongée s'il le faut, on a, quand B est aigu (**389** transp.) $AB^2+BC^2-AC^2 = 2BC.BD$, et quand B est obtus on a (**391** transp.) $AC^2-(AB^2+BC^2)=2BC.BD$. Mais (**330**) $BC.BA : BC.BD :: BA : BD :: R : \cos. B$; donc aussi (**73**) $2BC.BA : 2BC.BD :: R : \cos. B$; or $2BC.BD$ est la différence entre (AB^2+BC^2) et AC^2 ; donc, deux fois le rectangle AB.BC, est à (:) la différence entre AB^2+BC^2 et AC^2, comme (::) le rayon, est au (:) cosinus de B ; c.-à-d., $2AB.BC : AB^2+BC^2-AC^2$, ou $AC^2 - (AB^2 + BC^2) :: R : \cos. B$; d'où, (**86**)

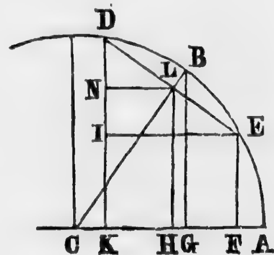
$$\cos. B \text{ aigu} = R \times \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB.BC},$$

$$\text{et } \cos. B \text{ obtus} = R \times \frac{AC^2-(AB^2+BC^2)}{2AB.BC}.$$

(**1248**) **Cor.** Si le rayon=1, on a (**1231** 2°) $BD=BA\times\cos. B$ et $2BC.BA\times\cos.B = 2BC.BD$; donc, quand B est aigu, $2BC.BA\times\cos.B=BC^2+BA^2-AC^2$ et ajoutant AC^2 de part et d'autre ; $AC^2+2\cos. B\times BC.BA=BC^2+BA^2$; ôtant maintenant de chaque côté $2\cos. B\times BC.BA$, on a $AC^2=BC^2-2\cos. B\times BC.BA+BA^2$. D'où, $AC=\sqrt{(BC^2-2\cos. B\times BC.BA+BA^2)}$. Si B est obtus, on démontre de la même manière que $AC=\sqrt{BC^2+2\cos. B\times BC.BA+BA^2}$.

PROP. VI. PROB.

(**1249**) **Etant donnés les sinus de deux arcs** AB, BD ; **trouver le sinus** DK **de leur somme, et le sinus** EF **de leur différence.**



Soit BE=BD, l'arc EA=AB—BD, et EF=sin. EA = sin. (AB—BD). Ayant joint DE et mené CB, on a DL=sin. BD = (**1216**) demi-corde de l'arc double DE. Soient LN, EI parallèles à AC, LH perpendiculaire à AC, c.-à-d., parallèle à BG et à DK. Les tri-

angles semblables DNL, DIE donnent DN : DI :: DL : DE ; or DL$=\frac{1}{2}$ DE ; donc DN$=\frac{1}{2}$ DI. De plus, LH=NK ; or NK+DN=DK et NK—NI=LH—DN=EF. Cela posé, les triangles semblables CBG, CLH donnent CB : CL :: BG : LH, ou R. Cos. BD :: sin. AB : LH ; d'où, LH $= \frac{1}{2}$ (DK+EF) $= \frac{\text{sin. AB}\times\text{cos. BD}}{\text{R}}$. Les triangles semblables (323) CBG, DNL donnent CB : CG :: DL : DN, ou R : cos. AB :: sin. BD : DN$=\frac{1}{2}$ (DK—EF)$=\frac{\text{sin. BD}\times\text{cos. AB}}{\text{R}}$; donc (367) DK ou DN+LH $= \frac{\text{sin. AB}\times\text{cos. BD}+\text{sin. BD}\times\text{cos. AB}}{\text{R}}$ et EF$=\frac{\text{sin. AB}\times\text{cos. BD}-\text{sin. BD}\times\text{cos. AB}}{\text{R}}$; c.-à-d. que :

(1250) **Cor. 1. Le sinus de la somme de deux arcs, est égal à la somme des produits du sinus du plus grand par le cosinus du plus petit et du sinus du plus petit par le cosinus du plus grand, divisée par le rayon ; et le sinus de leur différence est égal à la différence de ces produits divisée par le rayon.**

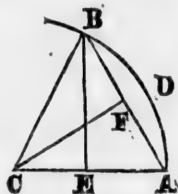
(1251) **Cor. 2.** Si AB=BD, on a sin. (AB+BD)=sin. 2AB $= \frac{2\,\text{sin. AB}\times\text{cos. BD}}{\text{R}}$, d'où l'on tire R : cos. AB :: 2 sin. AB : sin. 2AB ; c.-à-d., **le rayon, est au cosinus d'un arc, comme le double sinus de cet arc, est au sinus du double de cet arc.**

(1252) **Cor. 3.** Soient AE, AB, AD trois arcs tels que la différence BE du premier au second est égale à la différence BD du second au troisième, on aura **le rayon, au cosinus de la différence commune BE, comme le sinus de AB l'arc du milieu, à la demi-somme des sinus de AE et AD les arcs extrêmes**; car, la droite LH menée par le point milieu L du côté DE du trapèze KFED=(325) $\frac{1}{2}$ (sin. AD+sin. AE) et on vient de voir (1249) que CB : CL :: BG : LH, ou R : cos. BE :: sin. AB : $\frac{1}{2}$ (sin. AE+sin. AD).

2° **Cor. 4.** On vient de voir que CB : CL :: BG : LH, ou R : cos. BE :: sin. AB : $\frac{1}{2}$ sin. AD+$\frac{1}{2}$ sin. AE ; donc, si l'on

met $AB=A$, $BE=B$, $R=1$, on aura $AD=A+B$ et $AE=A-B$, et la proportion deviendra $1 : \cos. B :: \sin. A : \frac{1}{2} \sin. (A+B) + \frac{1}{2} \sin. (A-B)$; d'où (88) $\sin. A \times \cos. B = \frac{1}{2} \sin. (A+B) + \frac{1}{2} \sin. (A-B)$. Maintenant soit $A+B=S$ et $A-B=D$, on aura (368) $A=\frac{S+D}{2}$ et $B=\frac{S-D}{2}$; d'où, $\sin \frac{S+D}{2} \times \cos. \frac{S-D}{2} = \frac{1}{2} \sin. S + \frac{1}{2} \sin. D$; mais comme S et D sont deux arcs quelconques, on peut encore les désigner A et B ; donc, $\sin. \frac{A+B}{2} \times \cos. \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \sin. A + \frac{1}{2} \sin. B$, ou $2 \sin. \frac{A+B}{2} \times \cos. \frac{A-B}{2} = \sin. A + \sin. B$.

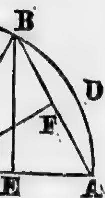
(**1253**) **Sco. PROB. Etant donné le sinus** BE **d'un arc, on trouve facilement le sinus** $BF=AF=$(**1216**) $\frac{1}{2}$ AB **de la moitié** BD **ou** AD **de cet arc.**



Car, le $\cos. CE=$(**1227**) $\sqrt{CB^2-BE^2}$ ou $\sqrt{R^2-(\sin. AB)^2}$ et sinus-verse $AE=AC-CE=R-\cos.$ On a donc, dans le triangle rectangle BEA, les côtés BE, EA, pour trouver $BF=\frac{1}{2} BA=\frac{1}{2}\sqrt{(BE^2+AE^2)}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{\sin.^2 AB+\sin.\text{-ver.}^2 AB}$.

CONSTRUCTION DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

(**1254**) Prenant (**1223**) pour rayon du cercle, l'unité, si l'on calcule et que l'on dispose en forme de table les longueurs des lignes représentant les sinus, cosinus, tangentes, etc., pour chaque minute du quart-de-circonférence ; cette table sera une table de sinus, cosinus, tangentes, etc. **naturels**, ainsi appelée pour la distinguer des tables de sinus, cosinus, etc. **logarithmiques**, c.-à-d., de sinus, etc., dont les valeurs réelles ou les représentants ou nombres naturels sont remplacés, pour une raison que l'on fera bientôt voir, par les logarithmes (**1264**) de ces nombres ou valeurs.



(**1255**) Il est clair qu'une table de cette espèce, sous un rayon égal à l'unité, représenterait également les valeurs des sinus, cosinus, etc. pour un rayon=10, 100, 1000, etc., en supposant seulement le **point décimal** reculé de 1, 2, 3, etc., chiffres ou places vers la droite ; et à l'aide de cette table, on calculerait facilement les représentants numériques des mêmes lignes trigonométriques, pour un rayon quelconque ; puisque (**1222**) dans différents cercles, les sinus, etc., d'arcs contenant un même nombre de dégrés, sont entre eux comme les rayons de ces arcs.

(**1256**) La première chose à faire consiste à **trouver le sinus d'une minute** ($1'$) c.-à-d., du plus petit arc des tables. A cet effet, prenant pour point de départ l'arc de 30° dont le sinus est (**1216**) égal au demi-rayon, on aura par la méthode du par. (**1253**) le sinus de $15° = \frac{1}{2}\sqrt{\text{sin.}^2 30° + \text{sin.-ver.}^2 30°}$; or, (**1227**) $\cos. 30° = \sqrt{R^2 - \text{sin.}^2 30°} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2}$ (puisque $\sin. 30° = \frac{1}{2}$, quand le rayon est 1.) $= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{.75}$, et comme sin.-ver. $30° = R - \cos. 30°$, on a sin.-ver. $30° = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$; donc $\sin. 15° = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2}$. Poursuivant ainsi l'opération, on a $\cos. 15° = \sqrt{R^2 - \text{sin.}^2 15°}$, sin.-ver. $15° = R - \cos. 15°$ et $\sin. 7\frac{1}{2}° = \frac{1}{2}\sqrt{\text{sin.}^2 15° + \text{sin.-ver.}^2 15°}$; sin. $3\frac{3}{4}°$ ou sin. $3° 45' = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{sin.}^2 7\frac{1}{2}° + \text{sin.-ver.}^2 7\frac{1}{2}°)}$; sin. $1\frac{7}{8}°$ ou sin. $1° 52' 30'' = \frac{1}{2}\sqrt{(\sin. 3° 45')^2 + (\text{sin.-ver. } 3° 45')^2}$ et ainsi de suite, jusqu'à ce que, après **11** bissections successives de l'arc de 30°, l'on arrive au sinus d'un arc de $52'' 44''' 03^{\text{IV}} 45^{\text{V}}$.

(**1257**) Maintenant, il est clair (**430** et **665**) que **les sinus de très petits arcs sont entre eux, à très près, comme ces arcs**; car ces sinus sont les moitiés de cordes de très petits arcs et ces cordes sont sensiblement égales aux arcs qu'elles sous-tendent et par conséquent proportionnelles à ces arcs; on fera donc arc $52'' 44''' 03^{\text{IV}} 45^{\text{V}}$ ou $52.734375''$ à son sinus, comme l'arc de $1'$, est à son sinus.=0002908882.

(**1258**) **D'ailleurs**, on arrive encore, et plus aisément, au sinus de 1′, en divisant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, par 180° et par 60′, pour avoir l'arc de 1′; or la demi-circ.=(**668**) 3.14159265358979 laquelle divisée par 180, puis par 60, ou de suite par (180×60) 10800, donne l'arc d'une minute=.0002908882086657. D'un si petit arc, comme on vient de le dire, le sinus, la corde et l'arc diffèrent presque imperceptiblement du rapport de l'égalité; de sorte qu'on peut regarder comme sinus de 1′, les dix premiers des chiffres précédents, c.-à-d., .0002908882, et en effet, le sinus qu'on trouve dans les tables de sinus naturels annexées à ce traité, et calculées à 5 décimales, est .00029, et dans celles qui sont portées à 7 décimales, ce sinus est .0002909; la dernière décimale des tables étant augmentée d'une unité, quand la décimale suivante est plus que 5.

(**1259**) Ayant trouvé le sinus de l'arc de 1 =.0002908882 on en aura (**1227**) le cosinus$=\sqrt{\text{R}^2-\text{sin.}^2 1'}=\sqrt{1-\text{sin.}^2 1'}$, c.-à-d., cos. 1′=.9999999577; et on a vu (**1251**) que R : cos. arc : 2 sin. arc : sin. 2 arc ou sin. arc double; on aura donc le sinus de 2′ par la proportion R : cos. 1′ :: 2 sin. 1′ : sin. 2′ ou 1 : .9999999577 :: .0005817764 : .0005817764.

Maintenant, on a cos. $2'=\sqrt{1-\text{sin.}^2 2'}$ et (**1250**) sin. 3′= $\frac{\text{sin. } 2'\times\text{cos. } 1'+\text{sin. } 1'\times\text{cos. } 2'}{\text{R}}$=sin. 2′×cos. 1′+sin. 1′×cos. 2′ =.0008726646; car la division par R, quand R=1, ne change aucunement la valeur de la quantité sur laquelle on opère. Pour avoir le sinus de 4′, il est clair qu'on se servira indifféremment de l'une ou de l'autre des deux formules (**1250**) sin. 4′=sin. 3′×cos. 1′+sin. 1′×cos. 3′, ou (**1251**) R : cos. 2′ :: 2 sin. 2′ : sin. 4′=$\frac{\text{cos. } 2'\times 2 \text{ sin. } 2'}{\text{R}}$=cos. 2′×2 sin. 2′=.0011635526. On aura sin. 5′=sin. 4′×cos. 1′+sin. 1′×cos. 4′=.0014544407, et ainsi de suite.

De même pour les dégrés, ayant trouvé sin. 1°, on aurait sin. 2°=sin. 1°×cos. 1°+sin. 1°×cos. 1°; sin. 3°=sin. 2°× cos. 1°+sin. 1°×cos. 2°; sin. 4° = sin. 3°×cos. 1°+sin. 1°× cos. 3°, et ainsi de suite.

(**1260**) On a vu (**1252**) que 1′, 2′, 3′, étant trois arcs tels que, la différence du premier au second, est égale à la différence du second au troisième, on a R : cos. 1′ :: sin. 2′ : $\frac{1}{2}$ (sin. 1′ + sin. 3′) où (**73**) sin. 3′ + sin. 1′ = 2 cos. 1′ × sin. 2′. Retranchant sin. 1′ de chaque côté, on a sin. 3′=2 cos. 1′ ×sin. 2′—sin. 1′. On a de même, sin. 4′=2 cos. 1′×sin. 3′—sin. 2′, et ainsi de suite; donc :

2 cos. 1′×sin. 1′—sin. 0′=sin. 2′=0005817764
2 cos. 1′×sin. 2′—sin. 1′=sin. 3′=0008726646
2 cos. 1′×sin. 3′—sin. 2′=sin. 4′=0011635526
2 cos. 1′×sin. 4′—sin. 3′=sin. 5′=0014544407
2 cos. 1′×sin. 5′—sin. 4′=sin. 6′=0017453284
2 cos. 1′×sin. 6′—sin. 5′=sin. 7′=0020362159

Et ainsi de suite.

Ce qui simplifie de beaucoup l'opération, et réduit toute la difficulté à multiplier chaque résultat successif par la quantité, 2 cos. 1′=1.9999999154.

(**1261**) Appelant a et b les deux arcs, et multipliant l'une par l'autre les deux formules du par. (**1249**) savoir : $\sin.(a+b)=\frac{\sin. a\times\cos. b+\sin. b\times\cos. a}{R}$ et $\sin.(a-b)=\frac{\sin. a\times\cos. b-\sin. b\times\cos. a}{R}$, on obtient $\sin.(a+b)\times\sin.(a-b)=\frac{\sin.^2 a\times\cos.^2 b+\sin. a\times\sin. b\times\cos. a\times\cos. b-\sin. a\times\sin. b\times\cos. a\times\cos. b-\sin.^2 b\times\cos.^2 a}{R^2}$; biffant les termes $+\sin. a \sin. b \cos. a \cos. b$ (**30**) et $-\sin. a \sin. b \cos. a \cos. b$ qui se détruisent, il reste $\sin. (a+b)\times\sin. (a-b)=\frac{\sin.^2 a \cos.^2 b-\sin.^2 b \cos.^2 a}{R^2}$; substituant maintenant à $\cos.^2 a$, son égale (**1227**) $R^2-\sin.^2 a$ et à $\cos.^2 b$ substituant son égale $R^2-\sin.^2 b$, il vient $\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)=\frac{\sin.^2 a\times(R^2-\sin.^2 b)-\sin.^2 b\times(R^2-\sin.^2 a)}{R^2}=\frac{\sin.^2 a\times R^2-\sin.^2 a\times\sin.^2 b-\sin.^2 b\times R^2+\sin.^2 b\times\sin.^2 a}{R^2}$; effa-

çant les termes $-\sin.^2 a \times \sin.^2 b + \sin.^2 b \times \sin.^2 a$ qui se détruisent, et divisant par R^2, il vient enfin, $\sin. (a+b) \times \sin. (a-b) = \sin.^2 a - \sin.^2 b =$ (**370** ou **371**) $(\sin. a + \sin. b) \times (\sin. a - \sin. b)$; d'où (**88**) $\sin. (a-b) : \sin. a - \sin. b :: \sin. A + \sin. B : \sin. (a+b)$.

On pourra donc à l'aide de cette proportion, après avoir obtenu les sinus de 1′ et de de 2′, continuer l'opération comme suit :

$$\text{Sin. } 1' : \text{sin. } 2' - \text{sin. } 1' :: \text{sin. } 2' + \text{sin. } 1' : \text{sin. } 3'$$
$$\text{Sin. } 2' : \text{sin. } 3' - \text{sin. } 1' :: \text{sin. } 3' + \text{sin. } 1' : \text{sin. } 4'$$
$$\text{Sin. } 3' : \text{sin. } 4' - \text{sin. } 1' :: \text{sin. } 4' + \text{sin. } 1' : \text{sin. } 5'$$
$$\text{Sin. } 4' : \text{sin. } 5' - \text{sin. } 1' :: \text{sin. } 5' + \text{sin. } 1' : \text{sin. } 6'$$
$$\text{Sin. } 5' : \text{sin. } 6' - \text{sin. } 1' :: \text{sin. } 6' + \text{sin. } 1' : \text{sin. } 7'$$

Et ainsi de suite

Le calculateur pourrait procéder de la même manière pour les dégrés.

$$\text{Sin. } 1^\circ : \text{sin. } 2^\circ - \text{sin. } 1^\circ :: \text{sin. } 2^\circ + \text{sin. } 1^\circ : \text{sin. } 3^\circ$$
$$\text{Sin. } 2^\circ : \text{sin. } 3^\circ - \text{sin. } 1^\circ :: \text{sin. } 3^\circ + \text{sin. } 1^\circ : \text{sin. } 4^\circ$$
$$\text{Sin. } 3^\circ : \text{sin. } 4^\circ - \text{sin. } 1^\circ :: \text{sin. } 4^\circ + \text{sin. } 1^\circ : \text{sin. } 5^\circ$$

Et ainsi de suite.

(**1262**) On peut donc, au moyen de ces formules, construire une table des sinus, et par conséquent (**1227**) aussi, des cosinus de tous les dégrés et minutes depuis 0° jusqu'à 90°, c.-à-d., dans le quart-de-circ. ; et parce que (**1228**) $\text{tang.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ quand $R=1$, on calculera la table des tangentes des divers arcs du quart-de-circ., en faisant le quotient (**21**) du sinus de chacun de ces arcs par son cosinus. Quand on aura trouvé les tangentes jusqu'à 45°, on obtiendra plus aisément celles du reste du quart-de-circ., à l'aide d'une autre règle ; car, la tangente d'un arc au-dessus de 45°, est (**1224**) la cotangente d'un arc autant au-dessous de 45°, et le rayon étant (**1225**) moyen proportionnel entre la tangente et la cotangente, il suit que si l'on appelle D la différence entre un arc quelconque et 45°, on aura $\text{tang. } (45^\circ - D) : 1 :: 1 : \text{tang. } (45^\circ + D)$; de sorte que $\text{tang. } (45 + D) = \frac{1}{\text{tang. } (45^\circ - D)}$.

On calculera les sécantes par la méthode du par. (**1226**) où il est démontré que le rayon est moyen proportionnel entre le cosinus et la sécante, ce qui donne séc.$=\frac{1}{\text{cos.}}$, et on aura, au besoin, les sinus-verses, en soustrayant (**1217**) les cosinus du rayon.

(**1263**) **Observons** que **telle proposition** (**1231**) **qui, exprimée arithmétiquement, est vraie, devient absurde quand on l'exprime géométriquement** ; ainsi, on a par exemple, au par. (**1252**) la proportion R : cos. BE :: sin. AB : $\frac{1}{2}$ (sin. AE+sin. AD), d'où l'on tire (**86**) cos. BE$\times$sin. AB= R$\times\frac{1}{2}$ (sin. AE+sin. AD), c.-à-d., le rectangle formé par le cosinus BE et le sinus AB est égal au rectangle ayant pour côtés le rayon et la demi-somme des sinus de AE et de AD. Si le rayon est 1, on peut le négliger entièrement (**1230**) puisque la multiplication ou division par 1, ne change aucunement la valeur des termes ; l'expression devient alors cos. BE$\times$ sin. AB=$\frac{1}{2}$ (sin. AE+sin. AB) ce qui est vrai, pris arithmétiquement, mais absurde, pris dans un sens géométrique, puisque les quantités de chaque côté du signe d'égalité sont de différente espèce (**25**) et ne peuvent admettre de comparaison, l'une étant un rectangle ou surface et l'autre une ligne. De même, donc, qu'on fait, à volonté, disparaître le rayon, des expressions trigonométriques dont on a jusqu'ici traité ; de même, il faut le faire reparaître, quand on veut prendre ces expressions dans un sens géométrique, et en général, il est nécessaire que le nombre de **multiplicateurs linéaires**, c.-à-d., de lignes dont on multiplie ensemble les valeurs numériques, soit le même dans chaque membre (**26**) d'une équation, sans quoi, l'on comparerait ensemble des quantités dissemblables ou de différente espèce.

LOGARITHMES.

(**1264**) Lorsque dans les calculs nécessaires pour déterminer les parties inconnues d'un triangle, on se sert des

lignes trigonométriques elles-mêmes, ou de leurs représentants numériques, que l'on trouve dans les tables de sinus, cosinus, tangentes, etc., naturels, il est évident qu'il faut faire les opérations de la multiplication et de la division, travail, souvent long et ardu.

Pour obvier à cette difficulté, et réduire toutes les opérations, autant que possible, à des additions et soustractions, on a imaginé de remplacer les nombres eux-mêmes, par d'autres nombres tels que la somme de ces derniers, corresponde au produit des premiers, et la différence des uns, au quotient des autres, et on a donné à ces nombres le nom de **logarithmes**.

(**1265**) Les **logarithmes** sont donc des nombres tels que la somme des logarithmes de deux nombres correspond au produit de la multiplication de ces deux nombres l'un par l'autre, et la différence de ces logarithmes, au quotient de la division de ces deux nombres l'un par l'autre; ce qui a lieu quand on opère sur deux séries de nombres dont les termes de l'une correspondent aux exposants (**34**) des puissances (**34**) des termes de l'autre. Cette dernière **série** est dite **géométrique**, et est telle que quand on prend quatre termes consécutifs quelconques de la série ou quatre autres termes quelconques qui soient proportionnels (**62**) l'un à l'autre, on a (**86**) le produit des extrêmes égal à celui des moyens. L'autre **série** est dite **arithmétique** et est telle que si l'on prend quatre termes consécutifs quelconques de cette série ou les quatre qui correspondent à quatre termes proportionnels de l'autre série, on a **la somme des extrêmes égale à celle des moyens.**

En effet, soit :

a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7,

ou 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7,

ou 1, 10, 100, 1000, 10,000, 100,000, 1000,000, 10,000,000 une série géométrique,

et 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, la série arithmétique correspondante; on aura, conformément à

ce que l'on vient de dire, $a^0 \times a^3 = a^1 \times a^2 = a^3$ ou $1 \times 1000 = 10 \times 100 = 1000$; les quatre termes correspondants 0, 1, 2, 3, de la série arithmétique, donnent $0+3=1+2=3$ qui est l'exposant de a^3. Prenant quatre autres termes consécutifs quelconques correspondants, des deux séries, par exemple, a^2, a^3, a^4, a^5, et 2, 3, 4, 5, on aura encore $a^2 \times a^5 = a^3 \times a^4 = a^7$ ou $100 \times 100{,}000 = 1000 \times 10{,}000 = 10{,}000{,}000$, et $2+5=3+4=7$ =exposant de a^7. Prenant maintenant quatre termes proportionnels quelconques de la série géométrique, soit $a^0 : a^2 :: a^3 : a^5$, on aura $a^0 \times a^5 = a^2 \times a^3 = a^5$ ou $1 \times 100000 = 100 \times 1000 = 100{,}000$ et les quatre termes correspondants 0, 1, 3, 5 de la série arithmétique donnent $0+5=2+3=5$=exposant de a^5. Il est donc évident que ce qui a lieu pour les termes proportionnels correspondants des deux séries sur lesquelles on vient d'opérer, aura également lieu pour tous autres termes proportionnels correspondants quelconques de ces mêmes séries. De même donc, que les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc., de la série arith., sont les logarithmes des nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc., de la série géométrique ; de même, si entre 1 et 10, 10 et 100, 100 et 1000, etc., on intercalait un nombre de moyens géométriques, et entre 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3, etc., un nombre égal de moyens arithmétiques correspondants, ces moyens arithmétiques seraient encore les logarithmes des moyens géométriques de l'autre série.

(**1266**) Maintenant on conçoit que, si entre 1 et 10 de la série géométrique, l'on insérait un grand nombre de moyens proportionnels géométriques, il s'en trouverait un égal ou à peu près égal à 2, un autre égal à 3, un troisième égal à 4, un autre égal à 5, 6, 7, etc. ; et si entre 10 et 100, l'on insérait un grand nombre de moyens géométriques, il s'en trouverait un égal ou à peu près égal à 11, un autre égal à 12, un autre égal 13, 14, 15, etc. De même, si entre 0 et 1 de la série arithmétique, l'on insérait un nombre de moyens arithmétiques, égal à celui des moyens géométriques insérés entre 1 et 10 ; et entre 1 et 2, un nombre de moyens arithmétiques

égal à celui des moyens géométriques insérés entre 10 et 100 ; alors, d'après ce que l'on vient de dire, chaque terme consécutif de la série arithmétique serait le logarithme du terme correspondant de la série géométrique.

(**1267**) S'il s'agit, par exemple, de trouver le logarithme de 2, 11, 101, etc., avec sept décimales, où à un dix-millionième près ; on imaginera une progression géométrique dans laquelle 10 soit le dix-millionième terme après 1, 100 le dix-millionième terme après 10, 1000 le dix-millionième terme après 100, et ainsi de suite ; et entre les 9,999,999 moyens géométriques qu'il y aura entre 1 et 10, entre 10 et 100, entre 100 et 1000, etc., on en cherchera un qui soit égal à 2, 11, 101, etc. ou au moins qui ne s'en éloigne pas d'un dix-millionième. On imaginera de même entre 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3, etc., une progression arithmétique dans laquelle 1 soit le dix-millionième terme après 0, 2 le dix-millionième terme après 1, 3 le dix-millionième terme après 2, etc. ; et le terme de cette progression qui répondra au moyen géométrique substitué à 2, 11, 101, etc., sera le logarithme de 2, 11, 101, etc.

(**1268**) Pour faire comprendre au commençant, comment on a pu construire les tables de logarithmes, soit proposé de trouver le logarithme de 9 avec 7 décimales. On cherche un moyen géométrique proportionnel entre 1 et 10 ; ce qui se fait (**91**) en prenant la racine du produit de 1 par 10, c.-à-d., en prenant la racine de 10, laquelle, en poussant l'approximation jusqu'aux dix-millionièmes, est 3.1622777 ; et en même temps on cherche un moyen proportionnel arithmétique entre 0 et 1 ; ce qui se fait en prenant la moitié de la somme $0+1$, c.-à-d., en prenant $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0.500,0000$. Mais parce que le moyen géométrique trouvé n'est pas 9 et qu'il en diffère même de plus d'un dix-millionième, on fait une seconde opération, et l'on cherche un autre moyen géométrique entre celui qu'on vient de trouver et 10, c.-à-d. entre 3.1622777 et 10 ; on trouve, pour le second moyen géométrique, 5.6234132 ; et en même temps on cherche un

moyen arithmétique entre 0.5000000 et 1.0000000, lequel est 0.7500000 ; et comme ce dernier moyen géométrique est encore trop éloigné de 9, on réitère l'opération, cherchant toujours de nouveaux moyens géométriques moins éloignés de 9 que les précédents. On cherche aussi toujours de nouveaux moyens arithmétiques; on continue jusqu'à ce que la différence du moyen géométique avec 9 soit moindre qu'une dix-millionième; ce qui n'arrive, dans cet exemple, qu'à la vingt-sixième opération, par laquelle on trouve enfin 9.0000000, et pour le moyen arithmétique correspondant, 0.9542425 qu'on prend pour le logarithme de 9, parce qu'on ne s'est proposé que d'éviter l'erreur d'un dix-millionième et qu'en conséquence on n'a mis que 7 décimales.

(**1269**) On a véritablement, à présent, des méthodes plus expéditives ; mais en voilà assez pour donner une idée du procédé qu'on peut suivre pour calculer une table de logarithmes. Au reste, les logarithmes ne sont la plus part qu'approchés ; de sorte qu'il peut y avoir une erreur d'environ une demi-unité décimale du 7ème ordre, dans les tables a 7 décimales, et même du 6ème ordre, lorsque les tables n'ont que 6 décimales, comme celles qui sont attachées à ce traité.

(**1270**) Lorsqu'on a trouvé les logarithmes des nombres premiers, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, etc., c.-à-d., des nombres qui n'ont aucun autre diviseur que l'unité ; l'on trouve, par une simple addition ou soustraction, les logarithmes de plusieurs autres nombres, savoir : de tous les produits ou quotients de ces nombres premiers. Ainsi, il est clair, d'après ce que nous avons dit (**1265**) qu'on aura le logarithme de 4, égal au double du logarithme de 2, puisque $2\times2=4$; on aura de même le logarithme de 6, en faisant la somme des logarithmes de 2 et de 3, puisque $2\times3=6$; la somme des logarithmes de 2 et 4, fournira le logarithme de 8, puisque $2\times4=8$; de même, on aura le logarithme de 9 ou de 3×3, en prenant le double du logarithme de 3 ; log. 5+log. 2

=log. 10, log. 6+log. 2=log. 12, log. 7+log. 2=log. 14, log. 3 +log. 5=log. 15, et ainsi de suite ; ce qui réduit, après tout, à un assez petit nombre, les logarithmes à trouver par les règles données au par. (**1268**). De même, on trouve au besoin le log. de 3 égal à la moitié du log. de 9, log. 15—log. 3=log. 5, log. 27—log. 3=log. 9, et ainsi de suite.

(**1271**) De la nature des progressions géométrique et arithmétique, il suit premièrement, que **pour avoir le logarithme du produit de deux quantités, il faut prendre la somme (21) de leurs logarithmes, et pour avoir le logarithme du quotient de deux quantités, il faut prendre la différence (21) de leurs logarithmes.** Il suit aussi, que pour multiplier deux nombres l'un par l'autre, il suffit de prendre la somme de leurs logarithmes, cette somme sera le logarithme du produit ; et pour diviser deux nombres l'un par l'autre, on prendra la différence de leurs logarithmes, laquelle sera le logarithme du quotient voulu. D'après ce qu'on vient de dire, il est clair qu'on aura le log. du carré d'un nombre, égal ou double du log. de ce nombre, et le log. de la racine carrée d'un nombre, égal à la moitié du log. de ce nombre ; de même on aura le log. du cube d'un nombre, égal au triple du log. de ce nombre, et le log. de la racine cubique d'un nombre, égal au tiers du log. de ce nombre ; et en général, on aurait, au besion, le log. d'une puissance ou d'une racine quelconque d'un nombre, en multipliant ou divisant le log. de ce nombre, par le nombre d'unités dans l'exposant de la puissance ou de la racine proposée.

(**1272**) Pour faire une règle de trois par logarithmes, c.-à-d., trouver le quatrième ou (**64**) l'un quelconque des termes d'une proportion géométrique ; il suit, de ce qui précède, que l'on ajoutera ensemble les logarithmes des termes moyens ou des extrêmes, suivant le cas, et que de leur somme, on retranchera le logarithme de l'extrême ou du moyen connu, pour avoir le logarithme de l'extrême ou moyen cherché. Par exemple si on a $a : a^3 :: a^4 : x$, on aura $x = a^3 + a^4 - a^1 = a^7 - a^1 = a^6$; donc, 6 est le log. du nombre

cherché; ou, soit 341 : 428 :: 5797 : x, on a log. 428=2.631444, log. 5797=3.763203 et log. 341=2.532754 ; maintenant, log. 428+log. 5797=6.394647, duquel, retranchant 2.532754 log. de 341, on a 3.861893 pour log. du terme cherché, vis-à-vis duquel, on trouve dans les tables le nombre 7276, valeur de x. Tout ceci est fondé sur ce que, le quatrième terme d'une progression géométrique, dont on connaît les moyens et l'un des extrêmes, s'obtient (90) en divisant le produit des moyens par l'extrême connu, ou le produit des extrêmes par le moyen connu, pour avoir l'autre moyen.

(1273) On appelle **caractéristique d'un logarithme**, le nombre qui se trouve devant ou à gauche du point décimal, c.-à-d., le nombre entier séparé par le point, de la partie décimale du logarithme. Ce nombre indique à quelle classe d'unités, par exemple, des dizaines, centaines, etc., appartient le nombre auquel le logarithme correspond. On voit, d'après ce qui a été dit, que la caractéristique de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10 est 0, depuis 10 à 100 la caractéristique est 1, de 100 à 1000 la caractéristique est 2, de 1000 à 10000 la caractéristique est 3; et en général, un nombre contient autant de chiffres, et un de plus, qu'il y a d'unités dans la caractéristique de son logarithme.

(1274) C'est la même chose de multiplier un nombre par 10, ou d'ajouter une unité à la caractéristique de son logarithme; et en général, on multiplie autant de fois un nombre par 10, qu'on ajoute d'unités à la caractéristique de son logarithme ; comme aussi, l'on divise un nombre autant de fois par 10, qu'on ôte d'unités de la caractéristique de son logarithme.

(1275) Pour ce qui est du **logarithme d'une fraction**, il est clair que, la fraction $\frac{3}{4}$, par exemple, étant un nombre 3 divisé par un nombre 4, on aura, conformément à ce qu'on a déjà dit, le log. de la fraction, en retranchant le log. 0.602060 du dénominateur 4, du log. 0.477121 de son numérateur 3, et le reste $\bar{1}.875061$ (=log. .75) sera le log. cherché ; ce qui fait voir que la caractéristique du logarithme d'une fraction moindre que l'unité est négative ; car, la soustraction ne

pouvant se faire, on emprunte un entier, qu'on énonce en conséquence, $\overline{1}$, puisque .875061 excède, de l'unité empruntée, la différence .477121—.602060 ; et en effet, si l'on continue, en descendant, les progressions géométrique et arithmétique :

a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	a^3
10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3
.00001	.0001	.001	.01	.1	1	10	100	1000
—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3

l'exposant -1 ou $\overline{1}$ sera le log. de $a^{-1} = \frac{1}{a} = 10^{-1} = \frac{1}{01}$ $=.1$,—2 ou $\overline{2}$ sera le log. de $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = .01$, —3 ou $\overline{3}$ sera celui de $a^{-3} = \frac{1}{a^3} = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = .001$ et ainsi de suite. Cependant, pour distinguer le log. d'une fraction de l'unité, dont la caractéristique seule est négative, d'un log. qui serait entièrement négatif, c.-à-d., dont la partie fractionnaire ou décimale serait négative, en même temps que sa caract., on écrit, dans le premier cas, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{\text{etc}}$., mettant le signe —(moins) au-dessus de la caractéristique, et dans le second cas on écrit —1, —2, —etc., le signe étant placé devant la caractéristique, c.-à-d. devant le logarithme. Enfin, si le log. était en même temps négatif et celui d'une fraction, on écrirait $-\overline{1}.234567$, $-\overline{2}.345678$, $-\overline{\text{etc}}$.

(**1276**) Pour **trouver le log. d'un nombre entier joint à une fraction,** par exemple de 3 $\frac{2}{5}$, réduisez l'entier en une fraction de même dénominateur, vous aurez $\frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$ dont le log.=log. 17—log. 5.

(**1277**) **Le complément arithmétique d'un logarithme,** est ce qui reste, après avoir retranché ce log. de 10 ; ainsi 10—9.274687=0.725313 est le complément arithmétique de 9.274687 ; et il est à démontrer que l'on obtient correctement **la différence entre deux logarithmes, en ajoutant au premier le complément arithmétique du log. à sous-**

traire, et en diminuant ensuite leur somme de 10, c.-à-d., en retranchant 10 de cette somme.

En effet, soit a le premier log., b le log. à soustraire, $c=10-b$ le complément arithmétique de b ; la différence des logarithmes a, b, s'exprime $a-b$, mais à cause de $c=10-b$, on a $c-10=-b$; donc, si l'on remplace $-b$, dans l'équation $a-b$, par sa valeur $c-10$, on aura $a-b=a+c-10$, ce qui s'accorde avec l'énoncé.

On pourra donc dans toute proportion, au lieu de soustraire le log. du premier terme, de la somme des logarithmes du second et du troisième termes, ajouter à cette somme le complément arithmétique du log. du premier terme ; et l'on peut obtenir directement des tables le complément arith. voulu, en retranchant de 9 le chiffre de gauche du log. donné et, allant vers la droite, retranchant chaque chiffre suivant de 9, jusqu'au dernier qu'on ôtera de 10, ce qui sera la même chose que de retrancher le log. de 10 ; car, soit à retrancher le log. 2.104729 du log. 3.274107 on aura,

par la méthode ordinaire :	par comp. arith. :
3.274107	3.274107
2.104729	compl. arith. 7.895271
différence=1.169378 ;	en retranchant 10, dif.=1.169378.

On a donc, pour toutes les proportions de la trigonométrie, la règle suivante : **ajouter ensemble le complément arithmétique du logarithme du premier terme, le logarithme du second terme et le logarithme du troisième terme, et leur somme, diminuée de 10, sera le logarithme du quatrième terme.**

2° Si une expression quelconque contenait deux ou plusieurs compléments arithmétiques, il faudrait en retrancher 20 ou autant de fois 10, que de compléments arithmétiques dans l'expression donnée. Et si l'on voulait avoir le comp. arith. d'un log. 11.234567, 13.456789, etc. ou d'un log. quelconque plus grand que 10, on prendrait ce comp.

arith. relativement à 20, pour diminuer ensuite d'autant l'expression qui contiendrait ce comp. arith.

TABLE DE LOGARITHMES DES NOMBRES.

(**1278**) Si l'on calcule et que l'on dispose en forme de table, les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à un nombre donné, cette table est appelée **table de logarithmes.** La table, qui se trouve à la fin de ce traité donne les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10000.

La première colonne, à la gauche de chaque page de la table, est la colonne des nombres, et est désignée par la lettre initiale N placée en tête ; la partie décimale des logarithmes de ces nombres est placée vis-à-vis, sur la même ligne horizontale.

La caractéristique du logarithme, laquelle, comme on l'a vu (**1273**) est toujours connue, étant moindre, d'une unité, que le nombre de chiffres entiers dans le nombre donné, est pour cette raison, omise dans les tables, dans le but de sauver l'espace.

PROBLÈME I.

Trouver, au moyen de la table, le log. d'un nombre quelconque.

1er Cas.

Quand le nombre est moindre que 100.

(**1279**) Cherchez dans la colonne N de la première page de la table, jusqu'à ce que vous trouviez le nombre donné ; le nombre situé tout vis-à-vis, dans la colonne marquée log., est le logarithme voulu.

2ème Cas.

Quand le nombre est plus grand que 100, et moindre que 10,000.

(1280) Trouvez, dans la colonne des nombres, les trois premiers chiffres du nombre donné. Passez alors, horizontalement, aux colonnes marquées 0, 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à ce que vous arriviez à la colonne désignée par le quatrième chiffre du nombre donné; à la gauche des quatre chiffres du log. ainsi trouvé, écrivez les deux premiers chiffres de la colonne marquée 0, lesquels sont sous-entendus dans toutes les autres colonnes 1, 2, 3, 4, etc., étant les mêmes pour toutes ces colonnes, et, comme la caractéristique, omis dans la table, pour sauver l'espace et rendre le tout plus succint et concis. Vous aurez alors la partie décimale du logarithme cherché, que vous ferez précéder de sa caractéristique, laquelle comme on vient de le voir, doit toujours être moindre, d'une unité, que le nombre d'entiers dans le nombre donné. Ainsi le log. de 1122 est 3.049993, celui de 112.2 est 2.049993, celui de 11.22 est 1.049993, celui de 1.122 est 0.049993, et celui de .1122 est $\bar{1}.049993$, la partie décimale du log. étant toujours la même, pour les mêmes chiffres dans le nombre donné, que ces chiffres soient des entiers ou des décimales ; pendant que la différence dans la valeur de l'ensemble de ces chiffres, telle qu'indiquée par la position du point décimal, se trouve pleinement établie par le nombre d'unités dans la caractéristique.

(1281) A dessin de fixer l'œil ou d'attirer l'attention, on a remplacé dans plusieurs des colonnes, les 0 par des points, pour faire comprendre que dans ces cas, les deux chiffres de la colonne 0, dont il faut faire précéder les quatre autres, se trouvent sur la ligne horizontale immédiatement plus basse. Ainsi, le log. de 2188 est 3.340047, dans lequel on a remplcé par des 0 les deux points placés devant le nombre 47 (..47)

de la colonne 8, et fait précéder les 0047 ainsi obtenus, des deux premiers chiffres, 34, de la ligne suivante, dans la colonne 0. S'il n'y a pas de points à la gauche du nombre d'abord trouvé, mais qu'il s'en trouve néanmoins dans une des colonnes à gauche, et sur la même ligne horizontale ; il faudra dans ce cas, tout de même que dans le dernier, prendre dans la ligne horizontale suivante, les deux premiers chiffres de la colonne 0, pour les écrire à la gauche des quatre autres : ainsi, le logarithme de 3098 est 3.491081, les 49 de la colonne 0, se trouvant sur la ligne horizontale 310.

3ème Cas.

Quand le nombre excède 10,000 ou qu'il est composé de 5 chiffres ou plus.

(**1282**) Considérez d'abord comme zéros (0^s) tous les chiffres à la droite des quatre premiers chiffres du nombre donné. Trouvez dans la table le logarithme de ces quatre premiers chiffres. Prenez maintenant dans la colonne D, à la droite de la page, et sur la même ligne horizontale que le logarithme, le nombre qui s'y trouve, et multipliez ce nombre par les chiffres d'abord considérés comme 0^s (zéros) ; retranchez maintenant de la droite du produit ainsi obtenu, autant de chiffres (décimales) qu'il y a de chiffres dans le multiplicateur (D) et ajoutez au premier logarithme le produit ainsi trouvé ; cette somme sera la partie décimale du logarithme cherché ; écrivez à la gauche la caractéristique, qui sera (**1273**) moindre, d'une unité, que le nombre de chiffres dans le nombre donné, et vous aurez enfin le logarithme voulu.

Soit proposé de trouver le logarithme de 672,887. Vous trouverez à la 11ème page de la table, le logarithme des quatre premiers chiffres 6728, savoir 827886. Le nombre correspondant, dans la colonne D, est 65, lequel multiplié par 87, les chiffres regardés comme zéros, donne 5655, duquel retranchant deux chiffres pour décimales, il reste 56.55 que

l'on ajoutera à 827886, pour avoir 827942, partie décimale du log. de 672887 ; la caractéristique est 5, puisqu'il y a 6 chiffres dans le nombre donné ; donc le log. du nombre est 5.827942. On néglige la décimale 55 du produit 56.55, augmentant au besion, d'une unité, le premier chiffre à la gauche de la décimale, quand cette décimale est plus que .5, c.-à-d., plus qu'une demi-unité.

(**1283**) Cette méthode de trouver les logarithmes des nombres, à l'aide des tables, suppose que les logarithmes sont proportionnels à leurs nombres respectifs, ce qui n'est pas rigoureusement vrai. Dans l'exemple ci-dessus, le logarithme de 672800 est 5.827886 ; le log. de 672900 qui excède de 100 le dernier, est 5.827951 : la différence des logarithmes est 65. Maintenant, comme 100, différence des nombres 672800 et 672900, est à (:) 65, différence de leurs logarithmes, de même (::) 87, différence entre le nombre donné 672887 et le nombre 672800, est à (:) la différence de leurs logarithmes, laquelle est 56.55 ; cette différence étant ajoutée à 5.827886, logarithme du moindre nombre 672800, donne 5.827942 pour le logarithme du plus grand 672887. L'utilité de la colonne des différences est de là évidente.

(**1284**) On a déjà fait remarquer que le logarithme d'une fraction vulgaire, est égal au logarithme du numérateur, moins le logarithme du dénominateur; de là donc, le moyen de trouver, au besoin, le logarithme d'une telle fraction ; et d'après ce qu'on a dit (**1275**) des logarithmes des fractions décimales, il est clair qu'on trouvera le logarithme d'une fraction décimale quelconque, en considérant cette fraction comme nombre entier, et en faisant ensuite précéder la partie décimale de son logarithme, d'une caractéristique négative, plus forte, d'une unité, que le nombre de zéros entre le point décimal, et le premier chiffre significatif de la fraction. Ainsi, le log. de .0412 est $\overline{2}.614897$, celui de .00412 est $\overline{3}.614897$, celui de .000412 est $\overline{4}.614897$, et celui de .412 est 0.614897.

PROBLÈME II.

Trouver, par la table, le nombre qui répond à un logarithme donné.

(**1285**) Cherchez, dans la colonne des logarithmes, la partie décimale du logarithme donné, et si vous le trouvez exactement, prenez le nombre qui lui correspond. Alors, si la caractéristique du log. donné est positive, séparez par la gauche du nombre trouvé, un chiffre de plus, pour entiers, qu'il y a d'unités dans la caractéristique du log. donné, et regardez les chiffres restants comme décimales ; ceci donnera le nombre cherché.

Si la caractéristique du log. donné est 0, il y aura un chiffre ou seulement une place d'entiers ; si la caractéristique est $\overline{1}$, le nombre sera entièrement décimal ; si la caractéristique est $\overline{2}$, il y aura un 0 entre le point décimal et le premier chiffre valant ; si l'on a $\overline{3}$ pour caractéristique, il y en aura 2, et ainsi de suite. Le nombre dont le log. est 1.492481 se trouve, page 5, et est 31.08 ; si le log. était $\overline{1}$.492481, le nombre correspondant serait .3108 et si le log. était $\overline{2}$.492481, le nombre correspondant serait .03108, ou 3.108 si le log. était 0.492481.

(**1286**) Mais si l'on ne peut trouver exactement, dans la table, la partie décimale du logarithme, prenez le nombre qui répond au logarithme moindre suivant ; prenez aussi la différence correspondante dans la colonne D ; soustrayez maintenant ce moindre logarithme du logarithme donné, et après avoir ajouté à la droite du reste, ainsi obtenu, un nombre suffisant de zéros, divisez ce reste par la différence provenant de la colonne D, et ajoutez le quotient à la droite du nombre qui répond au moindre logarithme. Cette opération donnera, à peu de chose près, le nombre requis. Cette règle, come celle qui enseigne à trouver le log. d'un nombre de plus de 4 chiffres, suppose que les nombres sont

proportionnels à leurs logarithmes correspondants, ce qui, comme nous l'avons déjà dit, n'est pas strictement vrai.

Ex. 1. Soit à trouver le nombre qui répond au logarithme 1.532708. Ici le log. donné est.. ....1.532708

Le log. moindre suivant, et qui répond au nombre 34.09, est...... .... 1.32627

La différence entre ces logarithmes est. 81

Et la différence dans la table, colonne D, est 128 ; de là, ajoutant à la droite de 81, le nombre nécessaire de zéros pour que la division puisse se faire, on a 81.00 divisé par 128=63, résultat qui, étant écrit à la droite du nombre 34.09 déjà trouvé, donne 34.0963 pour le nombre correspondant au logarithme donné 1.532708.

Ex. 2. On demande le nombre qui répond au log. 3.233568

Le logarithme moindre suivant, celui de 1712 est...3.233504

La différence entre ces logarithmes =........ 64

La différence prise dans la table, colonne D, =253) 64.00 (25.

De là, le nombre voulu est 1712.25, la caractéristique 3 répondant à quatre entiers.

TABLES DES SINUS, TANGENTES, ETC., LOGARITHMIQUES.

(**1287**) Dans cette table, se trouvent, les logarithmes des valeurs numériques des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, de tous les arcs ou angles du quart-de-circ. divisé à la minute, et calculés pour un rayon égal à 10,000,000,000. Le logarithme (**1265**) de ce rayon est 10. Sur la première et la dernière ligne horizontale de chaque page sont écrits, les dégrés dont les sinus, etc., logarithmiques sont exprimés sur la page. Les colonnes verticales à la gauche et à la droite de chaque page sont des colonnes de minutes.

PROBLÈME I.

Trouver dans la table, le sinus, cosinus, tangente ou cotangente logarithmique d'un arc ou d'un angle donné quelconque.

(**1288**) **Si l'angle donné est moindre que 45°**, regardez à la première ligne horizontale des diverses pages, jusqu'à ce que vous trouviez le nombre de dégrés; descendez alors la colonne des minutes, à la gauche de la page, jusqu'à ce que vous arriviez au nombre indiquant les minutes; passez alors horizontalement à la colonne désignée sinus, cosinus, etc., suivant le cas, et le nombre que vous y trouverez est le logarithme requis. Ainsi, le sinus, cosinus, tangente, cotangente de 19° 55′ se trouvent, page 37 de la table, vis-à-vis de 55, et sont respectivement 9.532312, 9.973215, 9.559097, 10.440903.

(**1289**) **Si l'angle donné est plus grand que 45°**, cherchez les dégrés sur la ligne horizontale au bas des différentes pages, et vous trouverez les minutes en remontant dans la colonne de droite; passez alors horizontalement à la colonne désignée tang., cotang., sinus, cosinus, suivant le cas, et le nombre trouvé sera le logarithme voulu.

(**1290**) On verra que la colonne désignée 'sinus' au haut de la page, est désignée 'cosinus' au bas de la page; celle qui est désignée 'tangente,' devient 'cotangente,' et de même 'cosinus' au haut de la page est désignée 'sinus' au bas, et 'cotang.,' 'tang.' L'angle qu'on obtient, en prenant les degrés au haut de la page et les minutes dans la colonne de gauche, est le complément de l'angle indiqué par les dégrés au bas de la page et par les minutes dans la colonne de droite, et sur la même ligne horizontale. Ceci étant évident, l'on voit de suite pourquoi les colonnes désignées sinus, cosinus, tang., cotang., quand les dégrés se trouvent au haut de la page et les minutes en descendant à gauche,

deviennent nécessairement, cosinus, sinus, cotang., tang., quand on trouve les dégrés au bas de la page et les minutes en montant à droite ; car, comme on l'a fait voir (**1224**) le sinus, cosinus, tang. et cotang. d'un angle, est en même temps le cosinus, sinus, cotang. et tang. du complément de cet angle.

(**1291**) **Si l'angle donné est plus grand que** 90°, on n'a qu'à le soustraire de 180° et à prendre (**1221**) le sinus, cosinus, tang. ou cotang. du reste, c'est-à-dire du supplément de l'angle donné.

(**1292**) On a omis, dans les tables, les sécantes et cosécantes, que l'on peut obtenir aisément, à l'aide des sinus et cosinus ; car (**1226**) séc. $= \frac{R^2}{\text{cos.}}$; ou, en prenant les logarithmes : log. séc. = 2 log. R — log. cos. = 20—log. cos. ; c'.à-d., **la sécante logarithmique se trouve en soustrayant de 20 le cosinus logarithmique.** La coséc. = (**1226**) $\frac{R^2}{\text{sin.}}$, ou le log. coséc. = 2 log. R — log. sin. = 20—log. sin. ; c.-à-d., **on obtient le logarithme de la cosécante en soustrayant de 20 le logarithme du sinus.**

On a vu (**1225**) que R^2 = tang. × cotang ; d'où, 2 log. R =log. tang. + log. cotang; ou 20 = log. tang. + log. cotang.

(**1293**) **La colonne** qui adjoint à droite celle des sinus est **désignée** D, lettre initiale du mot différence. Voici comment on calcule ces différences. Ouvrez la table, soit à la page 42, vous trouverez le sinus de 24°, égal à 9.609313 ; celui de 24° 1′ = 9.609597 ; leur différence est 284 que l'on divise par 60, nombre de secondes dans une minute, pour avoir le quotient 4.73, que l'on trouve consigné dans la table, colonne D, vis-à-vis de 24°, avec l'omission cependant du point décimal, dont on tient toujours compte néanmoins, en se rappelant que les deux derniers chiffres sont décimaux. L'opération que l'on vient de faire pour trouver la différence

4.73 de sinus correspondant à une différence de 1″ dans l'angle donné, est évidemment fondée sur la supposition que l'accroissement du sinus logarithmique est proportionnel à l'accroissement correspondant de l'arc, et il en est ainsi, à très près, pour 60″; il suit que 4.73, ou comme on l'a dit, 473, en tenant compte du point décimal omis, est l'accroissement du sinus pour 1″. De même, si l'arc est 24° 20′, l'augmentation du sinus pour 1″ est 465 ou 4.65, en tenant compte du point décimal. Les mêmes observations s'appliquent à la colonne D après la colonne cosinus, et à la colonne D entre les tangentes et cotangentes. Si la colonne D entre les tangentes et cotangentes répond à chacune de ces colonnes, c'est que comme on l'a vu (**1292**) la somme des tangente et cotangente logarithmiques d'un arc quelconque est 20, ou log. tang. + log. cotang. = 20; d'où il suit, qu'étant donnés deux arcs a et b, on a log. tang. b + log. cotang. b = log. tang. a + log. cotang. a, ou log. tang. b − log. tang. a = log. cotang. a − log. cotang. b.

(**1294**) Soit maintenant à trouver le sinus logarithmique d'un angle exprimé en dégrés, minutes et secondes: on opérera comme auparavant pour les dégrés et minutes; on multipliera ensuite, par les secondes, la différence pour une seconde, trouvée dans la colonne D, et l'on ajoutera ce produit, dont on regardera comme décimales les 2 chiffres de droite, au sinus d'abord trouvé, pour avoir le sinus de l'arc donné.

Ex. 1. Si l'on veut avoir le sinus de 40° 26′ 28″.

Le sinus de 40° 26′ est.................................9.811952
La différence pour une seconde est 247
Laquelle multipliée par le nombre
de secondes........ 28

Donne pour produit................69.16 69.16

Ce produit 69.16 ajouté au sinus de 20° 46′, donne
pour sinus de 40° 26′ 28″ le log...............9.812021.16

On trouve d'une manière analogue la tangente d'un arc

dans lequel il y a des secondes. Pour ce qui est du cosinus et de la cotangente, il faut se rappeler que ces lignes croissent ou augmentent pendant que les arcs diminuent, et décroissent pendant que les arcs augmentent, ce qui rend nécessaire de soustraire, au lieu d'ajouter, les nombres proportionnels qui répondent aux secondes.

Ex. 2. Ainsi, pour trouver le cosinus de 3° 40′ 40″

On a le cosinus de 3° 40′=.......................... 9.999110
La différence pour une seconde est 13
Laquelle multipliée par le nombre
de secondes....................... 40

Donne pour produit.................5.20
Que l'on soustrait du sinus de 3° 40′............... 5.20

Ce qui donne pour cosinus de 3° 40′ 40″.........9.999104.80
Où, en ne mettant que 6 décimales,..................9.999105

PROBLÈME II.

Trouver les dégrés, minutes, et secondes qui répondent à un sinus, cosinus, tangente ou cotangente quelconque.

(1295) Si vous trouvez dans la table le logarithme donné, vous aurez au bas ou au haut de la page, suivant le cas, les dégrés, et dans la colonne de gauche ou de droite, les minutes correspondant au log. donné ; mais si le logarithme ne peut se trouver exactement dans la table, prenez les dégrés et minutes qui répondent au log. moindre suivant, et la différence correspondante, colonne D ; soustrayez le logarithme pris dans la table, du log. donné, ajoutez au reste deux zéros et divisez alors ce reste ainsi augmenté, par la différence D ; le quotient de cette division donne les secondes à ajouter aux dégrés et minutes déjà trouvés, quand il s'agit d'un sinus ou d'une tangente, ou à soustraire, dans le cas d'un cosinus ou d'une cotangente.

Ex. 1. Soit à trouver l'arc qui répond au sinus 9.880054
Soustrayant le sinus moindre suivant, celui de 49° 20′, est.................. .... 9.879963

Il reste 91 auquel ajoutant 2 zéros et divisant par la différence 181 de la colonne D, il vient 50″ que l'on ajoute aux 49° 20′ pour avoir l'arc ou l'angle voulu 49° 20′ 50″. 181) 9100 (50″

Ex. 2. Soit encore à trouver l'arc qui correspond à cotangente......... .... 10.008688
Cotang. moindre suivant, celle de 44° 26′ 10.008591

Le reste 97 augmenté de 00 et divisé par 421 (D) donne 23″ secondes à retrancher de 44° 26′ pour avoir l'arc voulu. 421) 9700 (23″

De là, 44° 26′ − 23″ = 44° 25′ 37″ est l'arc qui correspond à la cotangente donnée 10.008688.

TABLES DES SINUS, ETC., NATURELS.

(1296) Les sinus naturels et autres lignes trigonométriques naturelles, sont comme on l'a déjà vu (**1254**) les valeurs ou représentants numériques mêmes des sinus, tangentes, etc., d'arcs de cercle ayant pour rayon l'unité.

On trouve à l'aide de cette table, et de la même manière qu'avec les tables logarithmiques, le sinus naturel, etc., d'un arc donné, ou l'arc qui correspond à un sinus naturel, etc., donné.

Le rayon étant 1, il est clair que tous les sinus et cosinus, lesquels d'après les définitions qu'on en a données sont toujours moindres que le rayon, sont des fractions décimales de l'unité. On omet généralement pour cette raison le point décimal qui occuperait dans les tables un espace inutile.

Il en est de même des tangentes depuis 0° jusqu'à 45° et des cotangentes depuis 90° à 45°, lesquelles étant moindres

que l'unité, on omet encore le point décimal ; mais au-dessus de 45° les tangentes, et les cotangentes au-dessous de 45°, étant plus grandes que l'unité, le point décimal reparaît nécessairement avec les entiers que contiennent alors les valeurs de ces lignes.

(**1297**) La colonne D de la table logarithmique est omise ici faute d'espace, mais on y supplée facilement au besoin, c.-à-d., quand il y a des secondes dans l'arc donné, ou quand le sinus, etc., donné ne se trouve pas dans les tables, en prenant la différence entre le nombre qui correspond aux minutes contenues dans l'arc, et le nombre suivant. Ayant obtenu de cette manière la différence qui répond à 1′, on trouvera en divisant cette dernière par 60, le nombre proportionnel pour 1″ et on opérera ensuite comme on le fait dans le cas des lignes logarithmiques.

Ex. 1. Soit à trouver, par exemple, le sinus naturel de 44° 40′ 40″. Le sinus de 44° 40′ est .70298, celui de 44° 41′ est .70319, la différence de ces sinus pour 1′ est 21, cette différence divisée par 60 donne pour quotient .35 différence pour 1″ et 35 $\times$ 40 (nombre de secondes dans l'arc donné), = 14.00 que j'ajoute à .70298 pour avoir .70312 = sinus nat. de 44° 40′ 40″.

Ex. 2. Maintenant soit à trouver les dégrés, minutes et secondes qui correspondent à un sinus .70312 qu'on ne trouve pas dans la table. Ce sinus se trouvant entre ceux de 44° 40′ et 44° 41′, on voit de suite que l'arc requis se trouvera aussi entre ceux de 44° 40′ et 44° 41′ ; soustrayant donc l'un de l'autre ces deux sinus on obtient 21 leur différence, et on fait alors la proportion, si une différence de 21 entre les sinus de 44° 40′ et de 44° 41′ correspond à une différence de 60″ entre ces arcs, à combien de secondes correspondra la différence 14 entre le sinus donné .70312 et le sinus .70298 de 44° 40′ ou dif. $21 : 60'' :: \text{dif. } 14 : 40'' = \frac{60 \times 14}{21}$, que l'on écrira à la droite des 44° 40′ déjà trouvés, pour avoir l'arc voulu 44° 40′ 40″.

Ex. 3. Soit proposé de trouver la cotangente naturelle de 3° 40′ 20″ ; la table donne pour cotang. de 3° 40′, 15.6048 et pour cotang. de 3° 41′ 15.5340 dont la diffèrence est 708 que je divise par 60 pour avoir 11.8 = différence pour 1″, cette différence 11.8 multipliée par 20, le nombre de secondes, dans l'arc donné, donne 236.0 que je retranche de 15.6048 pour avoir 15.5812 = cotang. de 3° 40′ 20″, puisque les cotangentes et les cosinus diminuent à mesure que les arcs augmentent, et augmentent à mesure que les arcs diminuent.

Ex. 4. Si l'on avait enfin à trouver l'arc correspondant à la cotangente 15.5812 qui ne se trouve pas dans la table ; ayant obtenu la différence 708 entre la cotang. 15.6048 de 3° 40′ et la cotang. 15.5340 de 3° 41′, et la différence 236 entre la cotang. de 3° 40′ et la cotang. donnée, on ferait la proportion dif. 708 : 60″ :: dif. 236 : 20″ $= \frac{236 \times 60}{708}$ que l'on écrirait à la droite de 3° 40′ pour avoir l'arc voulu 3° 40′ 20″.

(**1298**) Ou en suivant la règle du par. (**1295**) cotang. donnée 15.5812 — cotang. moindre suivant 15.5340, celui de 3° 41′, = 472 et 708 : 60″ :: 472 : 40″ qu'il faut dans ce cas retrancher de 3° 41′ pour avoir comme auparavant 3° 40′ 20″, l'arc requis.

(**1299**) On obtient aisément au besoin la sécante et la cosécante d'un arc quelconque, la première, en divisant l'unité par le cosinus de l'arc, puisque (**1228**) séc. = $\frac{R^2}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cos.}}$, la seconde en divisant l'unité par le cosinus. puisque cosée. = $\frac{R^2}{\text{sin.}} = \frac{1}{\text{sin.}}$

On peut aussi obtenir le sinus ou cosinus naturel d'un arc, à l'aide de son sinus ou cosinus logarithmique, en soustrayant seulement 10 de la caractéristique de ce dernier ; le nombre correspondant au log. ainsi diminué est le siuus ou cosinus naturel voulu ; et l'on peut de même obtenir la tangente, sécante, etc., naturelle d'un arc donné.

Soit s le sinus naturel d'un arc, et S son sinus logarithmique ; puisque le rayon de $s=1$, et que le rayon de S = 10,000,000,000, on a S = 10,000,000,000×s ; d'où, log. S = log. 10,000,000,000 + log. s = 10 + log. s, ou, par transposition, log. s = log. S—10.

Ex. Etant donné le sinus logarithmique de 36° 44′, c'est-à-dire,..	9.7767676
J'en retranche..	10
Le reste est le logarithme (du sinus naturel)....	$\bar{1}.7767676$

car, il s'en faut d'une unité que la soustraction puisse se faire ; ce qui s'énonce, $\bar{1}$.

Ce logarithme correspond au sinus naturel de 36° 44′ qui est =..	.5980916

(**1300**) Avant de procéder à faire l'application des règles précédentes à la solution des triangles, il est nécessaire de faire remarquer, que les différences successives entre les sinus et tangentes logarithmiques de petits arcs, n'excédant pas 2°, par exemple, sont très variables, comme on peut le voir ; en conséquence de quoi, on ne peut trouver, avec exactitude, ces lignes logarithmiques, pour de petits arcs contenant des secondes ; puisque, comme on l'a vu (**1293**) les parties proportionnelles pour les secondes, sont calculées d'après la supposition, que les différences sont constantes pour une différence de 1′ ou de 60″ dans l'arc.

On trouvera plus avantageux, dans ce cas, de se servir des sinus et des tangentes naturels, dont les différences sont, à très près, constantes pour une augmentation considérable de l'arc, comme on l'a fait voir au par (**1257**).

Ex. 1. Soit à trouver, par exemple, le sinus nat. de 10″. La différence entre 0′ et 1′ ou entre 0″ et 60″ est .00029 ; on fera donc 60″ : 00029 :: 10″ : $00005 = \dfrac{00029 \times 10}{60} = 00004.8$ ou .00005.

Ex. 2. De même, si l'on avait à trouver la tangente de 33′ 25″; la tang. de 33′ est .00960, celle de 34′ est .00989 dont la différence est .00029, et 60″ : 29 :: 25″ : 12.083 ,c'est-à-dire (faisant reparaître les zéros) .00012; d'où, tang. 33′ 25″ = .00960 + .00012 = .00972.

Ex. 3. Soit encore à déterminer la valeur de l'arc correspondant à un sinus nat. = .02973. On voit de suite, en consultant la table, que l'arc voulu se trouve entre 1° 42′ et 1° 43′; or la différence des sinus de ces arcs est 29, et la différence entre .02967 sinus de 1° 42′ et le sinus donné .02973, est 6; et 29 : 60″ :: 6 : 12.4″; donc, l'arc voulu = 1° 42′ 12.4″.

(**1301**) Il faut aussi éviter l'emploi du sinus, tant logarithmique que naturel, d'un arc très grand, c'est-à-dire d'un arc de près de 90°, ou du cosinus d'un arc très petit; à cause du peu de différence dans les longueurs respectives de ces lignes, pour une assez forte différence dans l'arc qu'elles mesurent; et cela surtout, quand on fait usage de tables qui ne vont qu'à 5 décimales, où, comme on le voit, le sinus ne varie que d'une unité du 5ième ordre, dans les 18 dernières minutes du quart-de-circ., ou, ce qui est la même chose, le cosinus ne varie que d'autant, dans les 18 premières minutes de cet arc.

Il est clair que ce que l'on vient de dire, s'applique encore aux sécantes de très petits arcs, lesquelles varient presque imperceptiblement, à mesure que ces arcs augmentent ou croissent; et aux tangentes et sécantes d'arcs de près de 90°, lesquelles augmentent rapidement (**1234**) à mesure que l'arc s'approche du quart-de-circ.; et dont les différences sont en conséquence, très variables, et telles qu'on ne puisse s'en servir pour le calcul des secondes, ou même pour celui des minutes, dans certains cas; ce que d'ailleurs on fera voir dans l'article suivant.

SOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

(1302) Le problème général que la trigonométrie se propose de résoudre, est : **Dans tout triangle rectiligne, etant donnés trois, d'entre les trois côtés et les trois angles, et l'une des trois parties données étant (1206) un côté ; trouver l'une, quelconque, des trois autres parties.**

(1303) Les données sont censées être représentées par leurs valeurs numériques ; savoir : les angles en dégrés, minutes et secondes, et les côtés en pieds ou tout autre mesure connue.

(1304) La restriction du problème, aux cas où on connaît au moins un côté du triangle à résoudre, est due à ce que les angles seuls ne suffisent pas pour déterminer les dimensions des côtés ; car il peut exister un nombre indéfini de triangles, dont les angles de l'un soient respectivement égaux à ceux de tous les autres, sans que les côtés de l'un ne soient égaux à ceux d'aucun autre ; quoique cependant, les rapports des côtés aux angles soient (**520**) égaux dans tous. Donc, si l'on ne connaît que les trois angles d'un triangle, on ne saurait en déterminer autre chose que les rapports entre les côtés ; ces rapports étant (**1235**) égaux aux rapports qui existent entre les sinus des angles opposés. On trouverait encore les rapports entre les trois côtés d'un triangle, dont on ne connaîtrait que les angles, en supposant, comme on l'a fait au paragraphe (**674**), à l'un des côtés, une valeur numérique quelconque, pour en déterminer ensuite, par calcul trigonométrique, la valeur correspondante ou proportionnelle des deux autres côtés.

(1305) On a déjà fait remarquer (**1264**) que dans le but d'abréger les calculs nécessaires pour déterminer les parties inconnues d'un triangle, on se sert des logarithmes des parties, au lieu de se servir des parties elles-mêmes ou de de leurs représentants numériques.

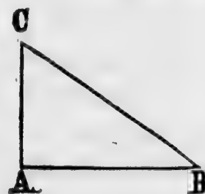
D'ailleurs, l'étudiant se servira, à volonté, des logarithmes des côtés d'un triangle et de ceux des sinus, etc , des angles de ce triangle ; ou des valeurs numériques mêmes, de ces côtés et des sinus, etc., de ces angles, c'est-à-dire, des sinus, etc., naturels, de ces angles ; suivant qu'il le jugera convenable, eu égard à la nature de l'opération à faire ; car l'usage, et même la connaissance des logarithmes, n'est aucunement essentielle à la trigonométrie.

(**1306**) Pour la commodité du calcul, il est d'habitude de diviser le problème général qu'on vient d'énoncer (**1296**) en deux problèmes, suivant que dans le triangle à résoudre il y a, ou non, un angle droit.

PROBLÈME I.

(**1307**) **Dans un triangle rectangle quelconque ABC, étant donnés, outre l'angle droit, deux quelconques d'entre les trois côtés et les trois angles, et l'un de ces deux étant un côté ; trouver le reste.**

Il est évident, tout d'abord, que quand on connaît l'un des angles aigus d'un triangle rectangle, on connaît aussi l'autre, puisque ces angles sont (**1212**, 2°) compléments, l'un de l'autre. Il est de plus évident (**1224**) que le sinus, la tangente ou la sécante, de l'un quelconque des deux angles aigus, est le cosinus, la cotangente ou la cosécante de l'autre.



Ce problème admet plusieurs cas, suivant la nature des données ; et les solutions, règles ou formules, lesquelles dépendent toutes des conclusions déjà établies, aux paragraphes (**1225** à **1231**), peuvent avantageusement se disposer en

forme de table; où, la première colonne contiendra les choses données; la seconde, les choses requises; et la troisième, les règles ou propositions servant à les trouver.

	DONNÉS.	REQUIS.	SOLUTION.	n°
1er cas.	BC et B, c.-à-dire, l'hypoténuse et l'un des angles aigus.	AC, c-à-d. le côté opposé.	$R : \sin. B :: BC : AC = \frac{BC \times \sin. B}{R}$	1
			ou $Séc. B : tang. B :: BC : AC = \frac{BC \times tang. B}{\sin. B}$	2
		AB, c-à-d. le côté adjacent.	$R : \cos. B :: BC : AB = \frac{BC \times \cos. B}{R}$	3
			ou $Séc. B : R :: BC : AB = \frac{BC \times R}{séc. B}$	4
2eme cas.	AB et B, c-a-dire, un côté et l'un des angles aigus.	AC, c-à-d. l'autre côté.	$R : tang. B :: AB : AC = \frac{AB \times tang. B}{R}$	5
			ou $Cos. B : \sin. B :: AB : AC = \frac{AB \times \sin. B}{\cos. B}$	6
		BC, c-à-d. l'hypoténuse.	$Cos. B : R :: AB : BC = \frac{AB \times R}{\cos. B}$	7
			ou $R : séc. B :: AB : BC = \frac{AB \times séc. B}{R}$	8
3eme cas.	BC et AB, c-à-d. l'hypoténuse et un côté.	C, c-à-d. angle aigu opposé.	$BC : AB :: R : \sin. C = \frac{AB \times R}{BC}$	9
		AC, c-à-d., l'autre côté.	$R : \cos. C :: BC : AC = \frac{BC \times \cos. C}{R}$	10
			ou $Tang. C : R :: AB : AC = \frac{AB \times R}{tang. C}$	11
			ou $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = (371) \sqrt{(BC + AB) \times (BC - AB)}$	12
4eme cas.	AB et AC, c-à-d. les deux côtés.	B, c-à-d., un des angles aigus.	$AB : AC :: R : tang. B = \frac{AC \times B}{AB}$	13
		BC, c-à-d., l'hypoténuse.	$Cos. B : R :: AB : BC = \frac{AB \times R}{\cos. B}$	14
			ou $Tang. B : séc. B :: AC : BC = \frac{AC \times séc. B}{tang. B}$	15
			ou $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$	16

(1308) Rem. Dans le dernier cas (16) où $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$, on ne peut, comme dans la formule 12, séparer AB^2+AC^2 en deux multiplicateurs linéaires, pour opérer immédiatement par logarithmes ; au contraire, il est clair, qu'il faut dans ce cas, carrer AB et AC, et chercher ensuite le logarithme de la somme de ces carrés, dont la moitié sera le logarithme de BC, le côté voulu ; ou l'on procédera d'abord à trouver la tangente de B (formule 13) pour obtenir ensuite BC par la formule 15 ; ou encore, sans chercher l'angle B, on prendra dans la table le cosinus correspondant à tang. B, pour trouver BC par la formule 14.

(1309) Quant au choix à faire des formules à employer, lorsqu'il y a plus d'une manière d'obtenir la chose requise, et que les conditions sont d'ailleurs égales, c'est-à-dire, que les angles sur lesquels on opère ne sont ni trop petits ni trop grands ; on verra de suite que toute expression dans laquelle le rayon (R) entre, soit comme multiplicateur, soit comme diviseur, présente nécessairement moins de travail dans le calcul ; puisque quand on procède par nombres naturels, la multiplication ou division par 1, n'altère en rien la valeur des quantités sur lesquelles on opère, et que quand on procède par logarithmes, l'addition ou la soustraction de 10 (log. de R) est plus expéditive que celle d'une caractéristique suivie d'une partie fractionnaire ; sans compter que dans les deux cas, il y a un nombre naturel de moins ou un logarithme de moins à chercher dans les tables. Sous ce rapport donc, on préférera les formules 1, 5 et 8 aux formules 2, 6 et 7.

2° Mais en se rappelant ce qui a été dit aux paragraphes **(1300)** et **(1301)**, on verra que dans certains cas, le choix des formules reposera, sur des considérations bien autrement importantes ; ainsi, dans le cas où l'angle B serait presque égal à un angle droit, il est avantageux d'éviter l'emploi des formules 2, 4, 5, 8, 15, dans lesquelles entrent la tangente ou la sécante.

(**1310**) Enfin, quand on ne pourra arriver directement, ou par une seule opération, à déterminer un angle ou un côté voulu, sans éviter l'usage de lignes trigonométriques dont l'emploi n'offrirait pas les garanties nécessaires à une exactitude suffisante dans le résultat qu'on se propose, on réussira, néanmoins, le plus souvent, par une opération moins directe, ou par une suite d'opérations, à obtenir correctement la chose désirée.

1° Si l'angle C, par exemple, du triangle rectangle ABC, n'était que de 9′ et l'angle B,

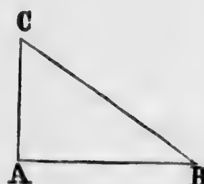


par conséquent, de 90° — 9′ = 89° 51′ et si le côté AC était donné pour trouver l'hypoténuse BC; au lieu de faire la proportion (8) R : séc. C :: AC : BC ou (7) cos. C : R :: AC : BC, formules qui, avec les tables à 5 décimales, ne donnent absolument aucune différence entre le rayon et la sécante, ou entre le cosinus et le rayon, et par conséquent, aucune différence entre le côté donné et l'hypoténuse cherchée, et qui même, avec des tables à 7 décimales, ne donneraient pas l'exactitude nécessaire; on procéderait d'abord à trouver AB par la formule 5, R : tang. C :: AC : AB; puis on ferait sin. C : R :: AB : BC; et si l'angle C contenait des secondes, on employerait de préférence (**1300**) les sinus, etc., naturels.

2° Si l'hypoténuse BC était donnée pour trouver AC, on ferait les proportions R : sin. C :: BC : AB, puis tang. C : R :: AB : AC, avec le même avantage dans l'emploi des lignes naturelles au lieu des logarithmiques, dans le cas où l'angle C contiendrait des secondes.

3° Si l'angle B était donné, lequel est de près de 90°, il est clair qu'on n'aurait qu'à lui substituer son complément C pour éviter l'usage de la tangente trop indéfinie AC.

EXEMPLES.



(**1311**) Dans le triangle rectangle ABC, on donne l'hypoténuse BC = 250, et le côté AB=240; pour trouver le reste.

BC : AB :: R : sin. C (**1307**, 9).

Avec l'usage des logarithmes on écrit comme suit (**1277**) la proportion :

Comme l'hyp. BC = 250	complément arith. log.	7.602060
Est au côté AB = 240	....	2.380211
De même le rayon R	....	10.000000
Est au sinus de C = 73° 44′ 23″	(ayant rejeté 10).	9.982271

L'angle B = 90°—C = 90°—73° 44′ 23″ = 16° 15′ 37″.

Ou, on trouverait encore B par la proportion (**1307**, 10) :

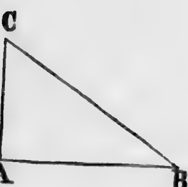
R : cos. B :: BC : AB ou BC : AB :: R : cos. B.

L'hypoténuse BC = 250	compl. arith. log.	7.602060
Est au côté AB = 240	....	2.380211
Comme R	....	10.000000
Est au cos. de B = 16° 15′ 37″	....	9.982271

Pour trouver le côté AC, on dit (**1307**, 13) :

	R	....	comp. arith. log.	0.000000
Est à tang.	B	16° 15′ 37″	....	9.464889
Comme	AB	240	....	2.380211
Est à	AC	70.0003	....	1.845100

Le reste .0003, que donne le log. 1.845100 est évidemment de trop, puisque par la règle du carré de l'hypoténuse on obtient 70 exactement. L'excédant, .0003 est dû à l'inexactitude partielle du sixième ou dernier chiffre décimal des logarithmes, ce dont on a déjà parlé au par. (**1269**).



On tire encore AC de l'équation (**1307**, 12) :

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(BC+AB) \times (BC - AB)}.$$

Donc, 2 log. AC = log. (A+B) + log. (A—B)

BC + AB = 250 + 240 = 490 .... log. 2.690196
BC — AB = 250 — 240 = 10 .... 1.000000

Divisant par 2) 3.690196

AC = 70.000 qui correspond au log................ 1.845098

On aurait encore AC par nombres naturels, comme suit :

$BC^2 = 250 \times 250 = 62500$

$AB^2 = 240 \times 240 = 57600$ AC = $\sqrt{4900}$ = 70, comme auparavant.

Différence = 4900

Ex. 2. Dans le triangle rectangle ABC, on a le côté AB = 384 mètres, et l'angle C = 53° 8′ : on demande à trouver les autres parties.

Pour trouver le côté AC, on a (**1307**, 5).

R : tang. C :: AC : AB, ou inv., tang. C : R :: AB : AC

Tang.	C 53° 8′	comp. arith. log.	9.875010
Est à	R..		10.000000
Comme côté AB	384....................................		2.584331
Est à côté AC	287.965	(ayant rejeté 20)	2.459341

Rem. Lorsque, comme dans cet exemple, le logarithme, du complément arithmétique duquel, on se sert, excède 10, on le soustrait de 20 et on rejette alors 20 de la somme des trois logarithmes de la proportion (**1277**, 2°).

Trouver l'hypoténuse BC (**1307**, 7).

Cos. B : R :: AB : BC ou ce qui est la même chose,
sin. C : R :: AB : BC

Sin.	C 53° 8′	comp. arith. log.	0.096892
Est à	R		10.000000
Comme	AB 384		2.584331
Est à	BC 479.98		2.681223

Trouver BC par sinus naturels.

Sin. nat. 53° 8′ = .80003 : R = 1 :: 384 : 479.98, comme sup.

```
.80003) 384.00000 (479.982
        320012
        ------
         639880
         560021
         ------
          798590
          720027
          ------
           785630
           720027
           ------
            656030
            640024
            ------
             160060
```

Ex. 3. On a, dans le triangle rectangle ACB, le côté AC = 195, l'angle C = 47° 55′ ; trouver le reste.

Rép. Angle B = 42° 05′, BC = 290.953, AB = 215.937.

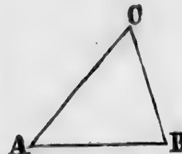
(1312) Avant de passer aux règles particulières qui s'appliquent à la solution des triangles oblique-angles ou des triangles en général, il est bon de faire remarquer qu'on peut au besoin, réduire tous les cas à celui du triangle rectangle, et par conséquent résoudre un triangle quelconque par les formules du tableau (**1307**) ; car, comme on l'a déjà dit (**527**), tout triangle peut se réduire en deux triangles rectangles et se résoudre de cette manière, ce qu'on fera voir, d'ailleurs, dans l'article suivant.

PROBLÈME II.

(1313) Dans tout triangle oblique-angle ABC, **étant donnés trois, quelconques, d'entre les trois côtés et les trois angles, et l'un de ces trois étant un côté ; trouver les trois autres.**

1er Cas.

Etant donnés, un côté et deux angles d'un triangle ; trouver le reste.



Soustrayez d'abord de 180°, la somme des deux angles donnés, pour avoir le troisième angle, et procédez ensuite à trouver les autres côtés par les rapports établis au par. (1235).

Ex. 1. Soit l'angle donné A = 58° 07 , l'angle donné B = 22° 37′ et le côté donné AB = 408. On aura le troisième angle C = 180°—(58° 08′ + 22° 37′) = 99° 16′. Le sinus de cet angle 99° 16′ est égal à celui de son supplément 80° 44′.

Pour trouver le côté BC.

Sinus	C 99° 16′ .... comp. arith.	log.	0.005705
Est à sinus	A 58° 07′		9.928972
Comme côté	AB 408..		2.610660
Est à côté	BC 351.024		2.545337

Trouver le côté AC.

Sinus	C 99° 16′ .... comp. arith.	log.	0.005705
Est à sinus	B 22° 37′		9.584968
Comme côté	AB 408..		2.610660
Est à côté	AC 158.976		2.201333

Trouver AC par sinus naturels.

Sinus nat. C = .98695 : sin. nat. B = .38456 : AB = 408 : AC

Suite de la division :

```
                                            408
                                          ------
                                          307648
741250         885798                    153824
690865         789560                    ------
------         ------        .98695)  156.90048 (158.975
 503850         962380                   98695
 493475         888255                   ------
 ------         ------                   582054
    375         741250                   493475
                                          ------
                                          885798
```

Ex. 2. Soit l'angle A = 38° 25′, B = 57° 42′, côté AB = 400 ; trouver le reste.

Rép. Angle C = 83° 53′, côté BC = 249.974, côté AC = 340.04.

(**1314**) Il est clair que dans le cas actuel, on ne saurait retirer aucun avantage de la solution par triangles rectangles, qu'on pourrait néanmoins opérer au besoin, en laissant tomber de l'une des extrémités A ou B du côté donné AB, une perpendiculaire AD ou BD sur le côté opposé prolongé s'il le faut, formant ainsi deux triangles rectangles ADB, ADC ou BDA, BDC. Mais si l'un ACB des angles du triangle était très obtus et contenait des secondes, on

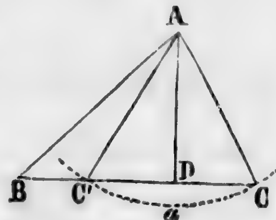


éviterait l'emploi du sinus log. trop indéfini de cet angle, c'est-à-dire, de son supplément BCD, en faisant d'abord R : sin. A :: AB : BD ; puis, tang. A : R :: BD : AD ; puis, tang. BCD (=180° — ACB) : R :: BD : DC, et enfin, sin. BCD : R :: BD : BC ; on aurait AC = AD — CD:

2ème Cas.

Voyez d'abord prop. XII, LIVRE II.

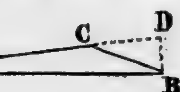
(**1315**) **Etant donnés deux côtés AB, AC ou AB, AC′ d'un triangle ABC ou ABC′, et un angle B opposé au plus petit AC ou AC′ de ces côtés; trouver le troisième côté et les autres angles.**

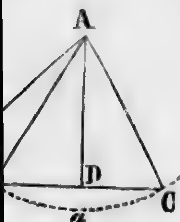


Ex. 1. Soit AB = 216, AC = AC′ = 117, et l'angle B = 22° 37′.

Pour trouver l'angle C ou ACB :

AC ou AC′ : AB :: sin. B : sin. C ou sin. AC′B (1235)





Côté AC ou AC′...117	.... comp. arith. log.	7.931814
Est à côté AB ...216	....	2.334454
comme sin. B 22° 37′	....	9.584968
Est à sin. C 45° 13′ 55″	ou AC′B 134° 46′ 05″	9.851236

Ajoutez à chacun B	22° 37′ 00″	....	22° 37′ 00″
Soustrayez leur somme	67° 50′ 55″	....	157° 23′ 05″
de............	180° 00′ 00″	....	180° 00′ 00″
Il reste BAC	112° 09′ 05″	BAC′	22° 36′ 55″

Pour trouver le côté BC ou BC′.

Sin.	B .... 22° 37′ comp. arith. log.	0.415032
Est à sin.	BAC ... 112° 09′ 05″.................	9.966700
Comme côté	AC .... 117......................	2.068186
Est à côté	BC .... 281.785...	2.449918

Et, sin. B 22° 37′ : sin. BAC′ 22° 36′ 55″ :: AC′ 117 : BC′.

On a vu (**321**) que l'ambiguïté dans la solution de ce problème cesse d'exister quand l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés donnés ; et de même il n'y a qu'une solution ou réponse quand le côté AC devient égal à la perpendiculaire AD, et le problème est impossible quand AC est moindre que AD.

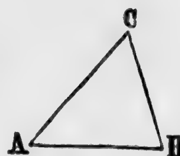
Ex. 2. On a deux côtés d'un triangle égaux respectivement à 50 et a 40 et l'angle opposé à ce dernier 32° ; on demande à déterminer les autres parties du triangle.

Rép. Si l'angle opposé au côté 50 est aigu, il est égal à 41° 28′ 59″, le troisième angle est dans ce cas égal à 106° 31′ 01″ et le troisième côté = 72.368. Si l'angle opposé au côté 50 est obtus, il est égal à 138° 31′ 01″, le troisième angle = 9° 28′ 59″ et le troisième côté = 12.436.

La remarque (**1314**) s'applique également au cas actuel.

3ème Cas.

(1316) **Etant donnés, deux côtés AC, BC d'un triangle ACB et leur angle inclus C ; trouver le troisième côté AB et les deux autres angles A et B.**



Connaissant l'angle C, on obtient la somme A + B des deux autres angles = 180—C, et leur demi-somme = $\frac{1}{2}$ (A + B) = 90°—$\frac{1}{2}$ C. On trouvera ensuite la demi-différence des angles A et B par la proportion. (Prop. III, 1241).

AC + BC : AC—BC :: tang. $\frac{1}{2}$ (A + B) ou (**1224**) cotang. $\frac{1}{2}$ C : tang. $\frac{1}{2}$ (B—A), où B est supposé > A et par conséquent AC > BC. Ayant trouvé la demi-différence entre A et B on aura B le plus grand des deux = $\frac{1}{2}$ (A + B) + ($\frac{1}{2}$ B — A : et A = $\frac{1}{2}$ (A + B) — $\frac{1}{2}$ (B — A). On fera maintenant la proportion sin. A : sin. C :: BC : AB.

Ex. 1. Soit BC = 450, AC = 540 et C = 80° : trouver le reste.

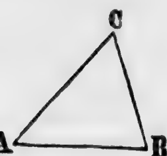
$$BC + AC = 450 + 540 = 990, \quad AC - BC = 90,$$
$$180° - C = 100° = B + A.$$

	AC + BC 990	....comp. arith. log.	7.004365
Est à	AC — BC 90	....	1.954243
Comme tang.	$\frac{1}{2}$ B + A 50°	....	10.076187
Est à tang.	$\frac{1}{2}$ B — A 6° 11′	....	9.034795

De là, 50° + 6° 11′ = 56° 11′ = B ;
et 50° — 6° 11′ = 43° 49′ = A.

Trouver le troisième côté AB.

Sinus	A 43° 49′	.... comp. arith. log.	0.159672
Est à sin.	C 80°	....	9.993351
Comme côté	BC 450	....	2.653213
Est à côté	AB 640.082	....	2.806236



L'usage du complément arithmétique d'un logarithme n'étant aucunement essentielle au calcul par logarithmes, il est clair que l'étudiant s'en dispensera à volonté dans tous les cas en faisant la somme des logarithmes du second et du troisième termes pour en retrancher ensuite le logarithme du premier terme. Ainsi pour trouver le troisième côté AB, sans faire usage du complément arithmétique du premier terme, on écrira comme auparavant

Sin.	A	43° 49′	.... log.	9.840328
Est à sin.	C	80°	....	9.993351
Comme côté	BC	450	....	2.653213
			Somme............	12.646564
Est à côté	AB	640.08	....	2.806236

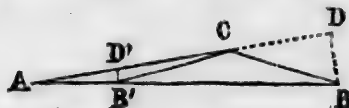
Ou, si l'on veut :

log. 2ème terme	9.993351	80° = C
+ log. 3ème terme	2.653213	450 = BC
Somme...	12.646564	
— log. 1er terme	9.840328	43° 49′=A
= log. 4ème terme	2.806236	640.08=AB

Ex. 2. On a les deux côtés d'un triangle, 1686 et 960 et l'angle inclus 128° 04′ ; trouver le reste.

Rép. Les angles sont 33° 34′ 39″, 18° 21′ 21″, le côté est 2400.

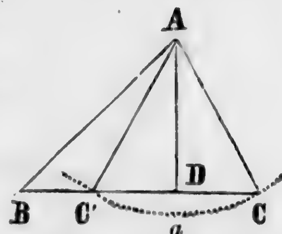
(**1317**) Il y a lieu de remarquer ici, que la solution par triangles rectangles, dont on a parlé (**1312**) pourrait être avantageuse dans le cas actuel, et cela surtout, si l'angle inclus ACB ou ACB′ était très obtus, ou très aigu, et contenait des secondes ; car, on éviterait de cette manière, en premier lieu, comme au par. (**1314**), l'emploi d'un sin. logarithmique trop indéfini, celui de BCD, supplément de



ACB; et en second lieu, on éviterait la nécessité de se servir de la tangente, soit logarithmique ou naturelle, d'un angle de près de 90°, savoir, de la demi-somme A + B quand C est très aigu. Le problème se résoudra donc en menant BD, B′D′ perpendiculaire à AC et en faisant d'abord R : sin. B′CD′ ou BCD (= sup. BCD′) :: B′C ou BC : B′D′ ou BD ; puis on fera tang. BCD ou B′CD′ : R :: BC ou B′C : CD ou CD′ ; on aura alors, AD = AC + CD, ou AD′ = AC — CD′, pour faire ensuite AD ou AD′ : DB ou D′B′ :: R : sin. A, et enfin, sin. A : R :: DB ou D′B′ : AB ou AB.

4ème Cas.

(1318) **Etant donnés, les trois côtés d'un triangle** BAC **ou** BAC′ **; trouver les angles.**



Ayant mené de l'un quelconque A, des angles du triangle, une perpendiculaire AD au côté opposé prolongé s'il le faut ; on fera (**1244**) si la perpendiculaire tombe en dedans, BD + CD (ou BC) : BA + CA :: BA — CA : BD — CD ; on aura alors (**1246**) BD et CD séparément, en faisant BD = $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$BC′ et CD = $\frac{1}{2}$BC — $\frac{1}{2}$BC′, ou CD = BC — BD. Si la perpendiculaire tombe en dehors, on a BC′ pour trouver BD et C′D ; or, (**1244**) BD + C′D : BA + C′A : BA — C′A : BD — C′D, ou inv. BD — C′D (ou BC′) : BA — C′A :: BA + C′A : BD + C′D ; on aura alors BD et C′D séparément en faisant BD = $\frac{1}{2}$(BD + C′D) + $\frac{1}{2}$(BD — C′D) et C′D = BD — BC′. On résoudra alors le problème par triangles rectangles, comme suit : BA : BD :: R : cos. B ; ou CA : (ou C′A) : CD (ou C′D) :: R : cos. C (ou C′ = sup. BCA) ; puis on fera CA : sin. B :: BA : sin. C :: BC : sin. A, ou C′A : sin. B :: BA : sin. AC′B :: BC′ : sin. BAC′.

Ex. 1. Soit BC = 40, AB = 34, AC = 25.

On aura 40 : 34 + 25 (ou 59) :: 34 − 25 (ou 9) : 13.275. Maintenant BD = ½(40) + ½(13.275) = 20 + 6.6375 = 26.6375 et CD = 20 − 6.6375 = 13.3625.

Le côté	BA 34	.... comp. arith. log.	8.4685211
Est à segment	BD 26.6375	....	1.4254935
Comme	R	....	10.0000000
Est à cos.	B 38° 25′ 19″	....	9.8940146

De même, on trouve A = 83° 53′ 18″, et C = 57° 41′ 24″.

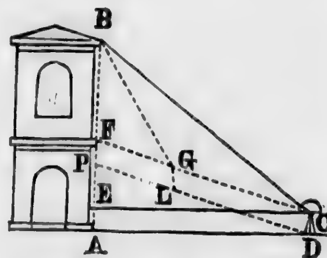
On a vu aussi (**1247**) que $\cos. B = R\,\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} =$
$\frac{(34)^2 + (40)^2 - (25)^2}{2(34 \times 40)}$ (quand R = 1) = cos.nat.B = $\frac{1156 + 1600 - 625}{2720}$
$= \frac{2131}{2720} = .78345588$ qui correspond dans les tables, après avoir fait le calcul pour les secondes, à 38° 25′ 18.86″, (ou 19″).

Ex. 2. Quels sont les angles d'un triangle dont les côtés sont respectivement 60, 50 et 40 ?

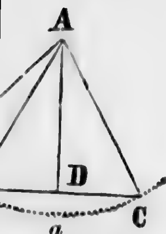
Rép. 41° 24′ 34″, 55° 46′ 16″, et 82° 49′ 10″.

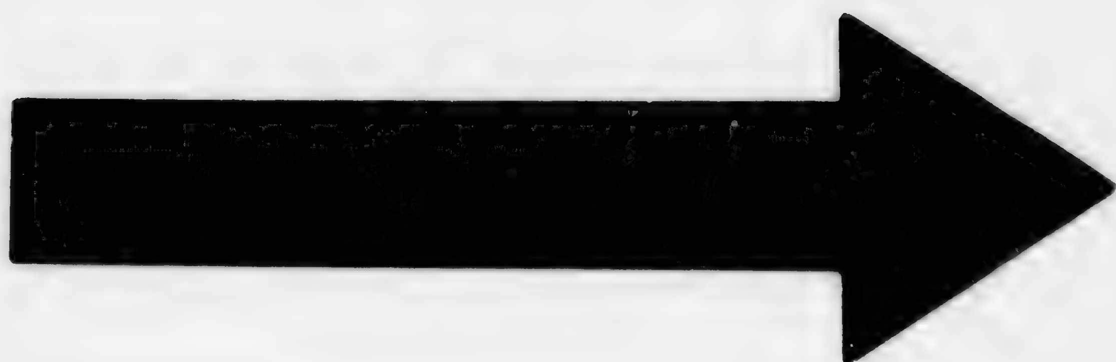
APPLICATIONS.

(**1319**) Soit à trouver la hauteur d'un édifice AB dont le pied est accessible.



Le terrain étant supposé horizontal ; mesurez une base AD, ni trop grande, ni trop petite, eu égard à la hauteur AB ; fixez en D le pied de l'instrument CD qui doit servir à mesurer l'angle voulu ECB formé par une droite CE parallèle à AD, et par le rayon visuel CB dirigé sur le sommet B de l'édifice. Supposons que l'on trouve CE ou





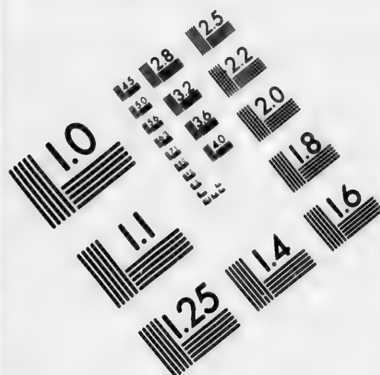
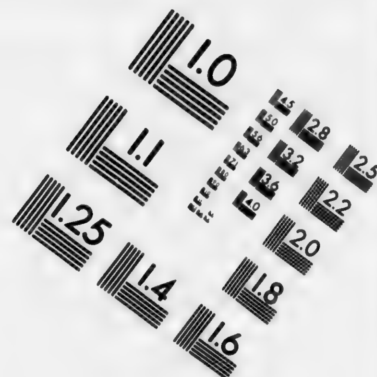
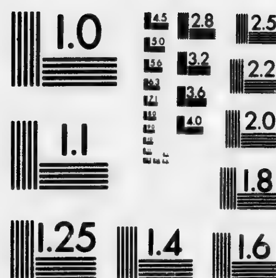
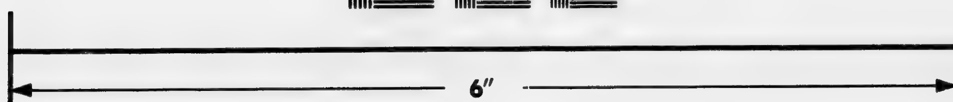
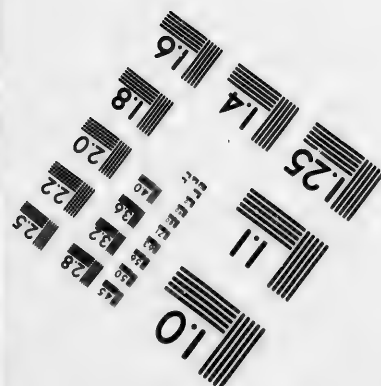
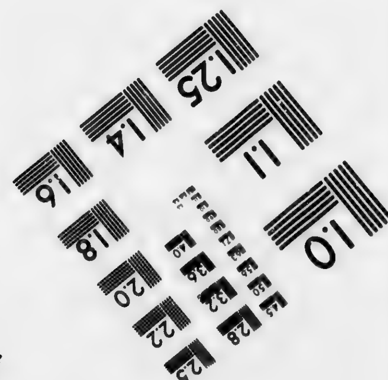
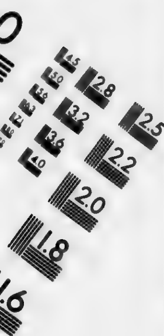



IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)


2.8
2.5
3.2
2.2
3.6
2.0
1.8


1.1
1.0

AD = 67.84 mètres et l'angle BCE = 41° 04′. Pour trouver BE, il nous faudra résoudre le triangle rectangle BCE, dans lequel on connaît maintenant le côté CE et l'angle adjacent C.

Pour trouver le côté EB.

Rayon	R	........................comp. arith. log.	0.000000
Est à tang. C		41° 04′..................................	9.940183
Comme	EC	67.84..................................	1.831486
Est à	EB	59.111..................................	1.771669

De là, EB = 59.111 mètres. Ajoutez à EB la hauteur de l'instrument, supposée être de de 1.12 mètres ; vous aurez la hauteur AB de l'édifice = 59.11+1.12 = 60.231 mètres.

Si, dans le même triangle BCE, on avait à déterminer l'hypoténuse ; on ferait la proportion.

Cos.	C	41° 04′.............. comp. arith. log.	0.122660
Est à	R	....	10.000000
Comme	CE	67.84..................................	1.831486
Est à	CB	89.98..................................	1.954146

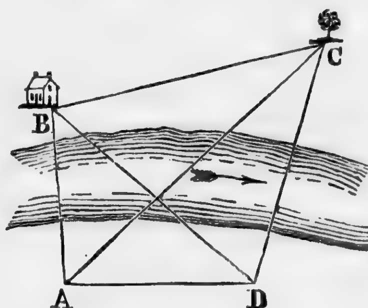
(**1320**) **Rem.** Si le sommet seul de l'édifice, ou autre objet dont on eût à déterminer la hauteur, était visible ; on établirait la distance BC par la méthode indiquée dans l'exemple suivant (**1323**) ; cette distance et l'angle BCE formé par la droite BC et la ligne horizontale EC, suffiraient pour résoudre le triangle.

(**1321**) Si le pied de la tour était situé en P, sur le terrain incliné DP ; on mesurerait la base DP=CF et on observerait les angles BCE et FCE ; on ferait alors les proportions R : cos. FCE :: CF : CE, et R : tang. FCE :: CE : EF ; puis, R : tang. BCE :: CE : EB ; et BF = EB − EF.

(**1322**) Enfin, si P était inaccessible, on pourrait, après avoir mesuré, dans la direction CF, une base DL = CG

et observé l'angle BCG ou BCF et l'angle BCE, transporter l'instrument en G pour y observer encore l'angle BGF, dont le supplément donnerait BGC; on aurait alors dans le triangle BCG, les angles en C et en G, pour trouver l'angle $CBG = 180^\circ - (C + G)$, lequel déduit de l'angle CBE, complément de BCE, donne GBF. On calculerait ensuite le côté BG du triangle CBG, ce qui nous donnerait enfin, dans le triangle BGF, le côté BG et les angles adjacents en B, G, pour trouver BF par la proportion : sin. F $(= 180^\circ - \overline{B + G})$: BG :: sin. G : BF et sin. F : BG :: sin. B : FG.

(**1323**) **Ex. 2.** Pour trouver sur le terrain, la distance du point A, à un objet inaccessible B ; on mesurera une base AD et les angles adjacents BAD, ADB. Soit $AD = 588.45$ mètres, $BAD = 103^\circ\ 55'\ 55''$, et $BDA = 36^\circ\ 04'$; on aura de là le troisième angle $ABD = 40^\circ\ 05''$, et pour trouver, AB, on fera :



Sin.	ABD	40° 05″	.... comp. ar. log.	0.191920
Est à sin.	BDA	36° 04′	....	9.769913
Comme	AD	588.45 mètres	....	2.769710
Est à	AB	538.943 mètres	....	2.731543

Si, pour un autre objet inaccessible C, on a observé les angles $CAD = 35^\circ\ 15'$, $ADC = 119^\circ\ 32'$, on trouvera de même la distance $AC = 1201.744$ mètres.

(**1324**) **Ex. 3.** Pour trouver la distance BC entre deux objets inaccessibles B et C, on détermine comme auparavant AB et AC ; on a en même temps l'angle inclus BAC $= BAD - DAC$. Supposons qu'on ait trouvé $AB = 538.818$ mètres, $AC = 1201.744$ et l'angle $BAC = 68^\circ\ 40'\ 55''$; pour trouver BC, il faut résoudre le triangle BAC dont on connaît deux côtés et l'angle inclus.

AC + AB	1740.562	..... comp. ar. log.	6.759311
Est à AC − AB	662.926	....	2.821465
Comme tang. $\frac{B+C}{2}$	55° 39′ 32″	....	10.165449
Est à tang. $\frac{B-C}{2}$	29° 08′ 19″	....	9.746225

De là $\frac{1}{2}$ (B − C) = 29° 08′ 19″	$\frac{1}{2}$ (B + C) = 55° 39′ 32″
Et $\frac{1}{2}$ (B + C) = 55° 39′ 32″	$\frac{1}{2}$ (B − C) = 29° 08′ 19″
Donc B = 84° 47′ 51″	Donc C = 26° 31′ 13″

Maintenant pour trouver la distance BC, faites :

Sin. B	84° 47′ 51″	.........comp. arith. log.	0.001793
Est à sin. A	68° 40′ 55″	....	9.969218
Comme AC	1201.744	....	3.079811
Est à BC	1124.145	....	3.050822

(**1325**) **Ex. 4.** Voulant connaître la distance entre deux objets inaccessibles situés dans la direction du pied d'une tour de 120 mètres de hauteur; je trouve l'angle de dépression de l'objet le plus éloigné = 25° 30′, et celui de l'objet le plus proche = 57°.

Je demande la distance entre ces objets.

Rép. 773.656 mètres.

(**1326**) **5.** Dans le but de déterminer la distance entre deux arbres A et B, dont un étang situé dans l'espace intermédiaire, rendait impossible le mesurage ; je mesurai la distance d'un troisième point C, à chacun des arbres A et B, que je trouvai respectivement de 588 et 672 pieds, l'angle inclus étant en même temps de 55° 40′ : je demande la distance AB.

Rép. 592.967 pieds.

(**1327**) **6.** Etant sur un plan horizontal et désirant connaître la hauteur d'une tour située au haut d'une colline inaccessible; je mesurai l'angle d'élévation du haut de la colline = 40°, ainsi que l'angle d'élévation du haut de la tour

= 51° ; je m'éloignai alors de la tour, en ligne directe, d'une distance de 180 pieds, au bout de laquelle j'observai de nouveau l'angle d'élévation du haut de la tour, que je trouvai de 33° 45′ : je demande la hauteur de la tour.

Rép. 83.9983 pieds.

(1328) 7. Désirant connaître la distance horizontale entre deux objets inaccessibles A et B, et ne pouvant trouver un point d'où il fût possible de les voir tous les deux ; je choisis deux points C et D éloignés de 200 verges l'un de l'autre, du premier desquels il m'était possible de voir le point A et du dernier le point B, et à chacun des points C et D je plantai un jalon. Du point C je mesurai, non dans la direction DC, une distance égale à 200 verges, et du point D une distance DE égale à 200 verges, et j'observai les angles suivants, savoir : AFC = 83°, ACF = 54° 31′, ACD = 53° 30′, BDC = 156° 25′, BDE = 54° 30′, et BED = 88° 30′ : je demande la distance AB.

Rép. 345.46 verges.

(1329) 8. D'un point P, l'on peut voir trois objets A, B, C, dont on connaît les distances l'un de l'autre, savoir : AB = 800, AC = 600 et BC = 400 mètres. On donne aussi les angles horizontaux APC = 33° 45′, BPC = 22° 30′. On demande à déterminer, à l'aide de ces données, les trois distances PA, PC, PB, (voyez **709**).

Rép. PA = 71[illegible].193, PC = 1042.522, PB = 934.291 mètres.

(1330) L'étudiant devra aussi faire l'application du calcul trigonométrique à la solution des problèmes de la nature de ceux des articles (**683**) (**707**), et notamment à la solution des problèmes (**712**) (**715**) (**717**) dans lesquels il pourra, le plus souvent, supposer aux données contenues dans les énoncés, des valeurs numériques telles, que le problème puisse avoir lieu.

LIVRE VI.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

(**1331**) On a déjà vu (**1148 DÉF.**) qu'un triangle sphérique est formé par trois arcs de trois grands cercles qui s'intersectent sur la surface d'une sphère. De là, **tout triangle sphérique a (comme tout triangle rectiligne) six parties ou éléments, savoir : trois côtés et trois angles.**

(**1332**) **Chacun des côtés du triangle sphérique, est censé (1148) moindre qu'une demi-circonférence ; et chacun de ses angles, moindre (1195) que deux angles droits.**

(**1333**) D'ailleurs, on trouvera dans la " géométrie sphérique" et dans la "trigonométrie rectiligne" (LIVRES IV et V) et ailleurs, les autres **définitions et conséquences** nécessaires à l'étude de la trigonométrie sphérique.

(**1334**) Deux **parties** quelconques d'un triangle sphérique, c.-à-d., deux angles, deux côtés, ou un angle et un côté,

sont dites **de même espèce** ou **de même affection** (**129**) quand chacune d'elles est moindre ou plus grande que 90° ; et elles sont d'**affection ou d'espèce différente**, si l'une d'elles est moindre et l'autre plus grande que 90°.

(1335) **La trigonométrie sphérique enseigne à déterminer, par le calcul, les côtés et les angles inconnus d'un triangle sphérique quelconque, dont on connaît trois des six parties composantes**; et il n'est pas nécessaire ici, comme dans le cas (**1206**) du triangle rectiligne, que l'une des parties connues soit un côté ; puisque, pour les raisons déjà données (**1185**), deux triangles sur la même sphère ou sur des sphères égales, ne peuvent être mutuellement équiangles, sans être en même temps mutuellement équilatères. Mais si le rayon de la sphère était inconnue, il est clair qu'à l'aide seulement des trois angles, on ne saurait déterminer autre chose que les rapports entre les côtés.

(1336) **Au lieu des cinq cas de la trigonométrie rectiligne, on en aura** donc **six à considérer dans le triangle sphérique** ; les données étant respectivement comme il suit :

1° Deux côtés et un angle opposé à l'un deux.

2° Deux angles et un côté opposé à l'un deux.

3° Deux côtés et l'angle inclus.

4° Deux angles et le côté inclus.

5° Les trois côtés, pour trouver les angles.

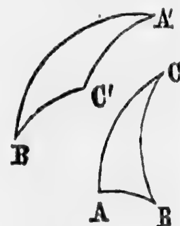
6° Les trois angles, pour trouver les côtés.

(1337) Mais **il y a encore cette différence entre le triangle sphérique et le triangle rectiligne**, que le cas (2°) des "deux angles et un côté opposé à l'un deux," offre souvent deux solutions différentes, comme on le verra, et que aussi bien dans le cas du triangle sphérique rectangle, un même angle oblique opposé à un même côté, peut donner et donne en effet deux réponses différentes.

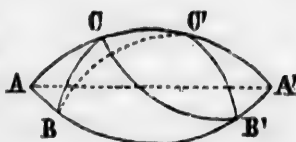
L'ambiguïté qui, dans le triangle rectiligne, ne peut se présenter que dans un seul cas ; existera donc quelquefois,

avec les mêmes données, dans deux des cas du triangle sphérique; et même dans trois cas, si l'on considére séparément, comme on le fera, le triangle sphérique rectangle.

(**1338**) **Il est** de plus **nécessaire de faire attention à l'affection des côtés et des angles du triangle sphérique** ; puisque cette affection qui, dans le triangle rectiligne, n'est ambiguë que dans un seul cas, celui des deux côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux, peut l'être au contraire et l'est en effet, dans tous les cas du triangle sphérique, à l'exception seulement du triangle tri-rectangle, dans lequel (**1192**) chacun des trois angles est droit, et chacun des côtés égal à un quart-de-circ ; car, dans ce dernier cas, les côtés et les angles, lesquels nous sont connus par leurs sinus, sont invariables, puisque ces sinus, chacun égal (**1215**) au rayon, ne répondent qu'à un seul et même angle et à un seul et même côté ; tandis que dans tous les autres cas, un ou plusieurs (**1349**) de ces sinus répondra (**1344** et **1345**) à deux côtés ou (**1350** et **1351**) à deux angles, supplémentaires l'un de l'autre. C'est ainsi que dans **certain** triangle ABC, les sinus des côtés AB, AC, BC, détermineront en même temps un autre triangle A′B′C′ dont chacun des côtés sera (**1221**) supplément du côté correspondant du premier; savoir : A′B′ de AB, B′C′ de BC, et A′C′ de AC ; et de même, il pourra exister **certain** triangle ABC et un autre A′B′C′ dont les angles de l'un seront respectivement supplémentaires des angles correspondants de l'autre, et dont les sinus de ces angles seront en conséquence respectivement égaux (**1221**) dans les deux triangles. (*)



(*) Ces deux triangles ABC, A′B′C′ auront lieu, quand la somme des côtés de l'un d'eux sera plus grande qu'une demi-circonférence, puisque dans ce cas, la somme des suppléments des côtés de ce triangle sera moindre qu'une circonférence entière ; condition nécessaire (**1167**) pour que le triangle supplémentaire puisse exister. De même, il est clair, que pour avoir deux



(1339) **D'ailleurs :** Soient ACA', ABA', deux demi-grands cercles de la sphère, formant, l'un avec l'autre, un angle quelconque A = A' ; ayant pris AB et AC à volonté, ACB sera un triangle sphérique quelconque. Maintenant si l'on fait A'B' = AB et A'C' = AC, on aura (**1177**) dans le triangle A'C'B' le troisième côté B'C' égal au troisième côté BC du triangle ACB ; on aura de plus AB' = supplément de A'B' ou de son égal AB et AC' = sup. de A'C' ou de son égal AC. Donc, si pour résoudre le triangle ABC, on ne donne que l'angle A et les sinus des côtés qui le comprennent ; il y aura quatre triangles différents ACB, AC'B', ACB', AC'B, qui répondront aux données ; et il y en aurait même huit, dans le cas où on ne connaîtrait l'angle A que par son sinus, puisque cet angle pourrait alors être aigu ou obtus, sans cependant changer en rien l'ambiguïté des côtés. Si l'on connaissait, outre l'angle A, l'un AB des côtés, il est clair qu'une partie de l'ambiguïté disparaîtrait et qu'on n'aurait plus que deux réponses aux données ; savoir : ACB et AC'B ; et si, avec l'angle A et le côté AB, on avait en même temps l'autre côté adjacent AC, c.-à-d., deux côtés et l'angle inclus, il est évident que toute ambiguïté cesserait et qu'on n'aurait plus qu'un seul triangle ACB, ou AC'B, ou etc., suivant que AB et AC, seraient tous deux $<$ ou $>$ 90°, ou l'un $<$ et l'autre $>$ 90°.

(1340) **De même,** on aura dans certain cas : côté B'C = BC, avec angle AB'C = supplément de ABC ; et dans certain autre cas, on aura : angle AB'C = ABC, avec côté B'C = supplément de BC, comme on le fera voir bientôt ; les données, dans chacun de ces cas, correspondant à deux triangles différents ACB, ACB'.

triangles dont les angles de l'un soient supplémentaires de ceux de l'autre, il faudra que la somme des trois angles de l'un soit moindre que quatre angles droits, pour que la somme des angles de l'autre triangle soit (**1186**) plus grande que deux angles droits.



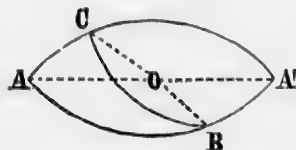
De là, donc, la nécessité de traiter tout d'abord :

DE L'AFFECTION DES COTÉS ET DES ANGLES DU TRIANGLE SPHÉRIQUE.

PROPOSITION I.

(1341) Suivant que l'un quelconque BC des côtés d'un triangle sphérique ACB, est égal au supplément (Dém. de **1339**) **A'C de l'autre côté AC, plus grand que ce supplément, ou moindre que ce supplément ; chacun, A, des angles intérieurs A, B, à la base, sera égal à l'angle extérieur opposé A'BC, plus grand que cet angle, ou plus petit que cet angle ; et, en même temps, la somme des deux angles intérieurs à la base, sera égale à deux angles droits, plus grande que deux angles droits, ou moindre que deux angles droits.**

1° Si BC = A'C, l'angle A' ou son égal A sera (**1179**) = A'BC ; c.-à-d., l'angle intérieur à la base, sera égal à l'angle extérieur opposé.



2° Si BC > A'C, l'angle A' ou son égal A sera (**1182**) > A'BC ; c.-à-d. l'angle int. à la base, sera plus grand que l'angle ext. opposé.

3° Si BC < A'C, on aura A' ou A < A'BC ; c.-à-d., l'angle int. à la base, moindre que l'angle ext. opposé.

4° Puisque les angles ABC, A'BC valent ensemble (**1163**) deux angles droits ; si l'angle A = A'BC, on aura $\overline{A+ABC}$ = deux angles droits.

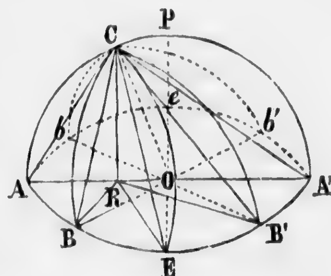
5° Si A > A'BC, on aura (A + ABC) > deux angles droits.

6° Si $A < A'BC$, on aura $(A + ABC) <$ deux angles droits.

7° A l'aide de cette prop., on pourra dans quelques cas, A étant donné et les côtés AC, BC, établir l'affection de l'angle B ; car, si A est, par exemple $< 90°$ et $A + B =$ ou $> 180°$, il est clair que B sera $> 90°$; si $A > 90°$ et $A + B =$ ou $< 180°$, B sera aigu ; mais si $A < 90°$ et $A + B < 180°$, il est évident que B pourra être $>$ ou $< 90°$, suivant la valeur de A ; et de même si $A > 90°$ et $A + B > 180°$, l'affection de B sera encore ambiguë.

PROP. II.

(1342) **De tous les arcs (*) CA, CB, CE, C etc., menés à la circonférence d'un grand cercle AEA′ de la sphère, d'un point quelconque C dans sa surface, qui n'est pas le pôle de cette circonférence ; le plus grand arc est celui CA′ qui passe par le pôle P de cette circonférence, et le plus petit arc CA est le supplément du premier ; et des autres arcs, CB, CE, C etc., celui CB′ qui est le plus près du plus grand CA′ est plus grand que celui CE qui en est plus éloigné.**



Soit CR perpendiculaire à AA′ ; alors, parce que le cercle ACA′ qui passe par le pôle P du cercle AEA′ est (**1153**) perpendiculaire à ce dernier, CR est (**926**) perpendiculaire au plan AEA′ et par conséquent (**882**) à toutes les droites BR, ER, etc. qu'elle rencontre dans ce plan. Les triangles ARC,

(*) Les **arcs** dont il s'agira dans ce livre, seront toujours des **arcs de grands cercles**, si le contraire n'est spécifié. On omettra donc ordinairement les mots "de grand cercle," si ce n'est quelquefois, pour attirer plus spécialement l'attention sur quelque propriété particulière de ces arcs.

BRC, ERC, etc., sont donc tous rectangles en R et ont pour hauteur commune CR. Maintenant, parce que R est un point du diamètre AA′ du cercle AEA′, et que ce point n'est pas le centre du cercle AEA′; car son centre est évidemment (**1152**) en O (centre de la sphère) où la perpendiculaire menée du pôle P rencontre A′A; on a (**454**) B′R moindre A′R, ER < B′R, BR < ER, et AR < BR, ou, ce qui est la même chose, on a BR > AR, A′R > B′R, et ainsi de suite. On aura donc, à cause de CR commune, $(A'R^2 + CR^2) > (B'R^2 + CR^2)$, et par suite, $A'C^2 > B'C^2$ ou A′C > BC. On aura de même, $(AR^2 + CR^2) < (BR^2 + CR^2)$; d'où, $AC^2 < BC^2$ et AC < BC. Mais une plus grande corde A′C sous-tend un plus grand arc A′C; donc l'arc A′C > l'arc B′C, l'arc B′C > l'arc EC, l'arc BC > l'arc AC, ou AC < BC, et ainsi de suite; donc, etc.

2° Soit E le point milieu de ABA′, E sera le pôle de ACA′ et l'arc EC sera un quart-de-cercle; et comme tout arc BC est < EC et tout arc B′C > EC, BC sera < quart-de-cercle et B′C > quart-de-cercle. Il est clair que la même chose aura lieu du côté opposé de la perpendiculaire ACA′ ; tout arc *b*C étant < et tout arc *b*′C > que *e*C = EC ; donc, suivant que AB, A*b* seront, ou non, de même affection, c-à-d., chacun < ou > AE = A*e*, les arcs BC, *b*C seront aussi de même ou de différente affection ; et si AB = A*b* on aura, par la prop., BC = *b*C.

3° Les points E, *e*, étant encore les pôles de ACA′, l'arc CE sera = 90° et sera (**1153**) perpendiculaire à ACA′; tout autre arc BC, moindre que EC, formant avec ACA′ un angle aigu ACB, et tout autre arc B′C, > EC, formant avec ACA′ un angle obtus ACB′. Or, quel que soit BC, < ou > 90°, l'angle ABC sera toujours aigu ou A′BC toujours obtus, et la même chose aura lieu du côté opposé de la perpendiculaire ACA′ ; d'où il suit que si pendant que A*b*C est aigu, ACB est aussi aigu, BC sera < 90°, et si ACB′ est obtus, B′C sera > 90° ; donc, dans le triangle *b*CB, suivant que A*b*C,

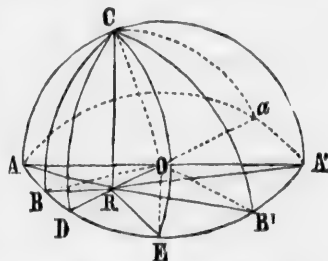
ACB, sont de même affection ou d'affection différente, BC sera > ou < 90°.

(**1343**) **Cor. 1.** Si AC = AP = 90, on aura AC = BC = BC = etc. ; d'où il suit que, dans le cas (**1336**, 1°) des "deux côtés et un angle opposé à l'un deux," si l'angle donné A ou BAC était droit, le côté AC = 90°, et BC par conséquent (**1153**) aussi = 90°, le **problème** serait **indéterminé**, puisque toute position quelconque B′ du point B sur la circonférence AEA′ déterminerait un triangle B′AC qui répondrait aux données et dans lequel on aurait l'angle B′ droit (**1153**) et la base AB′ indéterminée.

2° Mais si AC est < ou > 90°, il n'y aura pas (**455**) deux droites égales BR du même côté du diamètre AA′ et par conséquent, il n'y aura pas non plus deux cordes égales BC, ni deux arcs ou côtés égaux BC ; donc, il ne pourra y avoir qu'un seul triangle ACB, c'est-à-dire, **une** seule **solution** du problème des "deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux."

3° Il est à peine nécessaire d'ajouter que l'indéterminé dont on vient de parler (**1343**) **existerait** aussi, sous les mêmes circonstances, dans le cas (**1336**, 2°) des "deux angles et un côté opposé à l'un d'eux," c-à-d., si A était droit, AC = 90° et B par conséquent aussi, droit; et cette ambiguïté **cesserait d'exister**, si AC était < ou > 90°

(**1344**) **Cor. 2. Si les deux grands cercles** ACA′ AEA′, **font l'un avec l'autre un angle aigu** BAC ou A = A′, il est clair que la perpendiculaire menée du point C au plan de ADA′ tombera en-deçà de AA′, soit en R, et qu'elle sera encore perpendiculaire (**882**) au diamètre aD qu'elle rencontre dans ce plan ; d'où, par la proposition (**1242**) DC sera le plus petit, et aC le plus grand de tous les arcs



menés du point C à la circonférence du cercle ADA′ ou ADa; et on aura dans ce cas DC < AC ou AC > DC, et de même, on aura A′C < aC, B′C < A′C et ainsi de suite; d'où il résulte, puisque (**455**) on peut avoir dans ce cas, deux droites égales BR, B′R, une de chaque côté du diamètre aD, c'est-à-dire, de chaque côté de la moindre droite DR, qu'on aura aussi deux arcs ou côtés égaux CB, CB′, l'un de chaque côté de l'arc perpendiculaire ou le plus petit CD. Donc, suivant que le côté CB ou CB′ opposé à l'angle donné A ou A′ sera > ou < CA ou CA′, et CA < 90° ou CA′ > 90°, il y aura un ou deux triangles BAC, B′AC ou B′A′C, BA′C qui répondront aux données; c'est-à-dire, que :

Dans le cas (**1336**, 1°) des

"Deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux."

Voyez la note, page 528.

L'angle A étant aigu.

1° Si le côté AC, adja. à l'angle donné A, est < 90°, et que BC, l'autre côté donné, soit > AC; il n'y aura qu' **une solution.**

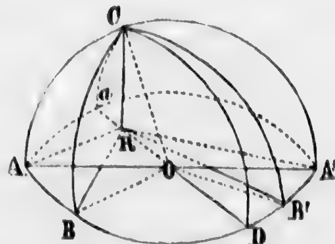
2° Si le côté A′C, adja. à l'angle donné A′, est > 90° et que B′ C, l'autre côté donné, soit > le sup. de A′C; **une solution.**

3° Si le côté AC, adja. à l'angle donné A, est < 90°, et que BC, l'autre côté donné, soit < AC; il y aura . . . . . **deux solutions**

4° Si le côté A′C, adja. à l'angle donné A′, est > 90°, et que B′C, l'autre côté donné, soit < le sup, de A′C; . . . . **deux solutions**

5° Si le côté AC, adja. à l'angle donné A, est = 90°, il est évident qu'il y aura . . . . **deux solutions**

(1345) Cor. 3. Si l'angle donné BAC ou A = A′ **est obtus,** il est clair que la perpendiculaire menée du point C, au plan de ADA′, tombera au delà de AA′, soit en R ; et que si par le centre O de la sphère et le point R, on mène le diamètre *a* D et les arcs C*a*, CD, C etc., l'arc C*a* sera le plus petit et CD le plus grand de tous les arcs menés du point C à la circonférence AD*a* ou ADA′ ; et comme les droites BR et B′R sont chacune moindre (**454**) que DR, on aura aussi les arcs CB et CB′ chacun moindre que l'arc perpendiculaire ou le plus grand CD ; donc, suivant que le côté CB ou CB′ opposé à l'angle donné A ou A′ sera < ou > CA ou CA′, et CA < 90° ou CA′ > 90°, il y aura un ou deux triangles BAC, B′AC ou B′A′C, BA′C qui répondront aux données ; c'est-à-dire que dans le cas des

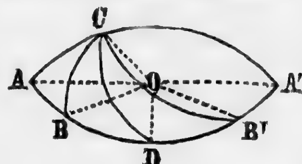


" Deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux."

L'angle A étant obtus.	1° Si le côté AC adja. à l'angle donné A, est < 90° et que BC l'autre côté donné, soit < le sup. de AC ;	**une solution.**
	2° Si le côté A′C, adja. à l'angle donné A′ est > 90°, et que BC l'autre côté donné, soit < que A′C ;	**une solution.**
	3° Si le côté AC, adja. à l'angle donné A, est < 90°, et que B′C, l'autre côté donné, soit > le sup. de AC ; . .	**deux solutions**
	4° Si le côté A′C, adja, à l'angle donné A′, est > 90°, et que B′C l'autre côté donné, soit > que A′C ;	**deux solutions**
	5° Si le côté AC, adja. à l'angle donné A, est = 90° ; il est évident qu'il y aura	**deux solutions**

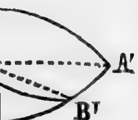
PROP. III.

(1346) **Dans tout triangle sphérique rectangle,** ACB ou ACB′, A′CB′ ou A′CB, **les côtés,** AB, AC ou AB′ AC..... A′B′, A′C ou A′B, A′C, **qui comprennent l'angle droit,** A ou A′ **sont de même affection que les angles** C, B ou C, B′, **qui leur sont opposés; c'est-à-dire (1334) si les angles sont plus grands ou moindres que des angles droits; les côtés qui leur sont opposés, seront plus grands ou moindres que des quart-de-circ.** Et réciproquement, **si les côtés qui comprennent l'angle droit, sont plus grands ou moindres que des qnart-de-circ.; les angles opposés seront plus grands ou moindres que des angles droits.**



Ayant bissecté en D le demi-cercle ABA′, on aura AD = A′D = 90°; et parce que, par hypothèse, l'angle A ou BAC est droit, le demi-cercle ACA′ est perpendiculaire au plan du demi-cercle ABA′; donc D est (**1152**) le pôle de ACA′, et l'arc DC = (**1153**) 90° ou un quart-de-cercle. De plus, l'arc CD est (**1153**) perpendiculaire à ACA′; c.-à-d., l'angle sphérique ACD est droit. Donc, quand AB est moindre que AD, l'angle opposé ACB qui

(*) L'élève fera bien de s'aider ici de quelques cercles en carton ou en papier fort et de même rayon, dont il en pliera un (à l'endroit AA′ d'un diamètre) de manière à en former un onglet sphérique, ABA′CA ou plutôt deux demi-grands cercles ADA′, ACA′, que le pli AA′ lui permettra d'ajuster, sous un angle quelconque A, droit, obtus ou aigu. Il coupera alors ou pliera les autres cercles, en secteurs égaux, ou supplémentaires l'un de l'autre, et de dimensions proportionnelles à la valeur de l'angle A. Ces divers secteurs convenablement disposés, le sommet ou centre de chacun d'eux, au centre de l'onglet, c'est-à-dire, de la sphère, et leurs côtés OB, OC, OD, O etc., en contact avec les deux demi-grands cercles ADA′, ACA′, fourniront une idéé assez juste des arcs ou côtés et des angles ou des triangles sphériques ABC, AB′C, A′B′C, A′BC, dont il s'agit. Voyez aussi la note, page 448.



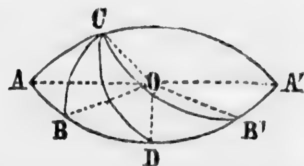
est moindre que ACD, est $< 90°$; et quand $AB' > 90°$, l'angle ACB′ qui est plus grand que ACD, est $> 90°$; ou, réciproquement, si $ACB < 90°$, on a $AB < 90°$, et si $ACB' > 90°$, on a $AB' > 90°$. De même, il est clair, que quand l'angle $A'CB > 90°$, $A'B$ est $> 90°$; et quand $A'CB' < 90°$, $A'B'$ est $< 90°$; et réciproquement. (*)

(**1347**) **Cor. 1.** Si, **dans un triangle sphérique rectangle,** ACB ou A′CB, **les deux côtés** AB, AC ou A′B, A′C **qui contiennent l'angle droit, sont de même affection, l'hypoténuse** CB **sera moindre qu'un quart-de-cercle; et si ces côtés,** AB′, AC ou A′B′, AC **sont d'affection différente, l'hypoténuse** B′C **sera plus grande qu'un quart-de-cercle.**

Car, ayant bissecté en P le demi-cercle ACA′, P sera le pôle de ABA′, comme D est celui de ACA′ ; et, parce que C n'est pas le pôle du cercle ABA′ et que l'arc CB est plus éloigné de CPA′ que ne l'est CD, CB est (**1342**) moindre que CD ; or, CD est un quart-de-cercle ; donc CB est moindre qu'un quart-de-cercle ; et de même, quand $A'C > 90°$ et $A'B > 90°$, il est clair qu'on a encore $CB < 90°$. En second lieu, si $AC < 90°$ et $AB' > 90°$, ou $A'B' < 90°$ et $A'C > 90°$, il est non moins évident qu'on aura $CB' > 90°$, à cause de CB′ moins éloigné du plus grand arc CPA′ que ne l'est CD ; donc, etc.

2° Réciproquement, il suit de ce que l'on vient de démontrer, que **si l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moindre ou plus grande qu'un quart-de-cercle; les côtés seront de même affection ou d'affection différente.**

(*) Comme les expressions "quart-de-circonférence" "demi-circonférence" se rencontrent souvent, dans ce livre; on écrira quelquefois, pour abréger, "quart-de-cercle," "demi-cercle;" faisant attention seulement, de distinguer, au besoin, le sens (**186**) dans lequel on doit entendre ces expressions. Pour "quart-de-cercle," on écrira aussi "90°," pour "demi-cercle," "180°;" et de même pour angle droit, on écrira quelquefois "90°," et "180°" pour "deux angles droits."



3° Puisque, par la prop., les angles obliques d'un triangle rectangle sont de même affection que les côtés opposés, et que par le corollaire, l'hypoténuse est moindre ou plus grande que 90°, suivant que ces côtés sont de même ou de différente affection ; il en résulte que **suivant que l'hypoténuse est moindre ou plus grande qu'un quart-de-cercle ; les angles obliques sont de même ou de différente affection** ; et réciproquement :

4° **Suivant que les angles obliques** (*) **d'un triangle rectangle sont, ou non, de même affection ; l'hypoténuse est moindre ou plus grande qu'un quart-de-cercle.**

5° Parce que les côtés sont de même affection que les angles opposés, et que l'affection de l'hypoténuse dépend aussi de celle des côtés ou des angles ; il suit que **quand un angle et le côté adjacent sont de même affection, l'hypoténuse est moindre qu'un quart-de-cercle** ; et :

6° **Quand un angle et le côté adjacent sont de différente affection, l'hypoténuse est plus grande qu'un quart-de-cercle.**

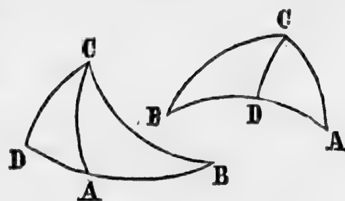
7° **Si l'hypoténuse est moindre qu'un quart-de-cercle, un côté et l'angle adjacent seront de même affection.**

8° **Si l'hypoténuse est plus grande qu'un quart-de-cercle, un côté et l'angle adjacent seront d'affection différente.**

(*) L'on dit "obliques" pour distinguer de l'angle droit, les deux autres angles d'un triangle sphérique rectangle; car ces angles ne sont pas nécessairement aigus, comme dans le cas du triangle rectiligne de même nom, et au contraire ces angles, comme on l'a vu (**1190**) peuvent être droits et même obtus ; ainsi, dans ACB, B et C sont tous deux aigus ; dans A'CD, C est droit et D aigu ; dans ACB', B est aigu et C obtus ; dans A'CB', C est aigu et B obtus ; dans ACD, C est droit et D obtus ; et dans A'CB, B et C sont tous deux obtus.

(1348) Cor. 2. **Dans tout triangle sphérique, ACB, si la perpendiculaire CD menée d'un des angles au côté opposé, tombe en dedans du triangle ; les angles A, B, à la base, seront de même affection : et si la perpendiculaire tombe en dehors, sur la base prolongée ; les angles à la base seront d'affection différente.** Car si CD tombe en dedans, on a :

1° Les triangles rectangles ADC, BDC, dans lesquels, par la prop., chacun des angles A et B est de même affection que le côté opposé CD ; or ce côté est commun aux deux triangles ; donc l'affection de CD est commune aux deux angles A et B ; c.-à-d. que ces angles sont de commune, ou de même affection.



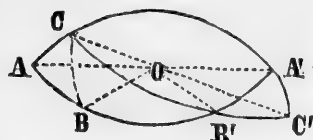
2° Et si CD tombe en dehors du triangle, on aura les triangles rectangles ADC, BDC dans lesquels l'affection de CD sera commune à l'angle B et à l'angle extérieur DAC ; mais DAC est supplément de A ou de BAC et l'affection de BAC est en conséquence différente de celle de DAC; or l'affection de B, comme on vient de le voir, est la même que celle de DAC ; donc l'affection de A (BAC) est différente de celle de B.

3° Réciproquement, il est clair que si les angles A et B sont de même affection ; la perpendiculaire tombera sur la base, ou en dedans du triangle ; car, si non, A et B seraient d'affection différente.

4° Et si A et B sont d'affection différente, la perpendiculaire tombera en dehors du triangle ou sur la base prolongée ; car, si non, A et B seraient de même affection, contrairement à la supposition.

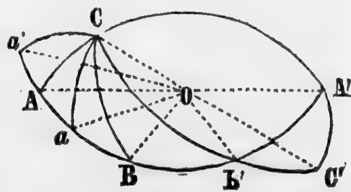
PROP. IV.

(1349) **Il y aura toujours deux triangles rectangles,** ABC, AB′C **dont un côté** AC **et l'angle opposé** B **de l'un seront égaux à un côté** AC **et à l'angle opposé** B′ **de l'autre ; et dont les autres côtés** AB, BC **et l'autre angle oblique** C **du premier, seront les suppléments des autres côtés** AB′, B′C **et de l'angle correspondant** C **du second.**



En effet, ayant prolongé ACA′, d'une quantité A′C′ = AC, pris A′B′ = AB, joint B′C′ et prolongé B′C′ pour rencontrer ACA′ ; B′C′ prolongé tombera (**984**) en C, à cause de CA′C′ = A′C + A′C′ = A′C + AC = 180° ou un demi-cercle. Cela posé, on aura (**1177**) B′C′ = BC ; car A′C′ a été fait égal à AC, A′B′ à AB et l'angle B′A′C′ qui est supplément de B′A′C est en conséquence droit et égal à l'angle A du triangle ACB ; donc B′C = supplément de B′C′, c.-à-d. de BC ; et l'angle AB′C, égal à son opposé au sommet A′B′C′, est (**1177**) égal à ABC ; donc :

2° Si pour résoudre un triangle sphérique rectangle on ne donne qu'un côté et l'angle opposé ; il y aura ambiguïte, c.-à-d., deux réponses au problème, ou deux solutions qui repondront aux données.



(**1350**) **Cor.** Puisque C est un point quelconque dans le demi-cercle ACA′, et que par ce point, et le centre O de la sphère, on peut faire passer un plan quelconque OCa ou OCa', tel que ce plan fasse avec le plan de ABA′ un angle quelconque BaC obtus, ou Ba'C aigu ; il suit que A étant

un angle quelconque, on aura l'angle $B' = B$, pourvu que B'C soit égal au supplément de BC; mais, il est clair aussi que dans ce même cas, les arcs AB, AB', c.-à-d. *a*B, *a*B' ou *a*'B, *a*'B' ne seront plus supplémentaires l'un de l'autre, non plus que les angles ACB et ACB' ou *a*CB, *a*CB' et *a*'CB, *a*'CB'; donc, **il pourra exister deux triangles obliqueangles différents** ACB et ACB' (A étant un angle quelconque) **dont un côté** AC **et l'angle opposé** B **de l'un, seront égaux à un côté** AC **et à l'angle opposé** B' **de l'autre; pourvu que le côté** B'C **opposé à l'autre angle donné** A **de l'un de ces triangles, soit égal au supplément du côté correspondant** BC **de l'autre.**

2° **En d'autres termes:** la condition à laquelle on pourra avoir deux triangles oblique-angles différents, dont un côté et l'angle opposé de l'un soient égaux à un côté et à l'angle opposé de l'autre: est que l'on puisse avoir dans un même onglet (**990**) ABA'CA de la sphère, (l'angle A de l'onglet étant celui des deux angles donnés qui est adjacent au côté donné AC) ou sur la surface d'une même lune (**989**), et menés d'un même point C, deux arcs CB, CB' supplémentaires l'un de l'autre; c.-à-d., que l'on puisse mener du sommet C ou du troisième angle du triangle, deux arcs CB, CB' dont l'un soit le supplément de l'autre.

(**1351**) Soit donc ACB ou A'CB un triangle, dans lequel on a un côté AC ou A'C, et deux angles BAC, ABC ou B'A'C, A'B'C; on aura; c.-à-d.: dans le cas (**1336, 2°**) des

" Deux angles et un côté opposé à l'un d'eux."

A étant aigu. {
1° Si $AC < 90°$ et $BC < AC$..... **une solution.**
2° Si $A'C > 90°$ et $BC < AC$ (sup. de A'C)........................... **une solution.**

Car, si BC est moindre que AC, ou que le supplément de A'C; le sup. de BC sera plus grand que A'C (sup. de AC); et comme A'C est (**1344**) plus grand que tout autre arc B'C

mené du point C, au cercle ABA′; à plus forte raison, le sup. B′C de BC sera-t-il trop grand, pour trouver place entre le sommet C et la circonférence ABA′ du plan de la base.

A étant aigu.
- 3° Si AC < 90° et B′C > AC..... **deux solutions.**
- 4° Si A′C > 90° et B′C > AC (sup. de A′C).................. **deux solutions.**

Car, puisque B′C est plus grand que A′C, ou que le sup. de A′C; le sup. BC de B′C sera moindre que A′C (sup. de AC) et pourra en conséquence (**1344**) trouver place entre C et ABA′.

A étant obtus.
- 5° Si AC < 90° et B′C > A′C (sup. de AC)...................... **une solution.**
- 6° Si A′C > 90° et B′C > A′C..... **une solution.**

Car, si B′C est plus grand que A′C, le sup. de B′C sera moindre que le sup. de A′C, c'est-à-dire, moindre que AC; or (**1345**) tout arc BC est plus grand que AC; donc le sup. BC de B′C ne pourra exister.

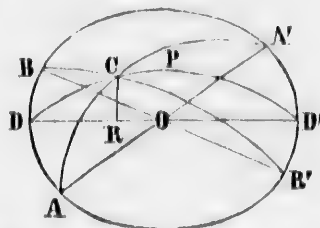
A étant obtus.
- 7° Si AC < 90° et BC < A′C (sup. de AC)....................... **deux solutions.**
- 8° Si AC > 90° et BC < A′C.... **deux solutions.**

Car, si BC est moindre que A′C; le sup. de BC sera plus grand que le sup. de A′C, c.-à-d., plus grand que AC, et (**1245**) le sup. B′C de BC pourra exister. (*)

(*) Il est à peine nécessaire de rappeler que, comme dans le cas correspondant (**222**) du triangle rectiligne, il est nécessaire, pour que le triangle sphérique puisse exister, que l'un quelconque de ses côtés soit (**1164**) moindre que la somme des deux autres; et que si BC, par exemple, dans les expressions 1°, 2°, 3°, etc. des articles (**1244**), (**1245**), était moindre que la perpendiculaire CD abaissée du sommet C du triangle, sur la base, le triangle ACB ne saurait exister; de même que, si BC était égal à l'arc perpendiculaire CD, il n'y aurait alors (**320**) qu'un seul triangle ACD qui répondrait aux données.

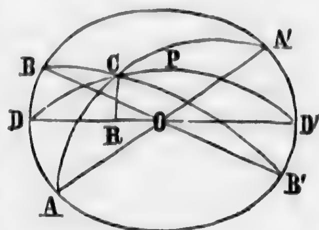
PROP. V.

(1352) Que la perpendiculaire menée du sommet à la base d'un triangle sphérique quelconque, tombe en dedans ou en dehors du triangle ; on aura, dans les deux cas, le moindre segment de la base adjacent au moindre ou au plus grand des deux autres côtés du triangle, suivant que la somme de ces côtés sera moindre ou plus grande qu'un demi-cercle.



En effet, soit ABD' un grand cercle de la sphère, DCD' un demi-grand cercle perpendiculaire au premier et C un point quelconque dans ce dernier, autre que P, pôle de ABD'. Soient encore ACA', BCB' deux demi-grands cercles quelconques passant par C et terminés de côtés opposés de la perpendiculaire BCD'. Cette construction donne quatre triangles sphériques ACB, A'CB', A'CB, ACB', la perpendiculaire CD, CD' tombant en dedans des deux premiers et en dehors des deux autres. Soit aussi BD moindre que AD et B'D' en conséquence moindre que A'D', à cause de A'D' = AD et de B'D' = BD (**984** et **138**). On aura (**1342**) CA' > CB et par conséquent (CA' + CA) > (CA + CB); c.-à-d. que la somme des côtés CA, CB du triangle ACB sera moindre qu'un demi-cercle, et la somme des côtés CA', CB' du triangle A'CB' en conséquence plus grande qu'un demi-cercle ; or, AD est par hyp. > BD ; donc (**1342**) CA > CB et CA' < CB', ou ce qui est la même chose, quand CA > CB, on a AD > BD, et quand CA' < CB', on a A'D' > B'D' ; donc :

1° Quand la somme des côtés CA, CB est moindre qu'un demi-cercle, et que la perpendiculaire CD tombe en dedans du triangle ; le moindre segment BD de la base AB est adjacent au moindre côté CB, ou le moindre côté CB au moindre segment BD.



2° Quand la somme des côtés CA′, CB′ est plus grande qu'un demi-cercle, et que la perpendiculaire CD′ tombe en dedans; le moindre segment B′D′ de la base est adjacent au plus grand côté CB′, ou le plus grand côté CB′ au moindre segment B′D′.

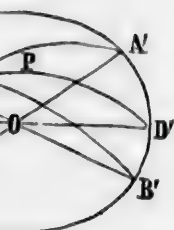
Maintenant, puisque CA′ < CB′ et CB < CA, il est clair que (CA′ + CB) > (CA + CB′); or CA + CA′ + CB + CB′ = 2 demi-cercles; donc CA + CB′ est plus grand qu'un demi-cercle, et CA′ + CB en conséquence moindre qu'un demi-cercle; donc :

3° Quand la somme des côtés CA′, CB est moindre qu'un demi-cercle et que la perpendiculaire BCD′, tombe en dehors; le moindre segment BD de la base prolongée DBA′D′ est adjacent au moindre côté CB, ou le moindre côté CB au moindre segment BD.

4° Quand la somme des côtés CA, CB′, est plus grande qu'un demi-cercle et que la perpendiculaire DCD′ tombe en dehors, le moindre segment B′D′ de la base prolongée DAB′D′ est adjacent au plus grand côté CB′, ou le plus grand côté CB′ au moindre segment B′D′.

(1353) D'ailleurs. On a vu (**1349**) que l'angle D ou BDC étant droit et A′D′ = BD, on a A′C = supplément de BC; ou si A′C + BC = 180°, on aura A′D′ = BD.

D'où, il est clair que, BC étant quelconque et restant constant, si A′C + BC est < 180°, le point A′ sera plus éloigné de D′, et si A′C + BC est > 180°, le point A′ sera moins éloigné de D; c'est-à-dire que A′D sera < ou > BD, suivant qu'on aura A′C + BC > ou < que 180°; or, quand A′D′ est < BD, on a aussi AD < BD, à cause de AD = A′D′, et par conséquent aussi, on a A′D′ < B′D′ qui est égal à BD; d'où l'on obtient encore les quatre conclusions du dernier paragraphe.



2° Si la somme des côtés est égale à un demi-cercle et que ces côtés soient inégaux, c.-à-d. dans ce cas, de différente affection ; la perpendiculaire tombera en dehors du triangle et les segments A′D′, BD de la base prolongée, seront égaux, ou, ce qui est la même chose, les segments A′D′, BD′ seront supplémentaires l'un de l'autre.

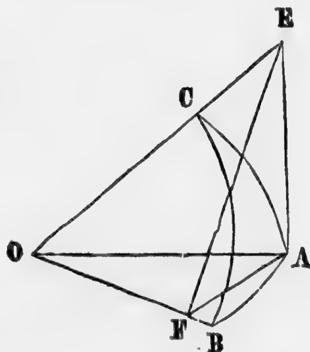
(**1354**) Pourvus, maintenant, des connaissances nécessaires, pour établir, dans tous les cas, l'affection des côtés d'un triangle sphérique quelconque, et pouvant déterminer s'il y a, ou non, ambiguïté de solution, c.-à-d. une, deux ou plusieurs réponses au problème ; et sachant aussi quand la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, et quand elle tombe en dehors, et de quel côté elle tombe le plus près ; nous passons à la considération des :

RAPPORTS ENTRE LES COTÉS ET LES ANGLES DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

PROP. I. THÉOR.

(1355) **Dans tout triangle sphérique rectangle ACB, le sinus AF de l'un quelconque AB des côtés qui comprennent l'angle droit, est au rayon de la sphère, comme la tangente AE de l'autre côté, est à la tangente de l'angle ABC opposé à ce côté.**

Soit O le centre de la sphère ; OBC, OAB, OAC, seront les plans des côtés, et A ou BAC étant un angle droit, le plan OAC ou OAE sera perpendiculaire au plan OAB. Joignez EF ; l'angle rectiligne EFA est (**878**) égal à l'angle B ; car EA qui est (**1218**) perpendiculaire à OA, est (**926**) perpendiculaire au plan OAB et

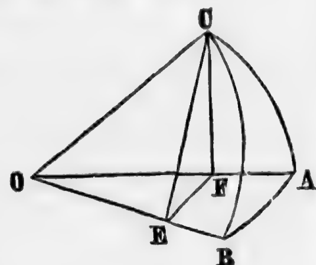


comme AF est (**1214**) perpendiculaire à OB, EF est aussi (**904**) perpendiculaire à OB ; cela posé, on a (**1307**, 13) dans le triangle rectiligne FAE, rectangle (**882**) en A, la proportion AF : R :: AE : tang. AFE ; donc, sin. AB : R :: tang. AC : tang. ABC ; donc, etc.

(**1356**) **Cor.** Puisque par cette prop. on a sin. AB : R :: tang. AC : tang. ABC, ou alt. (**94**) et inv. (**93**) tang. AC : sin. AB :: tang. ABC : R ; et parce que (**1225**) R : cot. ABC :: tang. ABC : R ; donc (**75 Ax.**) sin. AB : cot. ABC :: tang. AC : R. (1)

PROP. II. THÉOR.

(**1357**) **Dans tout triangle sphérique rectangle ACB, le sinus CE de l'hypoténuse BC, est au rayon, comme le sinus CF de l'un quelconque AC des deux autres côtés, est au sinus de l'angle ABC opposé à ce côté.** (2)



Car, d'abord, CF étant le sinus de AC, c.-à-d., (**1214**) perpendiculaire à OA et (**926**) perpendiculaire au plan OAB, à cause de l'angle droit A ; si du point F l'on mène FE perpendiculaire à OB, et que l'on joigne ensuite

(1) Renouvelons ici la recommandation déjà faite à l'élève (voyez la note, page 462) quand il y a à déduire une proportion de deux ou plusieurs autres proportions : d'écrire ces dernières, les unes au-dessus des autres ; ce qui indiquera de suite l'égalité ou la proportionnalité des antécédents ou des conséquents, et permettra de tirer plus immédiatement de cette disposition des divers rapports, les proportions voulues.

(2) Voyez la note, page 448, et menez (dans les conditions voulues par l'énoncé) dans les plans composants OBC, OAB, OAC des angles d'un triangle sphérique rectangle ainsi formé, les droites CE, CF, EF ; ce qui facilitera de beaucoup l'intelligence de la démonstration.

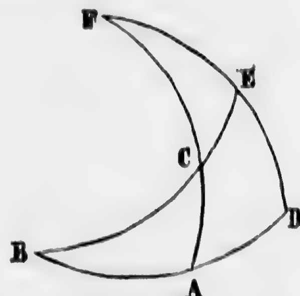
CE, CE sera (**904**) perpendiculaire à OB ; c.-à-d., CE sera le sinus de BC, et l'angle rectiligne FEC formé des droites FE, CE, chacune perpendiculaire à la commune intersection OB des plans OBA, OBC, sera la mesure de l'angle sphérique B du triangle ABC. Cela étant, on a, dans le triangle rectiligne EFC, rectangle (**882**) en F, la proportion (**1307**, 9) CE : R :: CF : sin. CEF ; donc, etc.

(**1358**) La démonstration de ce théorème et du dernier, suppose un triangle dont les côtés et l'hypoténuse sont chacun moindre qu'un quart-de-cercle, et cela seulement pour en faciliter l'intelligence. Mais un triangle rectangle quelconque conduirait au même résultat ; car si l'un AC des côtés du triangle était plus grand qu'un quart-de-cercle, le sinus de ce côté étant égal à celui de son supplément, aurait encore le même rapport au sinus de l'hypoténuse BC ; puisque cette hypoténuse serait alors (**1349**) supplémentaire de celle qui correspondrait à un côté AC moindre qu'un quart-de-cercle, et que son sinus serait en conséquence égal à celui de son supplément. Il est vrai que dans ce même cas, l'angle B′ opposé au côté AC′ $> 90^{0}$ serait obtus ; mais il serait en même temps supplémentaire de B et aurait encore par conséquent le même sinus ; de là, l'énoncé du théorème est général.



PROP. III. THÉOR.

(1359) Dans tout triangle sphérique rectangle ACB, le cosinus de l'hypoténuse BC, est au rayon, comme la cotangente de l'un quelconque ABC des deux angles obliques, est à la tangente de l'autre angle ACB.



Du point B, comme pôle, décrivez l'arc DF pour rencontrer en E et F les côtés BC, AC, prolongés du triangle. Puisque l'angle A est droit par hyp., le cercle AF, c.-à-d. son plan est perpendiculaire au cercle BD, et DF décrit du pôle B est aussi (**1153**) perpendiculaire à BD ; d'où, l'intersection F de ces cercles est (**1156, 2°**) le pôle de BD. Les arcs AF, DF sont donc (**1153**) des quart-de-cercles, comme le sont aussi les arcs BD, BE. Donc, dans le triangle CEF, rectangle en E, CE est le complément de BC hypoténuse du triangle ACB ; EF est le complément de l'arc ED, mesure (**1160**) de l'angle ABC ; FC, hypoténuse du triangle CEF, est le complément de AC ; et l'arc AD qui est la mesure de l'angle CFE est le complément de AB. Or, dans le triangle rectangle CEF, on a (**1355**) sin. CE : R :: tang. EF : tang. ECF, ce qui, dans le triangle ACB, donne cos. BC : R :: cot. ABC : tang. ACB ; l'angle ACB étant égal (**1162**) à son opposé au sommet ECF, le cosinus de BC égal (**1224**) au sinus de son complément CE, et la cotangente de l'angle B, c.-à-d. de l'arc ED qui en est la mesure, égale (**1224**) à la tangente de son complément EF ; donc, etc.

(**1360**) **Cor.** Parce que cos. BC : R :: cot. ABC : tang. ACB, ou, alt., cos. BC : cot. ABC :: R : tang. ACB, et comme (**1225**) cot. ACB : R :: R : tang. ACB ; on obtient (**75 Ax.**) cos. BC : cot. ABC :: cot. ACB : R, ou alt., cos. BC : cot. ACB :: cot. ABC : R, et inv., cot. ACB : cos. : BC :: R : cot. ABC. (Lisez la note, page 462.)

PROP. IV. THÉOR.

(**1361**) **Dans les triangles sphériques rectangles, le**

cosinus d'un angle, est au rayon, comme la tangente du côté adjacent à cet angle, est à la tangente de l'hypoténuse.

Car, on a (**1355**) dans le triangle CEF, sin. EF : R :: tang. CE : tang. CFE ; mais sin. EF = cos. ABC, tang. CE = cot. BC, et tang. CFE = cot. AB ; donc, cos. ABC : R :: cot. BC : cot. AB. Maintenant, parce que (**1225**) cot. BC : R :: R : tang. BC et que cot. AB : R :: R : tang. AB ; on a (**86**) cot. BC × tang. BC = cot. AB × tang. AB = R^2 ; d'où, (**88**) cot. BC : cot. AB :: tang. AB : tang. BC ; donc, (**75 Ax.**) cos. ABC : R :: tang. AB : tang. BC.

(**1362**) **Cor. 1.** Il suit de la démonstration que **les tangentes de deux arcs quelconques sont réciproquement** (**66**) **proportionnelles à leurs cotangentes.**

(**1363**) **Cor. 2.** Parce que cos. ABC : R :: tang. AB : tang. BC, et que (**1225**) R : cot. BC :: tang. BC : R, on a alt., dans les deux proportions, cos. ABC : tang. AB :: R : tang. BC et cot. BC : R :: R : tang. BC ; d'où, (**75 Ax.**) cos. ABC : tang. AB :: cot. BC : R, ou alt., cos. ABC : cot. BC :: tang. AB : R ; c'est-à-dire, **le cosinus de l'un quelconque des angles obliques, est à la cotangente de l'hypoténuse, comme la tangente du côté adjacent à l'angle, est au rayon.**

PROP. V. THÉOR.

(**1364**) **Dans les triangles sphériques rectangles :**

1° **Le cosinus d'un côté, est au rayon, comme le cosinus de l'hypoténuse, est au cosinus de l'autre côté.**

Dans le triangle CEF, on a (**1357**) sin. CF : R :: sin. CE : sin. CFE ; mais, sin. CF = cos. AC, sin. CE = cos. BC, et sin. CFE = cos. AB ; donc, cos. AC : R :: cos. BC : cos. AB et de même, cos. AB : R :: cos. BC : cos. AC.

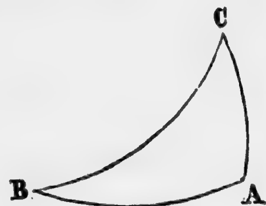
(**1365**) 2° **Le cosinus d'un côté, est au rayon, comme le cosinus de l'angle opposé à ce côté, est au sinus de l'autre angle.**

Le triangle CEF donne (**1357**) sin. CF : R :: sin. EF : sin. ECF ; or sin. CF = cos. AC, sin. EF = cos. ABC et sin. ECF = sin. ACB ; donc, cos. AC : R :: cos. ABC : sin. ACB, et de même, cos. AB : R :: cos. ACB : sin. ABC.

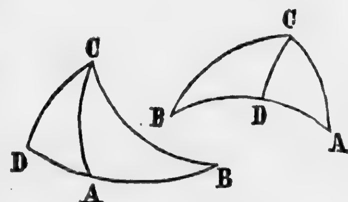
PROP. VI. THÉOR.

(1366) **Dans tout triangle sphérique** ACB, **soit rectangle ou oblique-angle ; les sinus des côtés sont entre eux, comme les sinus des angles opposés à ces côtés.**

Car, Soit ACB un triangle rectangle en A ; on a (**1357**) le sinus de l'hypoténuse BC, au rayon (sinus (**1215**) de l'angle droit A) comme le sinus du côté AC, au sinus de l'angle B ; et de même, sinus BC : R :: sinus AB : sinus C ; d'où, (**75 Ax.**) sin. AC : sin. B :: sin. AB : sin. C.



En second lieu, soit ABC un triangle oblique-angle, et CD une perpendiculaire menée de l'un C des angles, à la base ou au côté opposé AB prolongé s'il le faut. On a (**1357**) dans le triangle rectangle ADC (Lisez la note page 462), sin. AC : R :: sin. CD : sin. A, et dans le triangle rectangle BDC, on a sin. BC : R :: sin. CD : sin. B ; d'où, (**86**) sin. BC × sin. B = sin. AC × sin. A = sin. CD × R ; donc, (**68**) sin. BC : sin. AC :: sin. A : sin. B. On démontre de la même manière que sin. BC : sin. AB :: sin. A : sin. C ; donc (**75 Ax.**) sin. AB : sin. C :: sin. AC : sin. B :: sin. BC : sin. A, ou alt., sin. BC : sin. AB : sin. AC :: sin. A : sin. C : sin. B.







PROP. VII. THÉOR.

(1367) **Dans tout triangle sphérique ACB, si l'on mène de l'un quelconque C des angles, une perpendiculaire CD au côté opposé, prolongé s'il le faut ;**

1° **Les cosinus des angles A et B à la base sont proportionnels aux sinus des segments ACD, BCD de l'angle vertical C ;** c.-à-d., cos. A : cos. B :: sin. ACD : sin. BCD. Car, dans le triangle rectangle ADC, on a (**1365**) cos. CD : R :: cos. A : sin. ACD, et dans le triangle rectangle BDC, on a cos. CD : R :: cos. B : sin. BCD ; d'où, (**75 Ax.**) cos. A : sin. ACD :: cos. B : sin. BCD et, alt., cos. A : cos. B :: sin. ACD : sin. BCD.

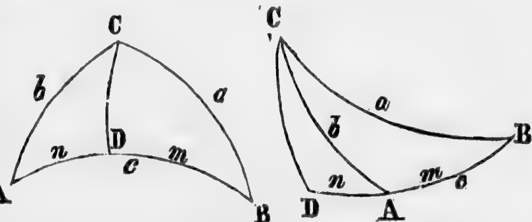
(1368) 2° **Les cosinus des côtés AC, BC sont proportionnels aux cosinus des segments AD, BD de la base.** Car, (**1364**) dans le triangle rectangle ADC, on a cos. AC : cos. AD :: cos. DC : R et dans le triangle rectangle BDC, on a cos. BC : cos. BD :: cos. DC : R ; d'où, (**75**) cos. AC : cos. AD :: Cos. BC : cos. BD, ou alt., cos. AC : cos. BC :: cos. AD : cos. BD.

(1369) 3° **Les sinus des segments AD, BD, de la base, sont réciproquement proportionnels aux tangentes des angles B et A à la base.** Car, dans le triangle rectangle ADC on a (**1355**) sin. AD : R :: tang. DC : tang. A et dans le triangle rectangle BDC, on a sin. BD : R :: tang. DC : tang. B ; donc, (**86**) sin. BD $\times$ tang. B $=$ sin. AD $\times$ tang. A $=$ R $\times$ tang. DC, et (**88**) sin. AD : sin. BD : tang. B : tang. A.

(1370) 4° **Les cosinus des segments ACD, BCD de l'angle vertical sont réciproquement proportionnels aux tangentes des côtés.** Car, (**1361**) dans le triangle rectangle ADC on a, tang. CD : tang. AC :: cos. ACD : R, et dans le triangle rectangle BDC on a tang. CD : tang. BC :: cos. BCD : R ; de là, (**86 et 88**) cos. ACD : cos. BCD :: tang. BC : tang. AC.

PROP. VIII. THÉOR.

(1371) Si, de l'un quelconque C des angles d'un triangle sphérique ACB, l'on mène une perpendiculaire CD au côté opposé, AB, prolongé s'il le faut ; le rectangle des tangentes de la demi-somme et de la demi-différence des segments AD, BD, de la base, est égal au rectangle des tangentes de la demi-somme et de la demi-différence des côtés AC' BC. C'est-à-dire : tang. $\frac{1}{2}$ (BD + AD) × tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD = tang. $\frac{1}{2}$ (BC + AC) × tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC).



Pour simplier la démonstration, soit BD = m, AD = n, BC = a, AC = b ; on aura tang. $\frac{1}{2}(m+n)$ × tang. $\frac{1}{2}(m-n)$ = tang. $\frac{1}{2}(a+b)$ × tang. $\frac{1}{2}(a-b)$.

. Puisque (**1268**) cos. a : cos. b :: cos. m : cos. n, et que div. (**96**) cos. a — cos. b : cos. b :: cos. m — cos. n : cos. n, et comp. (**95**) cos. a + cos. b : cos. b :: cos. m + cos. n : cos. n ; on a (**100**), cos. a + cos. b : cos. a — cos b :: cos. m + cos. n : cos. m — cos. n ; mais (**1238**) cos. a + cos. b : cos. a — cos. b :: cot. $\frac{1}{2}(a+b)$: tang. $\frac{1}{2}(a-b)$ et de même, cos. m + cos. n : cos. m — cos. n :: cot. $\frac{1}{2}(m+n)$: tang. $\frac{1}{2}(m-n)$; d'où, (**75 Ax.**) cot. $\frac{1}{2}(a+b)$: tang. $\frac{1}{2}(a-b)$ :: cot. $\frac{1}{2}(m+n)$: tang. $\frac{1}{2}(m-n)$: Et parce que (**330**) les rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, on a tang. $\frac{1}{2}(a+b)$ × cot. $\frac{1}{2}(a+b)$: tang. $\frac{1}{2}(a+b)$ × tang. $\frac{1}{2}(a-b)$ :: tang. $\frac{1}{2}(m+n)$ × cot. $\frac{1}{2}(m+n)$: tang. $\frac{1}{2}(m+n)$ × tang. $\frac{1}{2}(m-n)$. Or les premier et troisième termes de ce rapport sont (**1225**) égaux, étant chacun égal au carré du rayon; donc (**94**) les second et quatrième termes sont aussi égaux, et l'on a tang. $\frac{1}{2}(m+n)$

$\times$ tang. $\frac{1}{2}(m-n) =$ tang. $\frac{1}{2}(a+b) \times$ tang. $\frac{1}{2}(a-b)$; c.-à-d. tang. $\frac{1}{2}$ (BD+AD)$\times$tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD)=tang. $\frac{1}{2}$ (BC + AC) $\times$ tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC).

(**1372**) **Cor. 1.** Parce que (**545,** ou **332** et **88**) les côtés des rectangles (**171**) égaux sont réciproquement proportionnels ; on a tang. $\frac{1}{2}$ (BD + AD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BC + AC) :: tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC) : tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD).

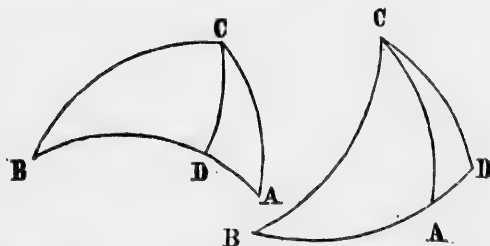
(**1373**) **Cor. 2.** Puisque, quand la perpendiculaire CD tombe en dedans du triangle, on a BD + AD = AB, la base ; et quand CD tombe en dehors du triangle, on a BD — AD = AB ; donc dans le premier cas, la proportion dans le dernier corollaire devient, tang. $\frac{1}{2}$ (AB) : tang. $\frac{1}{2}$ (BC+AC) :: tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC) : tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD) ; et dans le second cas, la proportion devient, inv. et alt., tang. $\frac{1}{2}$ (AB) : tang. $\frac{1}{2}$ (BC + AC) :: tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC) : tang. $\frac{1}{2}$ (BD + AD).

(**1374**) **Sco.** Ce théorème est très utile en trigonométrie sphérique ; on peut aisément s'en rappeler, par raison de son analogie à celui (**614**) de la géométrie rect. ou (**1244**) de la trigonométrie rect. que : le rectangle de la demi-somme et demi-différence des côtés d'un triangle rectiligne est égal au rectangle de la demi-somme et demi-différence des segments de la base. Cette proposition et les deux suivantes sont dues à Napier, et sont si bien adaptées au calcul par logarithmes, qu'on doit les considérer comme trois des propositions les plus précieuses de la trigonométrie.

PROP. IX. THÉOR.

(1375) **Si du sommet à la base d'un triangle sphérique quelconque ACB, l'on mène une perpendiculaire CD ; le sinus de la somme des angles à la base, est au sinus de leur différence, comme la tangente de la demi-base, est à la tangente de la demi-différence de ses segments, quand la perpendiculaire tombe en dedans ; mais, comme la cotangente de la demi-base, à la cotangente de la demi-**

somme des segments, quand la perpendiculaire tombe en dehors du triangle : Et le sinus de la somme des deux côtés, est au sinus de leur différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris par les côtés, est à la tangente de la demi-différence des segments de l'angle vertical, c'est-à-dire **des angles que fait la perpendiculaire avec ces côtés quand elle tombe en dedans du triangle, ou à la tangente de la demi-somme de ces angles, quand la perpendiculaire tombe en dehors.** C'est-à-dire, sin. (A + B) : sin. (A — B :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD) quand CD tombe en dedans du triangle ; mais sin. (A + B) : sin. (A — B) :: cot. $\frac{1}{2}$ AB : cot. $\frac{1}{2}$ (BD+AD) quand CD tombe en dehors. Et sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ ACB : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD — ACD) quand AD tombe en dedans ; mais quand AD tombe en dehors, sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ ACB : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD).



Car, dans le triangle BCA, on a (**1369**) tang. B : tang. A :: sin. AD : sin. BD, et de là, div., tang. A — tang. B : tang. B :: sin. BD — sin. AD : sin. BD, et comp., tang. A + tang. B : tang. B :: sin. BD + sin. AD : sin. AD et (**99**) tang. A + tang. B : tang. A — tang. B :: sin. BD + sin. AD : sin. BD — sin. AD ; Or, par le lemme suivant, on a tang. A + tang. B : tang. A — tang. B :: sin. (A + B) : sin. (A — B) ; et, (**1237**) sin. BD + sin. AD : sin. BD — sin. AD :: tang. $\frac{1}{2}$ (BD + AD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD) ; donc, parce que (**75 Ax.**) les rapports qui sont égaux à un même rapport sont égaux entre eux, (lisez la note, page 462), sin. (A + B) : sin. (A — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ (BD + AD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD).

Maintenant, quand CD est au dedans du triangle, BD +



AD = AB et de là, sin. (A + B) : sin. (A — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BD — AD) et quand CD est en dehors du triangle, BD — AD = AB et de là, sin. (A + B) : sin. (A — B) tang. $\frac{1}{2}$ (BD + AD) : tang. $\frac{1}{2}$ AB, ou parce que (**1362**) les tangentes de deux arcs quelconques sont réciproquement comme leurs cotangentes, sin. (A + B : sin. (A — B) :: cot. $\frac{1}{2}$ AB : cot. $\frac{1}{2}$ (BD + AD).

(**1376**) Il est encore à démontrer la seconde partie de la proposition. Or, le théor. (**1370**) donne tang. BC : tang. AC :: cos. ACD : cos. BCD ; d'où on a (div., comp. et **99**) comme auparavant, tang. BC + tang. AC : tang. BC — tang. AC :: cos. ACD + cos. BCD : cos. ACD — cos. BCD ; mais, (**LEM.**) tang. BC + tang. AC : tang. BC — tang. AC :: sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC), et (**1238**) cos. ACD + cos. BCD : cos. ACD — cos. BCD :: cot. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD — ACD). Donc (**75 Ax.**) sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD — ACD). Maintenant quand CD tombe en dedans du triangle, BCD + ACD = ACB et de là, sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ ACB : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD — ACD).

Mais si la perpendiculaire tombe en dehors, BCD — ACD = ACB et de là, sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD : tang. $\frac{1}{2}$ ACB ; ou parce que (**1362**) cot. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD) : tang. $\frac{1}{2}$ ACB :: cot. $\frac{1}{2}$ ACB : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD), sin. (BC + AC) : sin. (BC — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ ACB : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD).

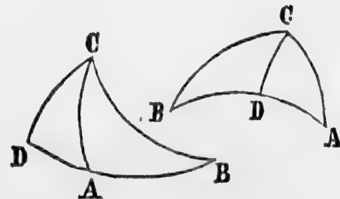
LEMME.

(1377) **La somme des tangentes de deux arcs quelconques A, B, est à la différence de ces tangentes, comme le sinus de la somme des arcs, est au sinus de leur différence ;** ou tang. A + tang. B : tang. A — tang. B :: sin. (A + B) : sin. (A — B) ; car, (**1250**, R = 1) sin. A × cos. B + cos. A × sin. B = sin. (A + B), et divisant le tout par cos. A × cos.

B, on a $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} + \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}} = \frac{\text{sin. (A + B)}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}$; c.-à-d., $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}}$ étant (1228) = tang. A, et $\frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}}$ = tang. B, on a tang. A + tang. B= $\frac{\text{sin. (A + B)}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}$ et de même on prouve que tang. A — tang. B = $\frac{\text{sin. A — B}}{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}$; d'où il suit que tang. A + tang. B : tang. A — tang. B :: sin. (A + B) : sin. (A — B), puisque (73) l'égalité des diviseurs cos. A $\times$ cos. B des deux derniers termes, fait qu'on peut les supprimer sans en changer le rapport.

PROP. X. THÉOR.

(1378) **Le sinus de la demi-somme de deux quelconques des angles d'un triangle sphérique, est au sinus de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié du côté adjacent à ces angles est à la tangente de la demi-différence des côtés qui leur sont opposés; et le cosinus de la demi-somme des mêmes angles, est au cosinus de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié du côté qui leur est adjacent, à la tangente de la demi-somme des côtés qui leur sont opposés**; ou, sin. $\frac{1}{2}$ (A+B) : sin. $\frac{1}{2}$ (A — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC); et cos. $\frac{1}{2}$ (A + B) : cos. $\frac{1}{2}$ (A — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BC + AC).



Pour simplifier la démonstion, soit A + B = 2S, A — B = 2D, la base AB = 2B, et la différence des segments de la base, ou BD — AD = 2X. Alors parce que, par le dernier théorème, on a sin. (A + B) : sin. (A — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BD—AD), on aura sin. 2S : sin. 2D :: tang. B : tang. X. Maintenant, sin.

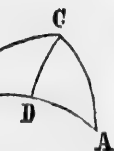
2S = sin. (S + S) = (**1251**, R = 1) 2 sin. S × cos. S. De même, sin. 2D = 2 sin. D × cos. D ; donc sin. S × cos. S : sin. D × cos. D :: tang. B : tang. X.

De plus, dans le triangle sphérique ACB on a (**1366**) sin. A : sin. B :: sin. BC : sin. AC, ce qui donne (div. comp. et **99**) sin. A + sin. B : sin. A — sin. B :: sin. BC + sin. AC : sin. BC — sin. AC, et puisque (**1252**, 2°) sin. A + sin. B = 2 sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) × cos. $\frac{1}{2}$ (A — B) (car il est clair que 2 sin. $\frac{A+B}{2}$ est la même chose que 2 sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) et que cos. $\frac{1}{2}$ (A — B) est la même chose que cos. $\frac{(A-B)}{2}$) = 2 sin. S × cos. D ; et (*) sin. A — sin. B = 2 cos. $\frac{1}{2}$ (A + B) × sin. $\frac{1}{2}$ (A — B) = 2 cos. S × sin. D ; donc (lisez la note, page 462) 2 sin. S × cos. D : 2 cos. S × sin. D :: sin. BC + sin. AC : sin. BC — sin. AC.

Mais (**1237**) sin. BC + sin. AC : sin. BC — sin. AC :: tang. $\frac{1}{2}$ BC + AC : tang. $\frac{1}{2}$ BC — AC ; donc (**75 Ax.**) 2 sin. S × cos. D : 2 cos. S × sin. D :: tang. $\frac{1}{2}$ (BC + AC) : tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC) ; ou pour simplifier encore, remplaçant par Z l'expression $\frac{1}{2}$ (BC + AC) et par Y l'expression $\frac{1}{2}$ (BC — AC), on aura sin. S × cos. D : cos. S × sin. D :: tang. Z : tang. Y. Maintenant, puisque (**60**) $\frac{\text{tang. X}}{\text{tang. B}} = \frac{\text{sin. D} \times \text{cos. D}}{\text{sin. S} \times \text{cos. S}}$, (car on a déjà établi la proportion sin. S × cos S : sin. D × cos. S :: tang. B : tang. X) et puisqu'on a de même $\frac{\text{tang. Y}}{\text{tang. Z}} = \frac{\text{cos. S} \times \text{sin. D}}{\text{sin. S} \times \text{cos. D}}$, si l'on multiplie ensemble les quantités égales, on obtient (**78 et 70**)

$$\frac{\text{tang. X}}{\text{tang. B}} \times \frac{\text{tang. Y}}{\text{tang. Z}} = \frac{(\text{sin. D})^2 \times \text{cos. S} \times \text{cos. D}}{(\text{sin. S})^2 \times \text{cos. S} \times \text{cos. D}} = \frac{(\text{sin. D})^2}{(\text{sin. S})^2}.$$

(*) Les triangles semblables (**322**) CGB, DNL, (**1249**) donnent CB : CG :: DL : DN ; d'où, (**86**) CB × DN = CG × DL ; c'est-à-dire, R × $\frac{1}{2}$ sin. (A + B) − $\frac{1}{2}$ sin. (A − B) = cos. A × sin. B, ou, R étant = 1, cos. A × sin. B = $\frac{1}{2}$ sin. (A + B) − $\frac{1}{2}$ sin. (A − B); d'où l'on tire d'une manière analogue à celle du par. (**1252**, 2°) sin. A − sin. B = 2 cos. $\frac{1}{2}$ (A + B) × sin. $\frac{1}{2}$ (A − B).



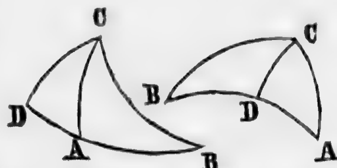
Mais (**1371, 60**) $\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (BD - AD)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (BC - AC)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (BC + AC)}{\text{tang. } \frac{1}{2} AB}$, c'est-à-dire $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } Y} = \frac{\text{tang. } Z}{\text{tang. } B}$; or, $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} = \frac{\text{tang. } Z \times \text{tang. } Y}{(\text{tang. } B)^2}$ et $\frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } Z} = \frac{(\text{tang. } Y)^2}{\text{tang. } X \times \text{tang. } B}$; donc $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times \frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } Z} = \frac{\text{tang. } Z \times \text{tang. } Y \times (\text{tang. } Y)^2}{\text{tang. } X \times \text{tang. } B \times (\text{tang. } B)^2}$; mais tang. Z × tang. Y = tang. X × tang. B, à cause de $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } Y} = \frac{\text{tang. } Z}{\text{tang. } B}$; donc (**70**) $\frac{\text{tang. } Z \times \text{tang. } Y \times (\text{tang. } Y)^2}{\text{tang. } X \times \text{tang. } B \times (\text{tang. } B)^2} = \frac{(\text{tang. } Y)^2}{(\text{tang. } B)^2}$; donc $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times \frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } Z} = \frac{(\text{tang. } Y)^2}{(\text{tang. } B)^2}$.

Or, on vient de voir que $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times \frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } Z} = \frac{(\text{sin. } D)^2}{(\text{sin. } S)^2}$; d'où $\frac{(\text{tang. } Y)^2}{(\text{tang. } B)^2} = \frac{(\text{sin. } D)^2}{(\text{sin. } S)^2}$; et (**73**) $\frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } B} = \frac{\text{sin. } D}{\text{sin. } S}$, ou (**61**) sin. S : sin. D :: tang. B : tang. Y, c.-à-d. sin. (A + B) : sin. (A — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BC — AC) ; ce qui prouve la première partie de la propositon.

En second lieu, puisque $\frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } Z} = \frac{\text{cos. } S \times \text{sin. } D}{\text{sin. } S \times \text{cos. } D}$ ou, inv. $\frac{\text{tang. } Z}{\text{tang. } Y} = \frac{\text{sin.} S \times \text{cos.} D}{\text{cos.} S \times \text{sin.} D}$, et puisque $\frac{\text{tang.} X}{\text{tang. } B} = \frac{\text{sin.} D \times \text{cos.} D}{\text{sin. } S \times \text{cos. } S}$ on obtient, en multipliant les égales par les égales et supprimant les quantités qui se détruisent, c.-à-d. les multiplicateurs communs aux deux termes de la fraction, $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times \frac{\text{tang. } Z}{\text{tang. } Y} = \frac{(\text{cos. } D)^2}{(\text{cos. } S)^2}$. Mais on a déjà vu que $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times \frac{\text{tang. } Y}{\text{tang. } Z} = \frac{(\text{tang. } Y)^2}{(\text{tang. } B)^2}$ ou mettant $\frac{\text{tang. } Z}{\text{tang. } Y}$ on a $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times \frac{\text{tang. } Z}{\text{tang. } Y} = \frac{(\text{tang. } Z)^2}{(\text{tang. } B)^2}$ et comme on a aussi $\frac{\text{tang. } X}{\text{tang. } B} \times$

$\frac{\text{tang. Z}}{\text{tang. Y}} = \frac{(\cos. D)^2}{(\cos. S)^2}$ on aura (**68 Ax.**) $\frac{(\cos. D)^2}{(\cos. S)^2} = \frac{(\text{tang. Z})^2}{(\text{tang. B})^2}$

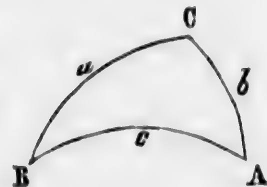
et par conséquent (**73**) $\frac{\cos. D}{\cos. S} = \frac{\text{tang. Z}}{\text{tang. B}}$ ou (**61**) cos. S : cos. D :: tang. B : tang. Z, c'est-à-dire, cos. (A + B) : cos. (A—B) :: tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$ (BC+AC) ; ce qui prouve la seconde partie du théorème.



(**1379**) **Cor. 1.** En faisant l'application de cette proposition au triangle polaire ou supplémentaire (**1172**) de ACB, et considérant que le sinus de la demi-somme ou demi-différence des suppléments de deux arcs, est le même que le sinus de la demi-somme ou de la demi-différence des arcs eux-mêmes, et qu'il en est ainsi des cosinus ou des tangentes de la demi-somme ou demi-différence des suppléments de deux arcs ; et que la tangente du demi-supplément d'un arc est la même que la cotangente de la moitié de l'arc lui-même, il s'en suivra, que **le sinus de la demi-somme de deux quelconques des côtés d'un triangle sphérique, est au sinus de leur demi-différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris par ces côtés, est à la tangente de la demi-différence des angles qui leur sont opposés**: et que **le cosinus de la demi-somme de ces côtés, est au cosinus de leur demi-différence, comme la cotangente du demi-angle compris entre ces côtés, est à la tangente de la demi-somme des angles qui leur sont opposés.**

(**1380**) **Cor. 2.** Donc si A, B, C, sont les trois angles d'un triangle sphérique et *a*, *b*, *c*, les côtés opposés à ces angles, on aura

1° Sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) : sin. $\frac{1}{2}$ (A—B) :: tang. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}$ $(a - b)$
2° Cos. $\frac{1}{2}$ (A + B) : cos. $\frac{1}{2}$ (A—B) :: tang. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}$ $(a + b)$
3° Sin. $\frac{1}{2}$ $(a + b)$: sin. $\frac{1}{2}$ $(a - b)$ :: cot. $\frac{1}{2}$ C : tang. $\frac{1}{2}$ (A—B)
4° Cos. $\frac{1}{2}$ $(a + b)$: cos. $\frac{1}{2}$ $(a - b)$ :: cot. $\frac{1}{2}$ C : tang. $\frac{1}{2}$ (A+ B)



(**1381**) Ce seul théorème de Napier nous fournit donc le moyen de résoudre quatre des six (**1336**) cas du triangle sphérique. En effet :

I

Etant donnés deux côtés a et b et l'angle A opposé à l'un deux.

Trouver B, l'angle opposé à l'autre côté donné.

$$\text{Sin.}\, a : \text{sin.}\, b :: \text{sin. A} : \text{sin. B} \,;\ \text{d'où, sin. B} = \text{sin. A} \times \frac{\text{sin.}\, b}{\text{sin.}\, a}.$$

Trouver l'angle inclus C.

$$\text{Cot.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{C} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{A} - \text{B}) \times \frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\ (a + b)}{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\ (a - b)}$$

Trouver le troisième côté c.

$$\text{Sin. A} : \text{sin. C} :: \text{sin.}\, a : \text{sin.}\, c \ ;\ \text{d'où sin.}\, c = \text{sin.}\, a \times \frac{\text{sin. C}}{\text{sin. A}}$$

II

Etant donnés deux angles A et B et le côté a opposé à l'un deux.

Trouver b, le côté opposé à l'autre angle donné.

$$\text{Sin. A} : \text{sin. B} :: \text{sin.}\, a : \text{sin.}\, b \,;\ \text{d'où, sin.}\, b = \text{sin.}\, a \times \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. A}}.$$

Trouver c, le côté compris entre les angles donnés.

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\, c = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\, (a - b) \times \frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\, (\text{A} + \text{B})}{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\, (\text{A} - \text{B})}.$$

Trouver le troisième angle C.

$$\text{Sin.}\, a : \text{sin.}\, c :: \text{sin. A} : \text{sin. C} \,;\ \text{d'où sin. C} = \text{sin. A} \times \frac{\text{sin.}\, c}{\text{sin.}\, a}.$$

III

Etant donnés deux côtés a et b et l'angle C inclus.

Trouver les angles A et B.

$$\left.\begin{aligned} \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{A}+\text{B}) &= \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{C} \times \frac{\text{cos.}\ \frac{1}{2}\, (a - b)}{\text{cos.}\ \frac{1}{2}\, (a + b)} \\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\, (\text{A}-\text{B}) &= \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{C} \times \frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\, (a - b)}{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\, (a + b)} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{A} = \tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, (\text{A} - \text{B}) \\ &\text{et (368)} \\ &\text{B} = \tfrac{1}{2}\, (\text{A} + \text{B}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\, (\text{A} - \text{B}) \end{aligned}$$

Trouver le troisième côté c.

$$\text{Sin. B} : \text{sin. C} :: \text{sin. } a : \text{sin. } c\text{; d'où sin. } c = \text{sin } a \times \frac{\text{sin. C}}{\text{sin. B}}.$$

IV

Etant donnés deux angles A et B et le côté c compris entre eux.

Trouver les deux autres côtés a et b.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tang. } \frac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \frac{1}{2} c \times \dfrac{\text{cos. } \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{cos. } \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})} \\[2ex] \text{Tang. } \frac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \frac{1}{2} c \times \dfrac{\text{sin. } \frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{sin. } \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}(a+b) \\ \quad + \frac{1}{2}(a-b) \\ \text{et } (\mathbf{368}) \\ b = \frac{1}{2}(a+b) \\ \quad - \frac{1}{2}(a-b) \end{array}$$

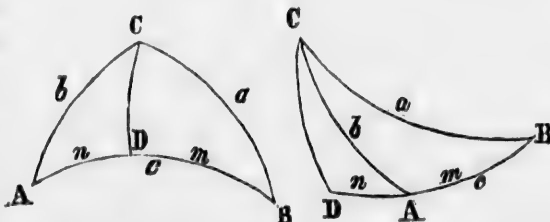
Trouver le troisième angle C.

$$\text{Sin. } a : \text{sin. } c :: \text{sin. A} : \text{sin. C; d'où, sin. C} = \text{sin. A} \times \frac{\text{sin. } c}{\text{sin. } a}.$$

(**1382**) Les deux autres cas, savoir : celui où on a les trois côtés donnés pour trouver les angles, et celui des trois angles pour trouver les côtés, se résoudent par la 1ère prop. (**1371**) de Napier. En effet :

V

Etant donnés les trois côtés a, b, c, pour trouver les angles A, B, C. Ayant laissé tomber



une perpendiculaire CD de l'un quelconque C des trois angles du triangle sur le côté opposé c prolongé s'il le faut, et appelant m et n les segments de la base compris entre chacun des angles A et B et la perpendiculaire CD ; on aura, quand la perpendiculaire tombe en dedans :

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}(m-n) = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) \times \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(m+n)}\text{; et}$$

(**368**) $m = \frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(m-n)$; c.-à-d. $m = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(m-n)$ puisque $m + n = c$; et $n = \frac{1}{2}(m+n) - \frac{1}{2}(m-n)$.

Mais quand la perpendiculaire tombe en dehors, on aura $\text{tang.}\,\frac{1}{2}(m+n) = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(a-b) \times \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(m-n)}$; et $m = \frac{1}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(m-n)$ c.-à-d. $m = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(m+n)$, puisque dans ce cas, $c = m - n$, et $n = m - c$.

Ayant trouvé m et n, les segments de la base, on fera (**1361**) tang. a : tang, m :: R : cos. B ; d'où, $\cos.\,B = R \times \frac{\text{tang.}\,m}{\text{tang.}\,b}$.

On aura maintenant les deux autres angles A et C en faisant sin. b : sin. c :: sin. B : sin. C, et sin. b : sin. a :: sin. B : sin. A.

2° On démontre aussi que R étant $= 1$ et $a+b+c = s$, on a

$$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{\sin.\,(\frac{1}{2}s-b) \times \sin.\,(\frac{1}{2}s-c)}}{\sqrt{\sin.\,b \times \sin.\,c}} ;$$

$$\text{ou, Cos.}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{\sin.\,\frac{1}{2}s \times \sin.\,(\frac{1}{2}s-a)}}{\sqrt{\sin.\,b \times \sin.\,c}}.$$

Quant A est très obtus, on se servira de la seconde formule qui donne le cosinus de $\frac{1}{2}$ A. Autrement, on préfèra la première formule pour des raisons analogues à celles déjà données au par. (**1301**) trig. rect.

Ces deux formules sont surtout avantageuses en ce qu'elles se prètent avec facilité au calcul par logarithmes.

VI

(**1383**) **Etant donnés les trois angles** A, B, C, pour trouver les côtés a, b, c; on retranchera respectivement de 180° chacun des arcs qui mesurent les angles donnés A, B, C; ces restes ou différences seront les côtés a', b', c', d'un triangle supplémentaire ou auxiliaire A′B′C′ dont on trouvera les angles, de la manière indiquée au dernier paragraphe; les arcs servant à mesurer ces angles seront (**1171**) les suppléments des côtés correspondants du triangle donné ABC; c.-à-d., l'arc servant de mesure a l'angle A′ du triangle auxiliaire A′B′C′, sera le supplément du côté a du triangle ABC; l'arc mesurant l'angle B′ sera le supplément du côté b; et l'arc servant de mesure à l'angle C′, sera le supplé-

ment du côté c. De là, donc, le moyen de résoudre le problème.

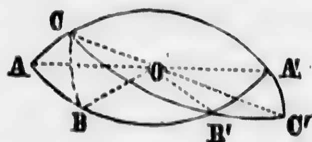
2° On a aussi, comme dans le dernier cas, R étant = 1, et $A + B + C = S$

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos. \tfrac{1}{2} S \times \cos. (\tfrac{1}{2} S - A)}}{\sqrt{\sin. B \times \sin. C}}$$

$$\text{ou, Cos.} \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos. (\tfrac{1}{2} S - B) \times \cos. (\tfrac{1}{2} S - C)}}{\sqrt{\sin. B \times \sin. C}}.$$

cette dernière étant préférable quand a est de près de 180°, c.-à-d. presque un demi-cercle.

(1384) **Sco.** Maintenant qu'on a démontré les rapports qui existent entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, c.-à-d. entre les sinus et autres lignes ou représentants trigonométriques de ces angles et côtés ; il y a lieu, de prouver d'une manière plus satisfaisante et peut-être plus légitime, le corollaire (1350) tiré de la prop. IV ; savoir : qu'**il peut exister deux triangles oblique-angles dont un côté et l'angle opposé de l'un soient égaux à un côté et à l'angle opposé de l'autre.** De fait, ayant prolongé ACA' d'une quantité A'C' = AC, et du point C' comme centre, avec un arc = BC, intersecté ABA' en B', joint C'B' et prolongé C'B' pour rencontrer ACA'; l'arc C'B' prolongé tombera en C, à cause de A'C'+A'C = A'C + AC et de CB'C'=180° ; or l'angle inclus B'A'C' = sup. de B'A'C, ou de son égal BAC, et comme



le sinus du supplément d'un angle est égal au sinus de cet angle, on a, (1366) sin. angle B'A'C' : sin. angle BAC :: sin. angle A'B'C' : sin. angle ABC ; d'où ABC = (1346) A'B'C' = (opposé au sommet) AB'C, et B'C = 180° — B'C' = sup. B'C' = sup. BC ; donc, etc.

(1385) **Sco.** Les connaissances acquises sur les relations entre les sinus des côtés et les sinus des angles des triangles sphériques, nous permettent aussi maintenant de simplifier

les expressions ayant trait à l'ambiguïté de solution des deux premiers cas (**1336**) du triangle sphérique ; car si l'on fait attention que le sinus du supplément d'un arc est égal au sinus de cet arc, on verra de suite que les huit formules des articles (**1344** et **1345**) où les données sont " deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux " peuvent se traduire ou se résumer en ces deux expressions ; savoir :

1° **Si le sinus du côté opposé à l'angle cherché, est moindre que le sinus de l'autre côté donné ; il n'y aura qu'UNE SOLUTION.**

2° **Si le sinus du côté opposé à l'angle cherché, est plus grand que le sinus de l'autre côté donné ; il y aura DEUX SOLUTIONS.**

Et les huit formules du par. (**1351**) où les données sont " deux angles et un côté opposé à l'un d'eux " ; se traduiront, faisant attention encore que le sinus du supplément d'un angle et égal au sinus de cet angle, comme suit :

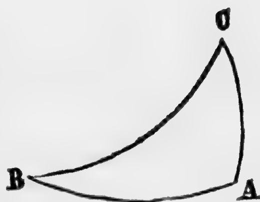
3° **Si le sinus de l'angle opposé au côté cherché, est moindre que le sinus de l'autre angle donné ; il n'y aura qu'UNE SOLUTION.**

4° **Si le sinus de l'angle opposé au côté cherché, est plus grand que le sinus de l'autre angle donné ; il y aura DEUX SOLUTIONS.**

DES PARTIES-CIRCULAIRES DE NAPIER.

(**1386**) La règle des **parties-circulaires**, inventée par Napier, est très utile en trigonométrie sphérique, en ce qu'elle réduit à deux, tous les théorèmes employés dans la solution des triangles rectangles. Ces théorèmes ne sont pas des propositions nouvelles, mais seulement des énoncés particuliers, lesquels à l'aide d'une classification et d'une disposition particulières des parties d'un triangle, comprennent, avec leurs corollaires, les cinq propositions qu'on a démontrées, articles (**1355**) à (**1365**) inclusivement. " Elles sont peut-être, dit Playfair, le plus heureux exemple de mémoire artificielle que l'on connaisse."

(1387) Déf. 1. Si dans un triangle sphérique ACB, rectangle en A, on met de côté l'angle droit A, pour ne considérer que les cinq parties restantes, savoir, les trois côtés et les deux angles obliques; alors les deux côtés AB, AC qui contiennent l'angle droit, et les compléments des trois autres parties, c.-à-d., le complément de l'angle B, le complément de l'hypoténuse BC et le complément de l'angle C sont appelés les **parties-circulaires**, parce que quand on les nomme dans l'ordre naturel de leur suite, elles font le tour du triangle.



(1388) Déf. 2. Lorsque, des cinq parties-circulaires, l'on en prend une quelconque pour **partie-du-milieu**; alors, des quatre parties restantes, les deux qui l'adjoignent imédiatement à droite et à gauche, sont appelées **parties-adjacentes** et les deux autres, séparées qu'elles le sont de la partie-du-milieu par une des parties adjacentes, sont appelées **parties-opposées**.

Ainsi, dans le triangle ACB, les parties-circulaires étant, par la 1ère déf., AB, AC, 90° — B, 90° — BC, et 90° — C; si l'on prend par exemple AC pour partie-du-milieu, AB et 90 — C, qui lui sont contigues à droite et à gauche, seront les parties-adjacentes, et 90° — B, 90 — BC seront les parties-opposées. De même, si AB est la partie-du-milieu, les parties-adjacentes seront AC, 90° — B, et 90° — BC, 90° — C seront les parties-opposées. Ou, si 90 — BC est la partie-du-milieu, on aura 90° — B et 90 — C pour parties-adjacentes, et AB, AC pour parties-opposées. Cela posé, la règle est comprise dans la suivante :

PROPOSITION.

(1389) **Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est à la tangente d'une des parties-adjacentes, comme la tangente de l'autre partie-adjacente, est au sinus de la**

partie-du-milieu ; ou, le rayon est au cosinus d'une des parties-opposées, comme le cosinus de l'autre partie-opposée est au sinus de la partie-du-milieu. Ce qui veut dire en d'autres termes (**86**) que **le rectangle formé du rayon et du sinus de la partie-du-milieu, est égal au rectangle des tangentes des parties-adjacentes ; ou, au rectangle des cosinus des parties-opposées.**



On prouve aisément la vérité des deux théorèmes compris dans cette proposition, en prenant successivement, pour partie-du-milieu, chacune des cinq parties-circulaires, et on trouvera que la prop. générale s'accorde avec quelqu'une des analogies déjà établies (**1355 à 1365**) ou contenues dans le tableau (**1307**) ayant trait à la résolution des divers cas du triangle rectangle. Ainsi, dans le triangle ACB, si l'on prend pour partie-du-milieu le complément 90°—BC de l'hypoténuse, les parties-adjacentes étant 90° — B et 90° — C, et AB, AC les parties-opposées ; la règle donne R × cos. BC = cot. B × cot. C ou (**88**) R : cot. B :: cot. C : cos. BC (**1361**). La règle donne aussi R × cos. BC = cos. AB × cos. AC ou (**1364**) R : cos. AB :: cos. AC : cos. BC.

(**1390**) Pour faire l'application de cette prop. générale à la résolution de l'un quelconque des cas du triangle sphérique rectangle ; considérez laquelle d'entre les parties données et la partie requise, vous devez prendre pour partie-du-milieu, de manière que les deux autres parties soient à distances égales de cette dernière, c.-à-d., toutes deux adjacentes ou toutes deux opposées ; alors l'un ou l'autre des deux théor. contenus dans l'énoncé de la prop. donnera la valeur de la partie requise.

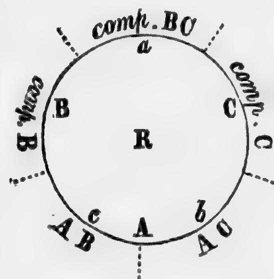
Par exemple, soient données AB et BC, pour trouver C ; il est clair que si l'on fait de AB la partie-du-milieu, BC et C seront les parties-opposées ; d'où, R × sin. AB = sin. C

$\times$ sin. BC, car sin. C $=$ cos. $(90° - \mathrm{C})$ et cos. $(90 - \mathrm{BC}) =$ sin. BC ; donc $\sin.\mathrm{C} = \frac{\sin.\mathrm{AB}}{\sin.\mathrm{BC}}$.

Soient encore données BC et C, pour trouver AC ; il est évident que C est moyenne entre les adjacentes AC et $(90° - \mathrm{BC})$; donc $\mathrm{R} \times \cos.\mathrm{C} = \mathrm{tang.AC} \times \cot.\mathrm{BC}$, ou $\mathrm{tang.AC} = \frac{\cos.\mathrm{C}}{\cot.\mathrm{BC}} = \cos.\mathrm{C} \times \mathrm{tang.BC}$, puisque comme on l'a vu (**1225**) $\frac{1}{\cot.\mathrm{BC}} = \mathrm{tang.BC}$, quand $\mathrm{R} = 1$.

On peut de la même manière résoudre tous les autres cas ; car il suffira toujours d'un ou de deux essais pour s'assurer de la partie à prendre pour milieu, et avec un peu de pratique on jugera sur le coup et sans essai préliminaire de la partie à prendre pour milieu.

(**1391**) Il n'est pas inutile de disposer les noms des cinq parties-circulaires, autour de la circonférence d'un cercle, à égales distances l'une de l'autre, et de cette manière on voit immédiatement par simple inspection de la fig. la partie-du-milieu.



Faisant successivement de chaque partie, la partie-du-milieu, on a, appelant (pour abréger) a le côté BC opposé à l'angle droit A, b le côté AC opposé à l'angle B, et c le côté AB opposé à l'angle C, les expressions suivantes : lesquelles, comme on le voit, comprennent tous les cas, car chacune d'elles contient les 5 parties du triangle, ou si l'on veut, les 6 parties, puisque R est le sinus de A.

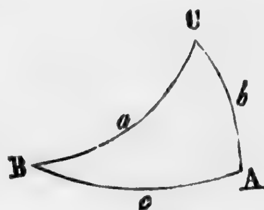
1 — $\mathrm{R} \times \cos.a = \cos.b \times \cos.c = \cot.\mathrm{B} \times \cot.\mathrm{C}$
2 — $\mathrm{R} \times \cos.\mathrm{B} = \cos.b \times \sin.\mathrm{C} = \cot.a \times \mathrm{tang}.c$
3 — $\mathrm{R} \times \cos.\mathrm{C} = \cos.c \times \sin.\mathrm{B} = \cot.a \times \mathrm{tang}.b$
4 — $\mathrm{R} \times \sin.b = \sin.\mathrm{B} \times \sin.a = \cot.\mathrm{C} \times \mathrm{tang}.c$
5 — $\mathrm{R} \times \sin.c = \sin.\mathrm{C} \times \sin.a = \cot.\mathrm{B} \times \mathrm{tang}.b$

Remarquant toujours que sin. B = sin. comp. B, sin. C = cos. comp. C, sin. a = cos. comp. a, et que de même tang. B = cot. comp. de B, cot. C = tang. comp. de C, et cot. a = tang. comp. de a.

A l'aide de ces 5 équations, on résoudra tous les cas ; car si les données sont par exemple C et a que l'on trouve de suite dans le produit, sin. a×sin. C, de la 5ème équation, on aura (**90**) sin. $c = \frac{\text{sin. } a \times \text{sin. C}}{\text{R}}$ ou si R = 1, alors sin. c = sin. a × sin. C ; avec B, c, on aura tang. $b = \frac{\text{R} \times \text{sin. } c}{\text{cot. B}} = \frac{\text{sin. } c}{\text{cot. B}}$ quand R = 1, et avec b, c, cot. B $= \frac{\text{R} \times \text{sin. } c}{\text{tang. } b} = \frac{\text{sin. } c}{\text{tang. } b}$. De même si les données sont a et c que l'on trouve dans le produit, cot. a×tang. c, de la 2ème équation ; on aura cos. B $= \frac{\text{cot. } a \times \text{tang. } c}{\text{R}}$. Il est clair aussi qu'avec a, c et C, on aurait cos. $b = \frac{\text{cot. } a \times \text{tang. } c}{\text{sin. C}}$, et avec a, b, c, sin. C $= \frac{\text{cot. } a \text{ tang. } c}{\text{cos. } b}$; et ainsi de suite. Le tableau (**1395**) servira à établir au besoin les affections des côtés et à indiquer les cas ambigus c'est-à-dire les cas où il y a deux solutions.

(**1392**) Voici maintenant les proportions que donnent les dix égalités ou équations ci-dessus, afin d'y renvoyer au besoin :

1......R : cos. b :: cos. c : cos. a (**1364**)
2......R : cos. b :: sin. C : cos. B (**1365**)
3......R : cos. c :: sin. B : cos. C (**1365**)
4......R : sin. B :: sin. a : sin. b (**1367**) ou (**1366**)
5......R : sin. C :: sin. a : sin. c (**1367**) ou (**1366**)
6......R : cot. B :: cot. C : cos. a (**1360**)
7......R : cot. a :: tang. c : cos. B (**1363**)
8......R : cot. a :: tang. b : cos. C (**1363**)
9......R : cot. C :: tang. c : sin. b (**1356**)
10......R : cot. B :: tang. b : sin. c (**1356**)

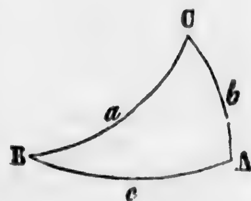


On voit par ces expressions que pour **déterminer la partie-du-milieu, il faut commencer la proportion par le rayon; et si c'est une des parties-opposées** (1 à 5) **ou une des parties-adjacentes** (6 à 10) **que l'on veut obtenir, on commencera la proportion par l'autre partie-opposée ou partie-adjacente, suivant le cas.** Ainsi, pour obtenir par exemple, l'angle B, on ferait (6) transp., cot. C : cos. a :: R : cot. B ou alt. cot. C : R :: cos. a : cot. B ; on aurait encore B, en faisant (10) tang. b : R :: sin. c : cot. B, ou (3) cos. c : cos. C :: R : sin. B, etc., suivant les données, et en se rappelant que quatre quantités proportionnelles, le sont encore par inversion (**93**), par alternation (**94**), et évidemment aussi par transposition ou inversion des deux rapports qui constituent la proportion.

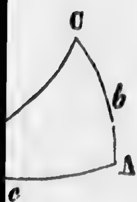
(**1393**) Remarquons encore ici que dans l'application des règles précédentes, comme de celles qui vont suivre, à la solution des triangles, on se facilitera sensiblement l'intelligence des opérations à faire, en observant seulement dans la désignation des côtés et des angles du triangle à résoudre, l'emploi des mêmes lettres capitales et italiques que celles qui se trouvent consignées ici, et en les disposant de la même manière ; c'est-à-dire, la lettre A au sommet de l'angle droit du triangle, avec les lettres B et C aux sommets des deux autres angles, et l'italique de même nom en regard au centre du côté opposé. Cette disposition permettra de choisir de suite d'entre les diverses propositions qu'on vient de donner, ou de trouver, par simple inspection du tableau suivant, la formule à employer, eu égard aux données et aux inconnues à derterminer.

(**1394**) Nous procédons maintenant à disposer sous forme de **tableau**, pour y renvoyer au besoin, les divers cas du triangle rectangle sphérique ; la première colonne indiquant, comme dans le cas analogue (**1307**) du triangle rectiligne, les choses données, la seconde, les choses requises, la troisième la proportion à établir pour les trouver, la quatrième

la proposition qui démontre ces rapports, la cinquième le No. pour y renvoyer ; remarquant, que quand R = 1, la division (÷(31) ou multiplication par R ne change pas la valeur du résultat.



	DONNÉS.	REQUIS.	Tableau pour la SOLUTION du triangle sphérique rectangle.	PREUVE.	No.
1er cas.	*a*	*b*	R : sin. *a* :: sin. B : sin. *b* = sin. *a* × sin. B	**1357** inv.	
	et	*c*	R : cos. B :: tang. *a* : tang. *c* = cos. B × tang. *a*	**1361** inv.	
	B	C	R : cos. *a* :: tang. B : cot. C = cos. *a* × tang. B	**1359** inv.	3
2eme cas.	*b*	*c*	R : sin. *b* :: tang. C : tang. *c* = sin. *b* × tang. C	**1355** inv.	4
	et	*a*	Cos. C : R :: tang. *b* : tang. *a* = tang. *b* ÷ cos. C	**1361**	5
	C	B	R : cos. *b* :: sin. C : cos. B = cos. *b* × sin. C	**1365** inv.	6
3eme cas.	*b*	*c*	Tang. B : tang. *b* :: R : sin. *c* = tang. *b* ÷ tang. B	**1355** inv. et transp	7
	et	*a*	Sin. B : sin. *b* :: R : sin. *a* = sin. *b* ÷ sin. B	**1357** inv. et transp.	8
	B	C	Cos. *b* : cos. B :: R : sin. C = cos. B ÷ cos. b	**1365** alt.	9
4eme cas.	*a*	c	Cos. b : cos. *a* :: R : cos. *c* = cos. *a* ÷ cos. *b*	**1364** alt.	10
	et	B	Sin. *a* : sin. *b* :: R : sin. B = sin. *b* ÷ sin. *a*	**1357** alt. et inv.	11
	b	C	Tang. *a* : tang. *b* :: R : cos. C = tang. *b* ÷ tang. *a*	**1361** inv. et transp.	12
5eme cas.	*b*	*a*	R : cos. *c* :: cos. *b* : cos. *a* = cos. *b* × cos. *c*	**1364** inv.	13
	et	B	Sin. *c* : R :: tang. *b* : tang. B = tang. *b* ÷ sin. c	**1355**	14
	c	C	Sin. *b* : R :: tang. *c* : tang. C = tang. *c* ÷ sin. *b*	**1355**	14
6eme cas.	B	*a*	Tang. B : cot. C :: R : cos. *c* = cot. C ÷ tang. B	**1359** inv. et transp.	51
	et	*b*	Sin. C : cos. B :: R : cos. *b* = cos. B ÷ sin. C	**1365** inv. et transp.	16
	C	*c*	Sin. B : cos. C :: R : cos. *c* = cos. C ÷ sin. B	**1365** inv. et transp.	16



(1395) Disposons de même, sous forme de **tableau**, les règles nécessaires pour déterminer, dans chacun des 16 cas ci-dessus, l'affection du côté ou de l'angle trouvé, et pour désigner les cas ou il y a ambiguïté, c'est-à-dire deux solutions du problème. Ajoutons aussi que cette mise-en-regard des deux tableaux, a ceci d'avantageux, qu'il suffit de passer horizontalement du premier au second, pour y découvrir d'un coup-d'œil l'affection voulue.

	AFFECTION.	PREUVE.	No.
1er cas.	b et B sont de même affection..................	**(1346)**	1
	Si $a<90°$, c et B sont de même affection.........	**(1347**, 7°)	2
	Si $a>90°$, c et B sont d'affection différente......	**(1347**, 8°)	
	Si $a<90°$, B et C sont de même affection........	**(1347**, 3°)	3
	Si $a>90°$, B et C sont d'affection différente......	**(1347**, 3°)	
2eme cas.	c et C sont de même affection..................	**(1346)**	4
	Si b et C sont de même affection, BC est $<90°$....	**(1347**, 5°)	5
	Si b et C sont d'affection différente, BC est $>90°$.	**(1347**, 6°)	
	B et b sont de même affection..........	**(1346)**	6
3eme cas.	Ambiguïté, ou, il y a deux solutions	**(1349)**	7
	Ambiguïté, " " deux solutions	**(1349)**	8
	Ambiguïté, " " deux solutions	**(1349)**	9
4eme cas.	Quand $a<90°$, b et c sont de même affection....	**(1347**, 2°)	10
	Quand $a>90°$, b et c sont d'affection différente..	**(1347**, 2°)	
	b et B sont de même affection..................	**(1346)**	11
	Quand $a<90°$, b et c sont de même affection	**(1347**, 7°)	12
	Quand $a>90°$, b et C sont d'affection différente ..	**(1347**, 8°)	
5eme cas.	Quand b et c sont de même affection, a est $<90°$.	**(1347)**	13
	Quand b et c sont d'affection différente, $a>90°$..	**(1347)**	
	B et b sont de même affection..................	**(1346)**	14
	C et c sont de même affection..................	**(1346)**	14
6eme cas.	Quand B et C sont de même affection, a est $<90°$.	**(1347**, 4°)	15
	Quand B et C sont d'affection différente, $a>90°$.	**(1347**, 4°)	
	b et B sont de même affection..................	**(1346)**	16
	c et C sont de même affection..................	**(1346)**	16

(**1396**) Donnons maintenant quelques exemples des divers cas, pour mieux faire comprende à l'élève tout le procédé à suivre pour résoudre le problème donné.

On a déjà dit que l'usage du complément arithmétique d'un logarithme, n'est pas essentiel ; mais on remarquera cependant que l'emploi de ce complément, rend l'opération plus concise, et réduit le tout (**1277**) à une simple addition. On donne néanmoins des exemples des deux manières de procéder, et dans certains cas aussi, le calcul par nombres naturels, afin que l'élève puisse juger par lui-même des avantages et désavantages relatifs de ces divers modes d'opérer, tant sous le rapport de l'exactitude comparative des résultats que sous celui de la somme de travail que requiert chacune de ces méthodes; comme d'ailleurs il a déjà pu s'en convaincre par les quelques exemples de solutions des triangles rectilignes, pages 504 et suivantes.

Ex. 1. Dans le triangle sphérique ACB rectangle en A, on donne $a = 64° 40'$ et $b = 42° 12'$, pour trouver le reste.

Soit à trouver d'abord le troisième côté c.

On a (**1394**, 10) cos. b : cos. a :: R : cos. c; ou (**1391**, 1) R× cos. a = cos. b × cos. c;

D'où,	cos. b 42° 12' ..... comp. arith. ...... log.	0.130296
Est à	cos. a 64° 40'	9.631326
Comme R	....	10.000000
Est à	cos. c 54° 43' 07" (affection **1395**, 10)	9.761622

Pour trouver l'angle B

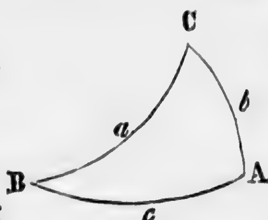
On a (**1394**, 11) sin. a : sin. b :: R : sin. B ; ou (**1391**, 4) R× sin. b = sin. a × sin. B ;

D'où,	sin. a 64° 40' ...... comp. arith. ...... log.	0.043911
Est à	sin. b 42° 12'	9.827189
Comme R	....	10.000000
Est à	sin. B 48° 00' 14" (aff. **1395**, 11)	9.871100

Pour trouver l'angle C.

On a (**1392**, 8) R : cot. a :: tang. b : cos. C ; ou (**1391**, 3) R × cos. C = cot. a × tang. b ;

D'où, R .... comp. arith. ...... log.	0.000000
Est à cot. a 64° 40′.	9.675237
Comme tang. b 42° 12′.....	9.957485
Est à cos. C 64° 34′ 46″ (aff. **1395**, 12)	9.632722



Ou (1394, 12)

Tang. a 64°40′comp. ar. log	9.675237
Est à tang. b 42° 12′.....	9.957485
Comme R..	10.000000
Est à cos. C 64° 34′ 46″ (ayant rejeté 20).......	9.632722

Ou, sans l'usage du comp. arith.

Tang. a 64° 40′..............	10.324763
Est à tang. b 42° 12′	9.957485
Comme R........	10.000000
Somme des log. cor. au prod., R × tang. b, =	19.957485
Est à cos. C 64° 34′ 46″..................................	9.632722

Ou, par sinus naturels.

Tang. nat. a, 64° 40′ = 2.11233 : tang. nat. b, 42°.12′ = .90674 :: R = 1.00000 : cos. C = $\frac{1.00000 \times .90674}{2.11233} = \frac{.90674}{2.11233}$ = .4292606 = cos. 64° 34° 46′ ; car

Cos. 64° 34′ = .4294606	2627 :	Cos. 64° 34′ = .4294606
Cos. 64° 35′ = .4291979	60″ ::	Cos. trouvé = .4292606
	2000 :	
Diff. pour 60″ = .0002627	46″	Différence .0002000

Ex. 2. Dans un triangle rectangle ACB, les données sont l'hypoténuse a = 105° 34′, et l'angle B = 80° 40′, pour trouver les autres parties.

Soit d'abord à trouver C.

On a (**1392**, 6) R : cot. B :: cot. C : cos. a ou (**1391**, 1) R $\times$ cos. a = cot. B $\times$ cot. C ;

D'où, cot. B 80° 40'	.... comp. ar. .... log.	0.784220
Est à cos. a 105° 34'	....	9.428717
Comme R	....	10.000000
Est à cot. C 148° 30' 54' (aff. **1395**, 3)	....	10.212937

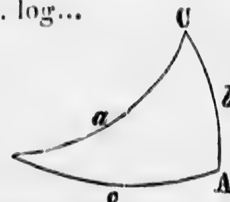
Ou (**1394**, 3)

R	.... comp. ar. .... log.	0.000000
: cos. a 105° 34'	....	9.428717
:: tang. B 80° 40'	....	10.784220
: cot. C 148° 30' 54"	....	10.212937

Pour trouver le côté c.

On a (**1392**, 7) R : cot. a :: tang. c : cos. B ; ou (**1391**, 2) R $\times$ cos. B = cot. a $\times$ tang. c ;

D'où, cot. a 105° 34' comp. ar. log...	0.555053
Est à R	10.000000
Comme cos. B 80° 40'	9.209992
Est à tang. c 149° 47' 36" (aff. **1395**, 2)....	9.765045



Pour trouver le côté b.

On a (**1394**, 1) R : sin. a :: sin. B : sin. b ; ou (**1392**, 4) R $\times$ sin. b = sin. a $\times$ sin. B ;

D'où, R	.... comp. ar. ...... log.	0.000000
Est. à sin. a 105° 34'	....	9.983770
Comme sin. B 80° 40'	....	9.994212
Est à sin. b 71° 54' 33" (aff. **1395**, 1)	....	9.977982

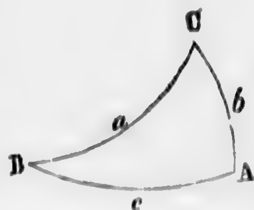
Ex. 3. Dans le triangle sphérique ACB, rectangle en A, soient donnés $a = 115° 25'$ et $c = 60° 59'$; trouver le reste.

Rép. B = 148° 56' 45", C = 75° 30' 33", b = 152° 13' 50"

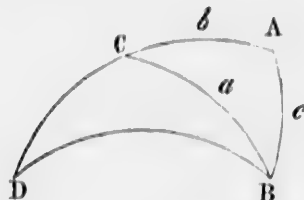
Ex. 4. Dans le triangle ACB, rectangle en a, on donne $c = 116° 30' 43''$, et $b = 29° 41' 32''$, pour déterminer les autres parties.

Rép. $C = 103° 52' 46''$, $B = 32° 30' 22''$, $a = 112° 48' 58''$.

SCOLIE.



(1397) Tout triangle sphérique ACB qui a un de ses côtés égal au quart-de-circonférence, peut se résoudre à la manière du triangle rectangle ; car soit $a = 90°$, si nous passons au triangle polaire ou supplémentaire A'C'B', on aura $A' = 180 - a = 90°$, $B' = 180 - b$, $C = 180 - c$, $a' = 180 - A$, $b' = 180 - B$, $c' = 180 - C$; d'où l'on voit que le triangle polaire sera rectangle en A ; donc on peut référer tout cas de cette espèce à celui du triangle rectangle.



Mais, on peut résoudre le problème, au moyen du triangle rect., d'une manière plus simple ; car soit BCD un triangle quelconque dans lequel $BD = 90°$; ayant prolongé DC jusqu'à ce que $AD = 90°$ et mené (**1155**) l'arc BA, D sera le pôle de BA, BA sera (**1160**) la mesure de l'angle D et (**1154**) les angles DBA, DAB seront droits. Or, avant de pouvoir résoudre le triangle BCD, il nous faut connaître, outre le côté BD, deux autres parties, et ces deux parties nous donneront en même temps deux parties du triangle rectangle BAC ; car le côté a est commun au triangle donné BCD et au triangle rectangle BAC, BCA = sup. BCD, AC = comp. DC, ABC = comp. DBC et BA = C. De là, les conditions qui nous permettent d'établir un de ces triangles, nous permettent aussi de déterminer l'autre.

Ex. 1. Dans le triangle BCD, soit $BD = 90°$, $D = 42° 12'$, $C = 115° 20'$.

On aura, dans le triangle rectangle BAC, $c = D = 42° 12'$, $BCA = 180 - BCD = 180° - 115° 20' = 64° 40'$.

Pour trouver le côté *a*.

On a (**1394**, 8) sin. C : sin. *c* :: R : sin. *a* ;

D'où, sin.	C 64° 40'	.... comp. ar. ...... log.	0.043911
Est à sin.	*c* 42° 12'	....	9.827189
Comme	R	....	10.000000
Est à sin.	*a* 48° 00' 14'' (aff. **1347**)	....	9.871100

Ou, ce qui est la même chose, puisque (**1391**, 5) $\sin. a = \frac{R \times \sin. c}{\sin. C}$;

Log. sin.	*c* 42° 12'	9.827189
Plus log.	R	10.000000
		19.827189
Moins log. sin. C 64° 40'	....	9.956089
= log. **sin.** *a* 48° 00' 14''	....	9.871100

Ou, par sinus naturels, quand R=1, sin. *a* étant (**1394**, 8)= $\frac{\sin. c}{\sin. C}$ ou = sin. *c* ÷ sin. C, on a sin. nat. *c*, 42° 12' = .6717206 et sin. nat. C, 64° 40' = .9038338 et $\frac{.6717206}{.9038338}$ ou .6717206 ÷ .9038338 = .7431904 ; la différence des sinus de 48° et 48° 1' pour 60'' = 1946 et la différence entre le sinus trouvé .7431904 et celui de 48°, .7431448, est de 451, et 1946 : 60'' :: 451 : 14'', ou plus exactement 13.9054''.

```
     451
      60
    ----
1946) 27060 (13.9054     .9038338) .67172060 (.7431904
      1946                          63268366
      ----                          --------
       7600                          3903694O
       5838                          36153352
      -----                         --------
      17620                          28835880
      17514                          27115014
      -----                         --------
```

10600	17208660
9830	9038338
7700	81703220
	81345042
	35817800

(**1398**) Les sinus nat., ici employés, vont à 7 décimales, pendant que ceux des tables de ce vol. ne vont, faute d'espace, qu'à 5 décimales ; d'ailleurs, on se procure aisément ces tables, et il est clair que plus il y aura décimales, plus aussi il y aura d'exactitude dans l'établissement des secondes et fractions de secondes.

Pour trouver l'angle B.

On a (**1391**, 3) R × cos. C = sin. B × cos. c ; d'où, sin. B = $\frac{\text{R} \times \text{cos. C}}{\text{cos. } c}$; et

Log. cos C 64° 40′	9.631326
Plus log. R	10.000000
Somme des log. corresp. au pro., R × cos. C, =	19.631326
Moins log. cos. c 42° 12′	9.869704
= log. sin. B 35° 16′ 53″ (aff. **1395**, 9)	9.761622

Pour trouver le côté b.

On a (**1391**, 4) R × sin. b = cot. C × tang. c ; d'où, sin. b = $\frac{\text{cot. C} \times \text{tang. } c}{\text{R}}$.

Log. cot. C 64° 40′	9.675237
Plus log. tang. c 42° 12′	9.957485
Somme des logs. corresp. au pro., cot.C×tang. c,=	19.632722
Moins log. R	10.000000
= log. sin. b 25° 25′ 14″ (aff. **1395**, 7)	9.632722

Donc, on a, dans le triangle donné BCD, CD = 90° − b = 90° − 25° 25′ 14″ = 64° 34′ 46″, DBC = 90° − ABC = 90° − 35° 16′ 53″ = 54° 43′ 07″, et BC = a = 48° 00′ 15″.

Ex. 2. On a dans un triangle, un côté = 90°, un des côtés adjacents = 115° 09′, et l'angle inclus 115° 55′ ; trouver le reste.

Rép. le 3ème côté = 113° 18′ 19″, les angles 117° 33′ 52″ et 101° 40′ 07″.

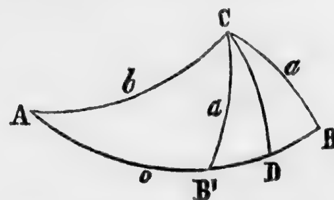
(**1399**) Nous passons maintenant à la considération des six (**1336**) cas de triangles oblique-angles, nous rappelant toujours, à part ce qui a déjà été dit sur les affections des côtés et les cas ambigus, que, pour éviter toute fausse solution :

1° Tout angle et tout côté d'un triangle sphérique est moindre que 180°. 2° Le plus grand angle est opposé au plus grand côté, et le moindre angle opposé au plus petit côté, et réciproquement.

1er Cas.

(**1400**) **Deux côtés** BC, AC, ou *a* et *b*, **et un angle** B **opposé à l'un d'eux,** AC, **étant donnés.**

Trouver l'angle A opposé à l'autre côté donné BC.



Ex. 1. Soit $b = 84° 14' 29''$, $a = 44° 13' 45''$ et $A = 82° 26' 07''$.

On a (**1366**) sin. a : sin. A :: sin. b : sin. B ;

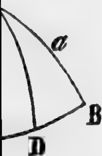
D'où, sin.	a 44° 13′ 45″ .... comp. ar. .... log.	0.156437
Est à sin.	A 32° 26′ 07″	9.729445
Comme sin.	b 84° 14′ 29″	9.997803
Est à sin.	B 49° 54′ 38″ ou (**1385**, 2°) sin. B = 130° 5′ 22″	9.883685

Ici il y a deux solutions, puisque le sinus du côté opposé

à l'angle cherché est plus grand que le sinus de l'autre côté donné, et l'ambiguïté ne peut disparaître, qu'à la condition de savoir si A est aigu ou obtus.

Maintenant, soit à trouver l'angle ACB et la base AB, et par conséquent aussi l'angle ACB′, et la base AB′, puisqu'il y a deux solutions. A cet effet, menez la perpendiculaire CD à la base AB, (car il est clair que la condition même des deux solutions BC′ = BC, l'une de chaque côté de la perpendiculaire CD, veut que la perpendiculaire tombe en dedans du triangle ACB) ce qui divisera le triangle donné en deux triangles rectangles ACD, BCD, dans chacun desquels on a l'angle A, B, à la base, et l'hypoténuse *a*, *b*.

a Et en général, quand on se propose de résoudre le triangle oblique-angle, à l'aide du triangle rectangle, **il faut mener la perpendiculaire CD de manière qu'elle passe par l'extrémité C d'un côté donné AC ou BC et qu'elle soit opposée à un angle donné A ou B.**



Pour trouver l'angle C du triangle rectangle ADC.

On a (**1394**, 3)	R	.... comp. ar.	log.	0.000000
Est à cos.	*b*	84° 14′ 29″	....	9.001465
Comme tang.	A	32° 26′ 07″	....	9.803105
Est à cot.	ACD	86° 21′ 06″	....	8.804570

Pour trouver l'angle C du triangle rectangle ADC.

On a (**1394**, 3)	R	.... comp. ar.	log.	0.000000
Est à cos.	*a*	44° 13′ 45″	....	9.855250
Comme tang.	B	49° 54′ 38″	....	0.074810
Est à cot.	BCD	49° 35′ 38″	....	9.930060

Maintenant, il est clair (**1342**) à cause de CD perpendiculaire sur AB et de B′C = BC, qu'on a aussi B′D = BD ; et comme CD est commun, les triangles rectangles B′DC, BDC sont symétriques et (**1174**) égaux ; donc l'angle B′CD = BCD. D'ailleurs, les parties égales B′C, BC et B = B′=sup. AB′C, donnent encore R : cos. *a* (B′C) :: tang. B′ : cot. B′CD,

et par conséquent B′CD =BCD, puisque (**1347**, 2) quand B′C = BC on a B′D, BD chacun de même affection que le côté commun CD, et par conséquent (**68 Ax.**) de même affection entre elles ; donc, ACB = ACD + BCD et ACB′= ACD − B′CD ; c.-à-d., ACB = 86° 21′ 06″ + 49° 35′ 38″ = 135° 56′ 44″, et ACB′ = 86° 21′ 06″ — 49° 35′ 38″=36° 45′ 28″.

Pour trouver le côté AB.

Sin.	A	32° 26′ 07″ .... comp. ar. log.	0.270555
Est à sin.	C	135° 56′ 44″..................	9.842198
Comme sin. *a*		44° 13′ 45″	9.843563
Est à sin. *c* ou AB		115° 16′ 11″ ou sup. 64° 43′ 49″	9.956316

Mais, de ces deux valeurs qui correspondent au sinus de AB, la moindre 64° 43′ 49″ ne peut répondre au problème, puisqu'il est nécessaire (**1182**) que le côté AB opposé au plus grand angle C, soit plus grand que le côté *a*, 84° 14′ 29″ opposé à un moindre angle A = 49° 54′ 38″ ; donc 115° 16′ 11″, supplément de 64° 43′ 49″, est la valeur qu'il faut prendre.

Pour trouver AB′, on fera

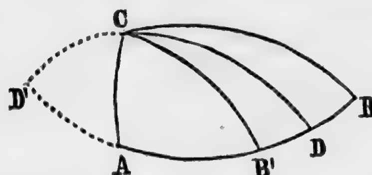
Sin. A : sin. B′C :: sin. ACB′ : sin. AB′, ou sans chercher d'abord ACB′, on fera (**1394**, 2) R : cos. A :: tang. AC : tang. AD, puis (**1368**) cos. AC : cos. B′C :: cos. AD : cos. B′D ; ou, on trouverait encore AB et AB′, en cherchant d'abord AD et BD dans les triangles rectangles ADC, BDC, pour avoir AB = AD + BD et AB′ = AD − B′D.

Ex. 2. On donne *a* = 91° 03′ 25″, *b* = 40° 36′ 37′ et B = 35° 57′ 15″ ; on demande les autres parties, l'angle A étant obtus.

Rép. A = 115° 35′ 41″, C = 58° 30′ 57″, *c* = 70° 58′ 52″.

(**1401**) Si, dans le cas (**1385**) des deux solutions, l'angle donné A est obtus, on fera attention seulement de ne pas confondre la perpendiculaire CD avec son prolongement CD′

qui tombe en dehors du triangle. Il est clair, alors qu'après avoir déterminé, comme auparavant, l'autre angle B à la base, puis, dans les triangles rectangles ACD, BCD = B′CD, les angles de même nom, et les bases



AD, BD = B′D, on aura l'angle ACB = ACD + BCD et ACB′ = ACD − B′CD, et de même on aura AB = AD + BD, et AB′ = AD − B′D, comme auparavant. On arriverait néanmoins au même résultat, à l'aide des triangles ACD′ BCD′, et comme on aurait D′D = 180°, on trouverait B′D = BD = 180° − B′D′, etc. (2ème cas) Si la perpendiculaire CD tombe en dehors du triangle, ce qui aura évidemment lieu si A est obtus, on aura ACB = BCD − ACD et ACB′ = B′CD−ACD ; et AB = BD − AD ou AB′ = B′D − AD, etc.

2ème Cas.

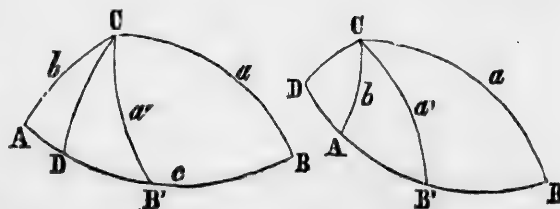
(**1402**) **Deux angles**, A et B, **donnés et un côté**, AC ou b, **opposé à l'un deux.**

Trouver le côté BC ou a opposé à l'autre angle donné.

Ex. 1. Dans le triangle ABC soit A = 58° 8′, B = 50° 12′ et b = 62° 42′. On a (**1366**).

Sin.	B	50° 12′ .... comp. ar. .... log.	0.114478
Est à sin.	A	58° 8′	9.929050
Comme sin.	b	62° 42′	9.948715
Est à sin	a	79° 12′ 10″, ou (**1385**, 4°) 100° 47′ 50″	9.992243

Ici il y a deux solutions ou réponses au problème, ABC et AB′C car le sinus



de l'angle A opposé au côté cherché BC est plus grand que le sinus de B opposé au côté donné, et l'ambiguité ne cessera d'exister que quand on saura si BC est $>$ ou $<$ 90°.

Supposons d'abord que a soit $> 90°$, c.-à-d., $= 100° 47' 50''$. Ayant mené la perpendiculaire CD, on aura, comme dans le dernier cas, deux triangles rectangles ADC, BDC dans chacun desquels on a l'hypoténuse b, a, et un angle A, B, pour trouver, comme auparavant, l'angle ACD, l'angle BCD et les segments AD, BD de la base.

Ce qui donnera ACB ou C = ACD + BCD = 156° 15′ 06″

On aura de même AB ou c = AD + BD = 152° 14′ 18″

En second lieu, prenant $a' < 90°$ c.-à-d. = 79° 12′ 10″, on calculera le triangle rectangle B′DC dans lequel on a B′C = 79° 12′ 10″ et l'angle B′ = B = 58° 08′, pour trouver B′CD et le côté B′D, ce qui donnera alors ACB′ = ACD + B′CD = 130° 54′ 28″ et c ou (AD + B′D) = 119° 03′ 26″.

Il est clair aussi qu'après avoir trouvé l'angle ACB, on aurait AB en faisant sin. A : sin. BC :: sin. ACB : sin. AB, et de même, ayant trouvé ACB′ = ACD + B′CD, on trouverait AB′ en faisant sin. A : sin. B′C :: sin. ACB′ : sin. AB′.

Mais sans chercher ACB, on aura (**1394**, 2) R : cos. B :: tang. BC : tang. BD, puis (**1369**) tang. A : tang. B :: sin. BD : sin. AD.

Si la perpendiculaire tombe en dehors, il est clair qu'on aura l'angle ACB = BCD — ACD, ACB′ = B′CD — ACD, AB = BD — AD, et AB′ = B′D — AD.

Ex. 2. Dans un triangle sphérique ABC, on donne A = 103° 59′ 57″, B = 46° 18′ 7″ et a = 42° 8′ 48″ pour trouver le reste. Il n'y aura (**1385**, 3°) qu'une solution, puisque sin. B < sin. A. **Rép.** b=30°, C=36° 7′ 54″, c=24° 3′ 56″.

3ème Cas.

(1403) Dans un triangle sphérique ABC on a deux côtés et l'angle inclus pour trouver le reste.

Les analogies de Napier (**1380** et **1381**, 3°) nous fournissent le moyen de déterminer la demi-somme et la demi-différence des angles à la base ; savoir :

$$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) : \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) :: \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\,C : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) : \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) :: \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\,C : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)$$

A l'aide de cette demi-somme et de cette demi-différence des angles à la base, on aura (**368**) les angles eux-mêmes, en ajoutant à la demi-somme la demi-différence, pour avoir le plus grand angle, et en soustrayant de la demi-somme la demi-différence, pour avoir le plus petit angle, et l'on placera alors le plus grand angle (**1182**) vis-à-vis du plus grand côté et le plus petit angle vis-à-vis du plus petit côté.

Ex. 1. Dans un triangle sphérique ABC, on donne $a =$ 68° 46′ 02″, $b =$ 37° 10′, et C = 39° 23′ ; trouver le reste.

$\tfrac{1}{2}(a+b) = 52°\ 58'\ 1''$, $\tfrac{1}{2}(a-b) = 15°\ 48'\ 1''$, $\tfrac{1}{2}\,C = 19°\ 41'\ 30''$

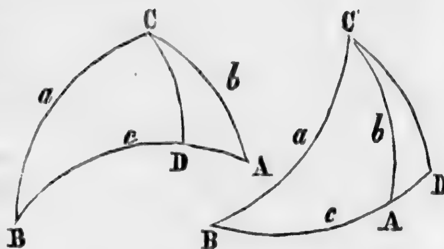
Cos. $\tfrac{1}{2}(a+b)$	52° 58′ 01″	.... comp. ar. log.	0.220210
Est à cos. $\tfrac{1}{2}(a-b)$	15° 48′ 01″	....	9.983271
Comme cot. $\tfrac{1}{2}$ C	19° 41′ 30″	....	10.446254
Est à tang. $\tfrac{1}{2}$ (A+B)	77° 22′ 25″	....	10.649735

Sin. $\tfrac{1}{2}(a+b)$	52° 58′ 1″	.... comp. ar....	0.097840
Est à sin. $\tfrac{1}{2}(a-b)$	15° 48′ 1″	....	9.435016
Comme cot. $\tfrac{1}{2}$ C	19° 41′ 30″	....	10.446254
Est à tang. $\tfrac{1}{2}$ (A—B)	43° 37′ 21″	....	9.979110

De là, A = 77° 22′ 25″ + 43° 37′ 21″ = 120° 59′ 46″
et B = 77° 22′ 25″ + 43° 37′ 21″ = 33° 45′ 04″
et sin. A : sin. C :: sin. a : sin. c = 43° 37′ 37″

Ou sans l'usage du complément arith., on ajoutera ensemble les logarithmes des second et troisième termes, pour soustraire de leur somme le log. du 1er terme ; le reste sera le logarithme du 4ème terme.

Autrement.



(**1404**) Les données étant, par exemple, l'angle A et les côtés AB, AC, de l'un quelconque C des angles non donnés, menez CD perpendiculaire au côté opposé, et vous aurez (**1394**, 2) R : cos. A :: tang. AC : tang. AD ; d'où, BD est connue, étant = AB − AD ou à AB + AD, suivant que la perpendiculaire CD tombe en dedans ou en dehors du triangle, c.-à-d., suivant que A est aigu ou obtus. Maintenant on a (**1368**) cos. AD : cos. BD :: cos. AC : cos BC et (**1342**, 2°) suivant que les segments AD, BD seront de même ou de différente affection, les côtés AC, AB seront aussi de même ou de différente affection ; le moindre segment AD de la base, étant (**1352**) adjacent au moindre ou au plus grand des deux côtés a et b, suivant que la somme de ces côtés est, ou non, moindre qu'un demi-cercle.

Ayant trouvé AB, on fera sin. a : sin. A :: sin. b : sin. B :: sin. c : sin. C.

Pour trouver l'un B des angles inconnus, on fera, après avoir trouvé les segments de la base, sin. BD : sin. AD :: tang. A : tang. B (**1369**).

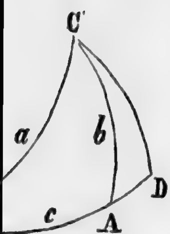
Ex. 2. On donne $b = 83° \, 19' \, 42''$, $c = 23° \, 27' \, 46''$, l'angle inclus $A = 20° \, 39'' \, 48'$. On obtient $B = 156° \, 30' \, 16''$, $C = 9° \, 11' \, 48''$, $a = 61° \, 32' \, 12''$.

4ème Cas.

(**1405**) **Etant donnés deux angles d'un triangle sphérique et le côté inclus ; trouver le reste.**

Les analogies de Napier donnent :

Cos. $\frac{1}{2}$ (A + B) : cos. $\frac{1}{2}$ (A − B) :: tang. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}$ $(a + b)$
Sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) : sin. $\frac{1}{2}$ (A − B) :: tang. $\frac{1}{2}$ c : tang. $\frac{1}{2}$ $(a - b)$
d'où on obtient a et b (**368**) comme dans le dernier cas.

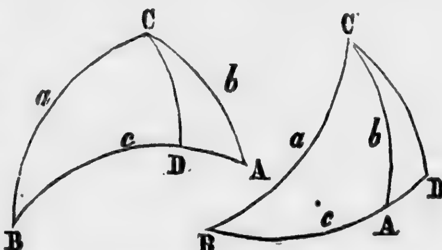


Ex. 1. Dans un triangle sphérique ABC, on donne A = 81° 38′ 20″, B = 70° 9′ 38″, c = 59° 16′ 23″ ; trouver le reste·
$\frac{1}{2}$(A+B)=75° 53′ 59″, $\frac{1}{2}$(A−B)=5° 44° 21′, $\frac{1}{2}c$=29° 38′ 11″

Log. cos. $\frac{1}{2}$ (A − B) 5° 44′ 21″	9.997818
+ log. tang. $\frac{1}{2}c$ 29° 38′ 11″	9.755051
= log. (cos. $\frac{1}{2}$ (A − B) × tang. $\frac{1}{2}c$)....................	19.752869
Moins log. cos. $\frac{1}{2}$ (A + B) 75° 53′ 59″....................	9.386713
= log. tang. $\frac{1}{2}(a + b)$ 66° 42′ 52″....................	10.366156
Log. sin. $\frac{1}{2}$ (A—B) 5° 44′ 21″....................	9.000000
+ log. tang. $\frac{1}{2}c$ 29° 38′ 11″....................	9.755051
= log. (sin. $\frac{1}{2}$ (A − B) × tang. $\frac{1}{2}c$)....................	18.755051
Moins log. sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) 75° 53′ 59″	9.986714
= log. tang. $\frac{1}{2}(a - b)$ 3° 21′ 25″....................	8.768337

De là, a = 66° 42′ 52″ + 3° 21′ 25″ = 70° 04′ 17″
b = 66° 42′ 52″ − 3° 21′ 25″ = 63° 21′ 27″
l'angle C = 64° 46′ 33″

(1406) **Autrement,** A et ACB étant les deux angles donnés et AC le côté donné (ce n'est que pour les adapter à la figure que nous changeons les données). On mènera de l'angle inconnu C une perpendiculaire CD ; on fera (**1394**, 3) R : cos. AC :: tang. A : cot. ACD ; d'où, on a BCD = ACB − ACD



si la perpendiculaire tombe en dedans, c.-à-d., quand A est aigu, et on a BCD = ACD + ACB quand la perpendiculaire tombe en dehors, ce qui arrive quand A est obtus. Maintenant on fait (**1367**) sin. ACD : sin. BCD :: cos. A : cos. B.

Ayant trouvé B, l'on fera sin. C : Sin. c :: sin. A : sin. a :: sin. B : sin. b, ou si l'on veut trouver l'un, BC, des deux

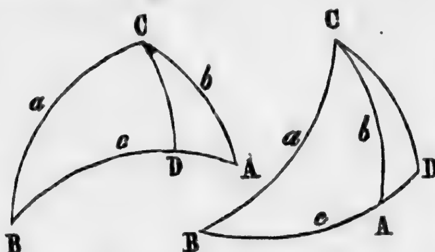
côtés, sans trouver le troisième angle B, on fera tomber la perpendiculaire CD, de l'extrémité de AC adjacent à BC, pour faire (**1394**, 3) R : cos. AC :: tang. A : cot. ACD, d'où on connaît BCD, puis (**1370**) cos. BCD : cos. ACD :: tang. AC : tang. BC, BC étant (**1342**, 3) > ou < 90°, suivant que les angles A et BCD sont de même ou de différente affection.

Ex. 2. Dans un triangle sphérique ABC, on a A = 34° 15′ 03″, B = 42° 15′ 13″, et c = 76° 35′ 36″. On obtient a = 40° 0′ 10″, b = 50° 10′ 30″, C = 121° 36′ 19″.

5ème Cas.

(1407) Etant donnés les trois côtés d'un triangle sphérique ; trouver les angles.

Soit à trouver l'angle A.



Menez, de l'un ou de l'autre, C, des deux angles non requis, la perpendiculaire CD, laquelle tombera en dedans du triangle, si A est aigu, et en dehors si A est obtus ; or, cette condition là même sera déterminée (**1373**) par le résultat de la règle " tang. ½ AB : tang. ½ (BC+AC) :: tang. ½ (BC—AC) : tang. ½ (BD—AD) ou tang. ½ (BD + AD) suivant que AB est moindre ou plus grand que BD. Donc réciproquement, si le quatrième terme (tang. ½ x) de la proportion est < AB ou quand CD tombe en dedans, on aura BD = AB — AD, et si x > AB, on aura BD = AB+AD.

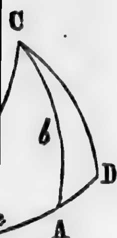
Ex. 1. Soit b = 56° 40′, a = 83° 13′, c = 114° 30′, on fera

Tang. ½ AB ou c, c.-à-d. ½ (114° 30′) ou 57° 15′ comp. ar. log........................	9.8083606
Est à tang. ½ (BC + AC) ou $(a+b)$ ½ (139° 53′) ou 69° 56′ 30″........................	10.4375600
Comme tang. ½ (BC — AC) ou $(a-b)$ ½ (26° 33′,) = 13° 16′ 30″........................	9.3727818
Est a tang. ½ x, c.-à-d. (BD+ AD) ou (BD — AD) suivant le cas, 22° 34′ 08.5″.........	9.6187024

Or, $x = 22° 34' 08.5''$ et $2x = 45° 08' 17''$, et comme 45° 08′ 17″ est moindre que AB, on aura BD = AB − AD; mais BD = ½ AB + ½ (BD − AD) = 57° 15′ + 22° 34′ 08.5″ = 79° 49′ 8.5″, et AD = AB − BD = 114° 30′ − 79° 49′ 08.5″ = 34° 40′ 51.5″.

Il reste à voir de quel côté de la perpendiculaire CD, se trouve le moindre segment de la base; or cette connaissance nous est acquise (**1352**), le moindre segment étant AD adjacent au moindre côté AC, lorsque, comme dans le cas actuel, la somme des côtés a et b est moindre qu'un demi-cercle.

On a maintenant dans le triangle ADC, rectangle en D, le côté AD, et l'hypoténuse AC, pour trouver (**1394**, 12) l'angle requis A.



Soit, tang. AC 56° 40′ .... comp. ar.	9.8180347
Est à tang. AD 34° 40′ 51.5″	9.8400706
Comme R	10.0000000
Est à cos. A 62° 55′ 43.44″	9.6581053

Pour trouver les autres angles, on fera

2° Sin. a : sin. A :: sin. b : sin. B = 48° 31′ 15.188″.

Pour trouver le logarithme du sinus de A = 62° 55′ 43.44″, la table donne pour log. sin. 62° 55 = 9.9495585 et pour différence de 1′ ou 60″ = 647; on fait la proportion

60″ : 647 :: 43.44″ : 468

```
      647
    -----
    30408
   17376
  26064
  -------
60) 2810568 (468
    240
    ---
     410
     360
     ---
     500
```

1118 : 283 :: 60″ : 151.88″

```
        60
      -----
1118) 16980 (
      1118
      ----
       5800
       5590
       ----
        2100
        1118
        ----
         9820
         8944
         ----
          8764
```

Log. sin. 62° 55′ 9.9495585
\+ différence pour 43.44″ 468

Log. sin. A 62° 55′ 43.44″ 9.9496053
\+ log. sin. *b* 56° 40′..................................... 9.9219401

Somme....... 19.8715454
— log. sin. *a* 83° 13′.................................... 9.9969492

= log. sin. B 9.8745962
— log. moindre 48° 31′.................................... 9.8745679

= différence pour les secondes............... 283
Dif. pour 60″ = ... 1118
dif. 283 = 15.188″ (voyez, plus haut, la prop.)
donc, B = 48° 31′ 15.188″ = log. 9.8745962

3° Sin. *a* : sin. A :: sin. *c* : sin. C = 125° 18′ 56.581″.

Pour trouver le nombre de secondes qui correspond à la différence 51 entre le log. trouvé et le log. moindre suivant

895 : 60″ :: 51 : 3.419″

Log. sin. A 62° 55′ 43.44″ 9.9496053
\+ log. sin. *c* 114° 30′ ou 65° 30′ 9.9590299
Somme..... 19.9086282
— log. sin. *a* 83° 13′ 9.9969492
= log. sin. C 9.9116790
— log. moindre 54° 41′ 9.9116739
= Différence pour les secondes............... 51
Dif. pour 60″ 859
Dif. 51 = 34.19″; (voyez, plus haut, la prop.)
donc, C = 54° 41′ 03.419″ = log 9.9116790
Sup. C = 125° 18′ 56.581″.

4° **Autrement.** On trouverait aussi l'un quelconque B des trois angles du triangle donné par la formule (**1382**, 2°)

$$\sin.\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{\sin.(\tfrac{1}{2}s - a) \times \sin.(\tfrac{1}{2}s - c)}}{\sqrt{\sin.a \times \sin.c}}$$

$\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}\,254°\,23' = 127°\,11'\,30''$

$(\frac{1}{2}s - a) = 127°\,11'\,30'' - 83°\,13' = 43°\,58'\,30''$

$(\frac{1}{2}s - c) = 127°\,11'\,30'' - 114°\,30' = 12°\,41'\,30''$

Log. sin. $(\frac{1}{2}s-a)$ 43° 58′ 30″	9.8415749
+ log. sin. $(\frac{1}{2}s-c)$ 12° 41′ 30″	9.3418385
= log. (sin. $(\frac{1}{2}s-a)\times$ sin. $(\frac{1}{2}s-c)$)........2)	19.1834134
÷ 2, = log. $\sqrt{\sin.(\frac{1}{2}s-a)\times\sin.(\frac{1}{2}s-c)}$	9.5917067
Moins $\frac{1}{2}$ { log. sin. a 83° 13′ = 9.9969492 ; + log. sin. c 114° 30′ = 9.9590229 }	
= log. $\sqrt{\sin. a\times\sin. c}$..............	9.9779860
= log. sin. $\frac{1}{2}$ B = 24° 15′ 37.682″ ;	9.6137207

d'où, B = 48° 31′ 15.364″

Le 10 qu'on emprunte ici, pour que la soustraction puisse se faire, est précisément la valeur, c'est-à-dire, le log. de R qu'on a négligé dans la formule, la valeur de R étant supposée = 1. En procédant par nombres naturels on peut le négliger, mais dans le calcul par logarithmes il faut le faire entrer en compte.

5° **Ou par la formule** $\cos.\frac{1}{2}B=\dfrac{\sqrt{\sin.\frac{1}{2}s\times\sin.(\frac{1}{2}s-b)}}{\sqrt{\sin. a\times\sin. c.}}$

(**1382,** 2°) Et par complément arith.

log. sin. $\frac{1}{2}s$ 127° 11′ 30″ ou sup. 52° 48′ 30″	9.901250 05
+ log. sin. $(\frac{1}{2}s-b)$ 70° 31′ 30″	9.974413 65
— log. sin. a 83° 13′ .. comp. ar.	0.003050 80
— log. sin. c 114° 30′ (sup.=65° 30′) comp. ar.	0.040977 10
Somme..........	19.919691 60
Demi-somme=log. cos. $\frac{1}{2}$ B=24° 15′ 37.645″	9.959845 80

D'où, B=48° 31′ 15.290″

6° **Ou sans l'usage du complément arith.**

log. sin. $\frac{1}{2}s$ 127° 11′ 30″ ou sup. 52° 48′ 30″	9.901250 05
+ log. sin. $(\frac{1}{2}s-b)$ 70° 31′ 30″	9.974413 65
= log. (sin. $\frac{1}{2}s\times$ sin. $(\frac{1}{2}s-b)$	19.875663 70
÷ 2, = log. $\sqrt{\sin.\frac{1}{2}s\times\sin.(\frac{1}{2}s-b)}$	9.937831 85
Moins $\frac{1}{2}$ { log. sin. a 83° 13′=9.9969492 ; + log. sin. c 114° 30′=9.9950229 }	
= log. $\sqrt{\sin. a\times\sin. c}$ = ...	9.977986 00
= log. cos. $\frac{1}{2}$ B = 24° 15′ 37.645″	9.959845 85

D'où B = 48° 31′ 15.290″

(1408) L'élève n'oubliera pas que les différences entre les résultats obtenus de trois manières différentes, pour l'angle B, savoir 48° 31′ 15.188″, 48° 31′ 15.364″, et 48° 31′ 15.290″ est due en partie à l'inexactitude partielle du dernier chiffre décimal des logarithmes et aussi en partie à la manière non rigoureusement correcte d'obtenir les secondes par les différences entre les logarithmes, et réciproquement les différences des logarithmes par les secondes. Mais ces différences, comme on le voit, ne s'étendent qu'aux décimales de secondes que l'on peut souvent négliger tout-à-fait excepté dans les cas d'une extrême précision.

Ex. 2. On a $a = 40° 18' 29''$, $b = 67° 14' 28''$, $c = 89° 47' 6''$. On obtient A = 34° 22′ 16″, B = 53° 35′ 16″, C = 119° 13′ 32″.

6ème Cas.

(1409) Etant donnés les trois angles A,B,C, d'un triangle sphérique quelconque ; trouver les trois côtés.

A cet effet, l'on procédera, indifféremment, soit à la manière du par. (**1383**) ou par la formule (**1383, 2°**) qui donne, par exemple, le cosinus de la moitié de l'un quelconque des trois côtés, pour trouver ensuite les deux autres côtés, par la même formule, ou par les rapports entre les sinus des côtés et les sinus des angles.

Ex. 1. Dans un triangle sphérique ABC, on donne A = 48° 30′, B = 125° 20′, C = 62° 54′ ; soit a trouver le côté a.

On fera $\cos. \frac{1}{2} a = R \dfrac{\sqrt{\cos. (\frac{1}{2} S - B) \times \cos. (\frac{1}{2} S - C)}}{\sqrt{\sin. B \times \sin. C}}$

$\frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2}(48° 30' + 125° 20' + 62° 54') = 118° 22'$

$(\frac{1}{2} S - A) = 118° 22' - 48° 30' =$	69° 52′
$(\frac{1}{2} S - B) = 118° 22' - 125° 20' =$ .... —	6° 58′
$(\frac{1}{2} S - C) = 118° 22' - 62° 54' =$	55° 28′
log. cos. $(\frac{1}{2} S - B)$ — 6° 58′	9.9967817
+ log. cos. $(\frac{1}{2} S - C)$ 55° 28′	9.7534954
= log. $[\cos. (\frac{1}{2} S - B) \times \cos. (\frac{1}{2} S - C)]$..	19.7502771
÷ 2, = log. $\sqrt{\cos. (\frac{1}{2} S - B) \times \cos. (\frac{1}{2} S - C)}$ ..	9.8751385
+ log. R	10.0000000

$= \log.\ (R\sqrt{\cos.\ (\frac{1}{2}S - B) \times \cos.\ (\frac{1}{2}S - C)})$ .. 19.8751385

Moins $\frac{1}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \log.\sin.\ B\ 125^\circ\ 20' = 9.9115844 \\ +\log.\sin.\ C\ \ 62^\circ\ 54' = 9.9494938 \end{array} \right\}$ ————

$= \log.\sqrt{\sin.\ B \times \sin.C} =$ 9.9305391

————

$= \log.\ \cos.\ \frac{1}{2}a$ 28° 19′ 48″ 9.9445994

D'où, côté $a = 56^\circ\ 39'\ 36''$

Et de même on trouve $b = 114^\circ\ 29'\ 58''$, $c = 83^\circ\ 12'\ 06''$.

Ex. 2. Dans un triangle sphérique ABC, on donne A = 109° 55′ 42″, B = 116° 38′ 33″, C = 120° 43′ 37″, pour trouver le reste.

Rép. $a = 98^\circ\ 21'\ 40''$, $b = 109^\circ\ 50'\ 22''$, $c = 115^\circ\ 13'\ 26''$.

(**1410**) Il est bon maintenant de disposer sous forme de tableau, comme on l'a fait (**1394**) pour le triangle sphérique rectangle, les divers cas du triangle sphérique oblique-angle ; afin de pouvoir y référer au besoin et d'y trouver d'un coup d'œil la formule à employer pour résoudre le problème donné, et déterminer en même temps l'affection (**1334**) des éléments qui vont à l'énoncer.

A cet effet, et pour éviter toute fausse conclsion, il est nécessaire de se rappeler que :

1° (**1148**) Chacun des côtés du triangle sphérique est censé moindre qu'une demi-circonférence ou que 180°.

2° (**1186**) Chacun des angles du triangle sphérique est moindre que deux angles droits ou que 180°.

3° (**1164**) Chacun des côtés du triangle sphérique est moindre que la somme des deux autres.

4° (**1167**) La somme des côtés du triangle sphérique est moindre qu'une circonférence entière.

5° (**1182**) Dans tout triangle sphérique, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et le plus petit côté au plus petit angle et réciproquement.

6° (**1186**) La somme des trois angles de tout triangle sphérique est moindre que six et plus grande que deux angles droits.

7° (**1190**) Le triangle sphérique peut-être bi- ou tri-rectangle, bi- ou tri-obtus-angle.

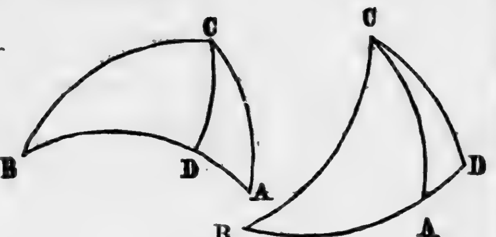
(1411)

Tableau pour la SOLUTION du triangle sphérique oblique-angle.

Cas.	DONNÉS.	REQUIS.	Solution	PREUVE.	No.
1er cas.	Deux côtés, AC et BC, et un angle A opposé à l'un d'eux, BC.	L'angle B, opposé à l'autre côté donné.	Sin. BC : sin. AC :: sin. A : sin. B (ou B′ supplément de B) = $\frac{\text{sin. A} \times \text{sin. AC}}{\text{sin. BC}}$	**1366**	1
			Il y a une, ACB ou ACB′, ou deux ACB et ACB′ solutions, suivant que le sinus de AC est moindre ou plus grand que le sinus de BC.	**1385**	
			On peut aussi dans certains cas déterminer l'affection de B, B′ par cette règle, que : suivant que AC + BC (ou AC + B′C) > ou < 180°, A + B (ou A + B′) > ou < 180°	**1341**, 7	
		L'angle ACB, compris par les côtés donnés.	Du sommet C de l'angle voulu, menez la perpendiculaire CD;	**1400**, *a*	2
			Alors, R : cos. AC :: tang. A : cot. ACD = $\frac{\text{tang. A} \times \text{cos. AC}}{\text{R}}$;	**1359** ou **1394**, 3	
			Puis, tang. BC : tang. AC :: cos. ACD : cos. BCD (= B′CD) = $\frac{\text{cos. ACD} \times \text{tang. AC}}{\text{tang. BC}}$ ..	**1370**	
			ACB = ACD + BCD, ACB′ = ACD − B′CD, suivant le cas.		
		AB, le troisième côté.	Menez la perpendiculaire du sommet C de l'angle compris par les côtés donnés;	**1400**, *a*	3
			Alors, R : cos. A :: tang. AC :: tang. AD = $\frac{\text{tang. AC} \times \text{cos. A}}{\text{R}}$	**1361** ou **1394**, 2	
			Puis, cos. AC : cos. BC :: cos. AD : cos. BD (= B′D) = $\frac{\text{cos. AD} \times \text{cos. BC}}{\text{cos. AC}}$	**1368**	
			AB = AD + BD, AB′ = AD − B′D, suivant le cas.		

2eme cas.

Données	Requis	Solution	Articles	
Deux angles A et B et un côté AC opposé à l'un d'eux, B.	Le côté BC opposé à l'autre angle donné, A.	Sin. B : sin. A :: sin. AC : sin. BC (ou B′C supplément de BC) $= \frac{\text{sin. AC} \times \text{sin. A}}{\text{sin. B}}$	**1366**	4
		Il y a une, ACB ou ACB′, ou deux, ACB et ACB′, solutions, suivant que le sinus de A est moindre ou plus grand que le sinus de B.	**1385**	
		On peut aussi dans certains cas déterminer l'affection de BC, B′C, par cette règle, que : suivant que A + B (ou A + B′) est > ou < 180°, AC + BC (ou AC + B′C) est aussi > ou < 180°.	**1341**, 7	
	Le côté AB adjacent aux angles donnés A et B.	Menez, de l'angle non donné C, la perpendiculaire CD ;	**1400**, *a*	5
		Alors, R : cos. A :: tang. AC : tang. AD $= \frac{\text{tang. AC} \times \text{cos. A}}{\text{R}}$;	**1361** ou **1394**, 2	
		Puis, tang. B : tang. A :: sin. AD : sin. BD (ou B′D) $= \frac{\text{sin. AD} \times \text{tang. A}}{\text{tang. B}}$	**1369**	
		B′D, BD sont supplémentaires l'un de l'autre........ et on a, suivant le cas, ACB = ACD + BCD ou ACB′ = ACD + B′CD.	**1349**	
	Le troisième angle ACB.	De l'angle requis C, menez la perpendiculaire CD ;	**1400**, *a*	6
		Alors, R : cos. AC :: tang. A : cot. ACD $= \frac{\text{tang. A} \times \text{cos. AC}}{\text{R}}$;	**1359** ou **1394**, 3	
		Puis, cos. A : cos. B :: sin. ACD : sin. BCD $= \frac{\text{sin. ACD} \times \text{cos. B}}{\text{cos. A}}$	**1367**	
		BCD, B′CD sont supplémentaires, l'un de l'autre........ et ACB = ACD + BCD, ou ACB′ = ACD − B′CD, suivant le cas.	**1349**	

Cas.	DONNÉS.	REQUIS.	Suite du Tableau pour la SOLUTION du triangle sphérique oblique-angle.	PREUVE.	No.
8eme cas.	Deux côtés, AB, AC, et l'angle inclus A.	B, L'un des autres angles.	Menez la per. CD de celui des deux angles donnés qui est n'est pas requis ;	**1400**, *a*	7
			Alors, R : cos. A :: tang. AC : tang. AD $= \frac{\text{tang. AC} \times \text{cos. A}}{\text{R}}$;	{ **1361** ou { **1394**, 2	
			Ce qui donne BD = AB + AD, quand la perdendiculaire tombe en dehors, et BD = AB − AD quand la perpendiculaire tombe en dedans.  		
			Puis, sin. BD : sin. AD :: tang. A : tang. B $= \frac{\text{tang. A} \times \text{sin. AD}}{\text{sin. BD}}$	**1369**	
			B et A sont de même affection ou d'affection différente, suivant que AB est > ou < BD.	**1348**	
		BC, Le troisième côté.	Menez, de l'un des angles inconnus, la perpendiculaire CD ;	**1400**, *a*	8
			Alors, R : cos. A :: tang. AC : tang. AD $= \frac{\text{tang. AC} \times \text{cos. A}}{\text{R}}$	{ **1361**, ou { **1394**, 2	
			Ce qui donnera BD = AB − AD ou AB + AD, suivant que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle ;		
			Puis, cos. AD : cos. BD :: cos. AC : cos. BC $= \frac{\text{cos. AC} \times \text{cos. BD}}{\text{cos. AD}}$	**1368**	
			Suivant que AD, BD sont de même affection ou d'affection différente ; AC et BC seront de même ou de différente affection.	**1345**, 2	

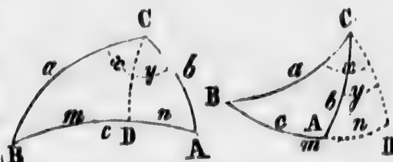
4eme cas.

Deux angles A et ACB, et le côté compris AC.	BC, L'un des deux autres côtés.	Menez la perp. CD, de l'extrémité de AC adjacente au côté cherché;	**1400**, *a*	9
		Alors, R : cos. AC :: tang. A : cot. ACD $= \frac{\text{tang. A} \times \text{cos. AC}}{\text{R}}$	{ **1359**, ou { **1394**, 3	
		Ce qui donne BCD = ACB + ACD ou ACD − ACD, suivant que la perpendiculaire tombe en dehors ou en dedans du triangle;		
		Puis, cos. BCD : cos. ACD :: tang. AC : tang. BC $= \frac{\text{tang. AC} \times \text{cos. ACD}}{\text{cos. BCD}}$	**1370**	
		BC est > ou < 90°, suivant que A et BCD, sont de même ou de différente affection...	**1342**, 3	
	B, Le troisième angle.	De l'un, C, des angles donnés, menez la perpendiculaire CD;	**1400**, *a*	10
		Alors, R : cos. AC :: tang. A : cot. ACD $= \frac{\text{tang. A} \times \text{cos. AC}}{\text{R}}$	{ **1359**, ou { **1394**, 3	
		Ce qui donne l'angle BCD = ACB + ACD ou ACB − ACD, suivant que la perpendiculaire tombe en dehors ou en dedans du triangle.		
		Puis, sin. ACD : sin. BCD :: cos. A : cos. B $= \frac{\text{cos. A} \times \text{sin. BCD}}{\text{sin. A}}$	**1367**	
		B et A sont de même ou de différente affection, suivant que CD tombe en dedans ou dehors du triangle........	**1348**	

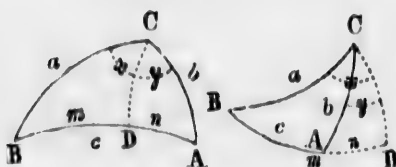
Cas.	DONNÉS.	REQUIS.	Suite du Tableau pour la SOLUTION. du tringle sphérique oblique-angle.	PREUVE.	No.
5eme cas.	Les trois côtés AB, AC, BC.	A, L'un des angles.	Menez de l'un, C, des angles non requis, la perpendiculaire CD ; Trouvez un arc E tel, que tang. $\frac{1}{2}$ AB : tang. $\frac{1}{2}$(AC + BC) :: tang. $\frac{1}{2}$ (AC − BC) : tang. $\frac{1}{2}$ E ; Alors, si AB > E, AB est la somme et E la différence des segments AD, BD de la base ; mais si AB < E, alors E est la somme et AB la différence entre AD et BD. Dans l'un ou l'autre cas, on connaît AD et BD et l'on fait : Alors, tang. AC : tang. AD :: R : cos. $A = \frac{R \times \text{tang. } AD}{\text{tang. } AC}$	**1400**, *a* **1371** { **1361**, ou { **1394**, 12	11
6eme cas.	Les trois angles A, B, C.	BC, L'un des côtés.	Soient A'B', A'C', B'C', les suppléments des trois angles donnés A, B, C ; c'est-à-dire les suppléments des arcs qui mesurent ces angles ; et que ces arcs soient les côtés d'un nouveau triangle A' B'C'. Trouvez par le dernier cas, l'angle A' de ce triangle. Cet angle, c'est-à-dire l'arc qui mesure cet angle sera le supplément du côté, du triangle donné, opposé à l'angle A, c'est-à-dire le supplément de BC ; d'où, on connaît BC.	**1171**	12

On peut aussi résoudre les quatre premiers cas du triangle sphérique oblique-angle, à l'aide des quatre formules de l'article (**1381**) et les deux derniers cas, à l'aide des formules (**1382**, 2°) et (**1383**, 2°) c.-à-d., les six cas, sans faire usage du triangle rectangle, et l'on se servira à volonté des formules du tableau ou de celles qu'on vient d'énumérer.

(**1412**) Le dernier tableau peut encore s'exprimer commodément de la manière suivante, en désignant par a le côté opposé à l'angle A, par b, le côté opposé à l'angle B, par c, le côté opposé à l'angle C, par m et n les segments BD, AD de la base et par x et y les segments BCD, ACD de l'angle vertical.



Cas.	DONNÉS.	REQUIS.	Autre tableau pour la **SOLUTION** du triangle sphérique oblique-angle.	No.
1er cas.	Deux côtés a et b et un angle A opposé à l'un d'eux.	B	$\text{Sin. B} = \frac{\text{sin. } b \times \text{sin. A}}{\text{sin. } a}$	1
		C	Trouvez y, tel que $\text{cot. } y = \text{cos. } b \times \text{tang. A}$, et x, tel que $\text{cos. } x = \frac{\text{cos. } y \times \text{tang. } b}{\text{tang. } a}$; alors $C = x + y$ ou $x - y$, suivant le cas.	2
		c	Trouvez n, tel que $\text{tang. } n = \text{tang. } b \times \text{cos. A}$, et trouvez m tel que $\text{cos.} m = \frac{\text{cos.} a \times \text{cos. } n}{\text{cos. } b}$; alors $c = m + n$, ou $c = m - n$, suivant le cas.	3
2eme cas.	Deux angles A et B et un côté b, opposé à l'un d'eux.	a	$\text{Sin. } a = \frac{\text{sin. } b \times \text{sin. } a}{\text{sin. B}}$.	4
		c	Trouvez n, tel que $\text{tang. } n = \text{tang. } b \times \text{cos. A}$, et m tel que $\text{sin. } m = \frac{\text{sin. } n \times \text{tang. A}}{\text{tang. B}}$; alors $c = m + n$, ou $c = m - n$, suivant le cas.	5
		C	Trouvez y, tel que $\text{cot. } y = \text{cos. } b \times \text{tang. A}$, et x tel que $\text{sin. } x = \frac{\text{sin. } y \times \text{cos. B}}{\text{cos. A}}$; alors $C = x + y$, ou $C = x - y$, suivant le cas.	6



Cas.	DONNÉS.	REQUIS.	Suite du tableau pour la **SOLUTION** du triangle sphérique oblique-angle.	No.
3eme cas.	Deux côtés b et c et l'angle inclus A	B	Trouvez n, tel que tang. n = tang.b × cos.A ; alors tang. $B = \frac{\sin. n \times \text{tang. } A}{\sin. (c - n)}$. (ou, suivant le cas, $c + n$.)	7
		a	Trouvez n, tel que tang. n = tang.b × cos.A ; alors cos. $a = \frac{\cos. b \times \cos. (c - n)}{\cos. n}$. (ou, $c + n$, suivant le cas.)	8
4eme cas.	Deux angles A et C et le côté compris b.	a	Trouvez y, tel que cot. y = cos. b × tang. A ; alors tang. $a = \frac{\text{tang. } b \times \cos. y}{\cos. (C - y)}$. (ou, suivant le cas, $C + y$.)	9
		B	Trouvez y, tel que cot. y = cos. b × tang. A ; alors cos. $B = \frac{\cos. A \times \sin. (C - y)}{\sin. y}$. (ou, $C + y$, suivant le cas.)	10
5eme cas.	Les trois côtés a, b, c.	A	Soit $a + b + c = s$. Sin. $\frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin. (\frac{1}{2} s - b) \times \sin. (\frac{1}{2} s - c)}}{\sqrt{\sin. b \times \sin. c}}$. ou Cos. $\frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{\sin. \frac{1}{2} s \times \sin. (\frac{1}{2} s - a)}}{\sqrt{\sin. b \times \sin. c}}$	11
6eme cas.	Les trois angles A,B,C.	a	Soit $A + B + C = S$. Sin. $\frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos. \frac{1}{2} S \times \cos. (\frac{1}{2} S - A)}}{\sqrt{\sin. B \times \sin. C}}$. ou Cos. $\frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\cos. (\frac{1}{2} S - B) \times \cos. (\frac{1}{2} S - C)}}{\sqrt{\sin. B \times \sin. C}}$	12

(**1413**) Après avoir obtenu, à l'aide des formules de ce tableau ou du dernier, un angle opposé à un côté donné ou un côté opposé à un angle donné, et connaissant l'un quelconque des autres angles ou des autres côtés ou deux quelconques d'entre ces angles et ces côtés, il suffit, pour déterminer les autres inconnues, de se rappeler qu'on a dans tous les cas (**1366**) sin. A : sin. a :: sin. B : sin. b :: sin. C : sin. c.

2° Remarquons aussi que dans les formules 11 et 12, de ce tableau, l'analogie fait voir de suite comment on changerait de nom les données qui s'y trouvent, afin d'adapter ces formules aux autres angles B, C ou aux autres côtés b, c, suivant le cas.

3° Il est clair (**1263**) que la division par R est sous-entendue dans les expressions, cos. $b \times$ tang. A, et cos. A $\times$ tang. b, des formules 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 des quatre premiers cas du tableau ; en effet, ces expressions sont des carrés ou rectangles, c'est-à-dire (**333**) des surfaces, puisque chacune d'elles résulte de la multiplication de deux lignes, cos. b, tang. A, et cos. A, tang. b, l'une par l'autre ; or, les quantités cot. [illegible], cos. x, tang. n, cos. m, etc. ne sont que des lignes et ne sauraient en conséquence être égales aux surfaces dont on vient de parler, puisqu'on ne peut (**25**) comparer ensemble des quantités de différente espèce ; mais en divisant par R, (terme ou diviseur linéaire) les rectangles ou surfaces dont il s'agit, on a (**349**) pour quotients, des lignes, ce qui rend alors de même espèce et permet de comparer les quantités de chaque côté du signe (=) d'égalité. Cependant, comme on l'a déjà vu, la division par 1 (l'unité) ne change aucunement la valeur des expresssions cos. $b \times$ tang. A, cos. A $\times$ tang. b ; d'où il suit qu'on peut négliger la division par R quand R = 1.

4° Il est de même évident que le facteur ou multiplicateur R est sous-entendu dans les quatre formules (11 et 12) des deux derniers cas du tableau, et pour une raison analogue à celle qu'on vient d'indiquer ; car, les numérateurs et dénominateurs de ces quatre fractions sont évidemment linéaires, chacune de ces huit expressions étant la racine carrée d'un rectangle ou surface ; or la multiplication de chacune des quatre fractions, c'est-à-dire, de leurs numérateurs linéaires, par un facteur linéaire R, en fait un rectangle et ce rectangle divisé par un dénominateur linéaire, donne pour quotient une ligne ; ce qui rend encore de même espèce chacun des membres des quatre équations dont il s'agit et donne à ces formules leur raison d'être.

5° Ce tableau est donc surtout adapté au calcul par nombres (sinus,

etc.) naturels, où le rayon est censé égal à l'unité, ce qui dispense de le faire entrer en compte; mais l'on peut s'en servir, tout de même, en procédant par logarithmes, puisqu'il suffira dans ce cas, pour diviser par R les expressions, cos. $b \times$ tang. A, et cos. A $\times$ tang. b, de diminuer de 10 la caractéristique du logarithme de chacune d'elles, et que de même l'on n'aura qu'a augmenter de 10 la caractéristique des logarithmes des quantités à la droite du signe d'égalité, dans les formules 11 et 12 du tableau, pour obtenir le logarithme de la quantité à gauche du signe.

(**1414**) Quant aux fractions de secondes, qu'on a, d'ordinaire, négligées dans le calcul des quelques exemples de triangles sphériques et rectilignes de ce livre et du dernier, on peut, au besoin, les faire entrer en compte, comme dans le cas des distances ou parallaxes des étoiles fixes, etc., en se servant à cet effet, de tables, comme il s'en trouve, calculées, à la seconde, ou au moins pour tous les 5 ou 10 secondes, et allant, ainsi que les autres facteurs ou éléments nécessaires au calcul, à un nombre de décimales, plus grand que celui qu'on trouve dans les tables ordinaires; ce qui est surtout nécessaire pour les quelques premiers ou derniers degrés du quart-de-cercle, à cause du trop ou du trop peu de variation dans les longueurs respectives des lignes trigonométriques de très petits ou de très grands angles, (**1300** et **1301**).

(**1415**) Il est nécessaire de remarquer que dans l'application pratique de la trigonométrie sphérique, il est assez rare que l'on ait à considérer des triangles dont les côtés excèdent le quart-de-circonférence, et au contraire, dans la triangulation à faire pour relever la carte géographique d'une partie de la sphère terrestre, c'est à peine si les côtés des triangles composants excèdent ou atteignent même un seul degré (le degré est de 60 milles ou de 20 lieues nautiques, chaque minute de la circonférence de la terre étant un mille nautique ou astronomique). On aura donc rarement à considérer les affections des côtés d'un triangle, ce qui simplifiera d'autant l'intelligence des opérations et en diminuera le travail.

(**1416**) Il résulte aussi de la petitesse comparative des triangles, eu égard aux dimensions de la sphère terrestre, dont la surface est presque plane, excepté pour des distances assez considérables, que la somme des trois angles d'un de ces triangles sphériques, excède rarement de plus de la fraction d'une seconde, la somme (180°) des angles d'un triangle rectiligne, et il existe une méthode, démontrée par Legendre, de déterminer cet excédant par une formule assez simple dépendant de la surface même du triangle à résoudre.

2° On répartit alors également, c'est-à-dire, pour un tiers, sur chacun des trois angles à estimer, l'excédant ainsi obtenu, et cela, soit en plus ou en moins, suivant que l'on veut changer les angles du triangle, considéré comme rectiligne, en angles sphériques correspondants, ou que l'on désire substituer au triangle considéré comme sphérique, le triangle rectiligne de même nom ; car dans la pratique, et même avec des instruments assez grands, on ne peut guère porter l'exactitude des observations faites sur le terrain au-delà des secondes, ce qui nécessite d'avoir recours au calcul pour corriger les angles observés et les traduire à volonté de sphériques en rectilignes ou de rectilignes en sphériques, suivant que l'on désire procéder d'après la supposition que la surface à relever est, proprement-dite, sphérique ou convexe, ou qu'on regarde cette surface comme celle d'un polyèdre (**939**) infinitaire, c.-à-d., d'un polyèdre ayant pour surface latérale une infinité de triangles rectilignes.

3° La formule de Legendre pour l'excédant sphérique en secondes est $\frac{S}{R^2}R''$: où S est la surface du triangle, et R le rayon de la terre. Considérant la terre comme une sphère parfaite d'un rayon de 20,921,400 pieds anglais ; une seconde d'espace $= (20{,}921{,}400 \times 3.14159 \times 2 = 131{,}453{,}000 =$ circonférence$) \div 1{,}296{,}000$ (nombre de secondes dans 360°) $= 101.43$ pieds, $(101.43)^2 =$ le nombre de pieds carrés dans une seconde carrée, R'' est le rayon exprimé en secondes et vaut par conséquent $(1{,}296{,}000'' \div 3.1415926) \div 2 = 206264.8$. L'expression $\frac{S}{R^2}\,R''$ ou, ce qui est la même chose, $\frac{S}{R^2 \div R''}$ devient donc $\frac{\text{surface du triangle en pieds}}{(101.43)^2 \times (206264.8)^2 \div 206264.8}$ ou, en logarithmes, log. surface — 4.0123328 — 5.3144251 = log. surf. — 9.3267579 = log. de l'excédant sphérique en secondes ; (4.0123328 étant le log. de $(101.43)^2$ et — 5.3144251 la différence entre le log. — 10.6288502 de $\times\,(206264.8)^2$ et le log. — 5.3144251 de $\div\,206264.8$).

4° **Ex.** Soit un triangle dont la somme des angles observés, au lieu d'excéder 180°, comme il devrait en être, (car tout angle horizontal observé est essentiellement sphérique, et dans tout triangle mesuré sur la surface de la terre, la somme des trois angles, si on les a observés correctement, doit nécesssairement (**1185**) excéder 180°) est au contraire moindre que 180° d'une demi-seconde ; soit 1.29″ l'excédant sphérique

calculé, d'après la formule qu'on vient de donner, l'erreur d'observation étant par conséquent de 1.79″. Un tiers de cette erreur ajouté à chacun des angles observés, les corrige comme angles d'un triangle sphérique, et un tiers de l'excédant sphérique 1.29″ déduit de chacun de ces angles sphériques, ainsi corrigés, les convertit en angles d'un triangle rectiligne ayant pour côtés les cordes des arcs qui servent de côtés au triangle sphérique correspondant, et dont la somme des angles est 180°, comme on le voit par l'exemple ci-dessous.

Angles observés.	Tiers de l'erreur.	Angles sph. corrigés.	Tiers de l'excéd. sph.	Angles rect. corrigés.
A, 45° 54′ 37″	+ .597″	45° 54′ 37.597″	— .43	45° 54′ 37.167″
B, 48 39 24.5	+ .597	48 39 25.097	— .43	48 39 24.667
C, 85 25 58	+ .597	85 25 58.597	— .43	85 25 58.167
179 59 59.5		180 0 1.29		180 0 0

Ici, on a déduit de chaque angle, le tiers de l'excédant sphérique; mais on aurait pu calculer cet excédant pour chaque angle séparément, en réduisant les angles du triangle sphérique aux angles formés par les cordes. Ainsi, il y a trois modes de solution pour les grands triangles d'un relevé géodésique: d'abord, en les calculant comme triangles sphériques avec les angles sphériques corrigés: puis, en les regardant comme triangles rectilignes avec les angles des cordes: enfin, par la méthode de Legendre qui consiste à diminuer chaque angle du tiers de l'excès sphérique; cette dernière méthode étant de beaucoup la plus expéditive. Dans "la base du système métrique" on a calculé les côtés des triangles par chacune des trois méthodes. Dans le relevé de l'Angleterre, on a procédé par la seconde méthode et on a vérifié les calculs par la troisième.

LIVRE VII.

APPENDICE.

TOISÉ DES SOLIDES ET DES SURFACES.

(1417) Il n'est pas inutile de recueillir maintenant et de présenter sous une forme plus succincte les diverses formules ou règles qui on trait au calcul des surfaces et volumes des divers corps et figures dont il a été jusqu'ici question. Un ensemble de cette sorte permettra de référer plus aisément à ces règles, pour y trouver d'un coup-d'œil celle dont on aurait besoin, eu égard au problème à résoudre, et quelques exemples pratiques des divers cas mettra l'élève plus au fait du procédé à suivre pour arriver au résultat voulu.

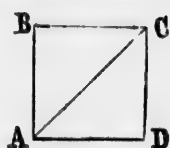
(1418) Déterminer une surface ou un volume, c'est comme on la vu (**333** et **1014**) trouver le nombre de fois que cette surface ou volume contient une autre surface ou volume que l'on prend pour unité de mesure (**24**). Ainsi, quand on dit qu'une toise carrée contient 36 pieds carrés, il faut entendre que l'unité de mesure est le pied carré et que cette unité est contenue 36 fois dans la toise carrée, la toise linéaire étant de 6 pieds, et $6 \times 6 = 36$. De même, si la toise cubique, contient 216 pieds cubes, c'est que le pied cube est dans ce cas l'unité prise pour mesure et que cette unité est contenue 216 fois dans la toise, laquelle étant de 6 pieds linéaires, son volume est (**1018**) $6 \times 6 \times 6 = 216$; et si le mètre cubique contient 1000 déci-mètres cubes, c'est que l'unité de mesure est le déci-mètre et que $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

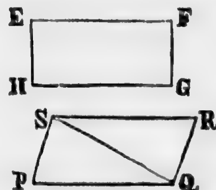
(**1419**) L'unité de mesure qu'il convient d'employer est d'ordinaire le carré ou le cube (suivant le cas) dont le côté est (**333** et **1014**) l'unité linéaire qui a servi à établir les dimensions linéaires de la figure à estimer; mais il est clair que rien n'empêche d'estimer en mètres ou en verges carrés la surface d'une figure dont les dimensions seraient exprimées en pieds ou en pouces, etc.; et de même il sera indifférent d'exprimer en pieds cubes, en mètres ou en toises, etc., le contenu d'un corps ou solide dont les dimensions linéaires seraient données en verges, en pieds ou en pouces, etc.; faisant attention seulement aux réductions nécessaires pour traduire les éléments donnés én éléments d'un autre nom, c'est-à-dire, d'une valeur différente.

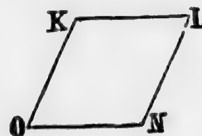
Arrêtons nous d'abord au toisé des surfaces.

PROBLÈME I.

Déterminer la surface d'un carré, rectangle, losange, rhombe ou parallélogramme quelconque (*).







(**1420**) **REGLE I.** *Multipliez la base* (**182**) *par la hauteur* (**180**) *et le produit sera la snrface voulue* (**333** et **341**).

Ex. 1. Quelle est la surface d'un carré dont le côté mesure 204.3 pieds?

RÉP. 41738.49 pieds carrés.

(*) Ces figures se rencontrent partout dans la pratique du mesureur, géomètre, arpenteur, toiseur, etc.; ainsi, le parquet, plancher, ou plafond, ou l'un des pans d'un appartement ou d'une pièce quelconque sera d'ordinaire un carré ou un rectangle. Il en sera de même d'une porte ou d'une fenêtre dont une partie au moins sera rectangulaire, et l'on retrouvera encore cette figure dans la surface développée d'une joue de porte, de fenêtre ou de toute autre ouverture qui serait cintrée sans être ébrasée; ainsi que dans le développement du pourtour d'une pièce ou d'un appartement quelconque dont le plan serait un cercle ou tout autre figure curviligne et dont il sera toujours facile d'obtenir avec assez d'exactitude les dimensions curvilignes à l'aide d'un galon, si la surface à estimer est convexe, ou au moyen d'une tringle assez mince pour pouvoir s'ajuster à la surface concave à estimer. Pour ce qui est du parallélogramme oblique-angle, on rencontrera souvent de ces surfaces à l'endroit de deux courses superposées d'escaliers de même inclinaison. Les subdivisons des territoires en cantons, lots et parcelles, affectent aussi pour la plupart des figures de cette sorte.



2. Quel est le nombre de *carrés* (le *carré* est de $10 \times 10 = 100$ pieds carrés) dans un plancher, plafond, colombage, lambris, couverture, etc. rectangulaire, dont la longueur $= 60$ pieds et la largeur 35 pieds? **Rep.** 21.

3. Quelle est la superficie d'un parallélogramme dont la base égale 12.25 et la hauteur 8.5? **Rep.** 104.125.

4. Combien de verges carrées de peinturage, dans un rectangle dont la base est de 66.3 pieds et la hauteur 33.3 pieds? **Rep.** 245.31.

5. Déterminer la superficie d'une planche rectangulaire dont la longueur est $12\frac{1}{2}$ pieds, et la largeur 9 pouces? **Rep.** $9\frac{3}{8}$ p. c.

6. On demande le nombre de verges carrées de tapisserie nécessaire pour couvrir un parallélogramme, dont la base est de 37 pieds, et la hauteur de 5 pieds 3 pouces? **Rep.** $21\frac{7}{12}$.

7. Combien de pieds carrés de vitrage dans une fenêtre rectangulaire ayant 75 pouces en hauteur sur $37\frac{1}{2}$ pouces en largeur? **Rep.** $75 \times 37\frac{1}{2} \div 144 = 19$ pieds carrés $76\frac{1}{2}$ pouces carrés $= 19.\frac{76.5}{144} = 19.53125$ pieds; ou $6'.3'' \times 3'.1\frac{1}{2}'' = 19.6\frac{3}{8} = 19.\frac{6.375}{12} = 19\frac{51}{96} = 19.53$ ou $19\frac{1}{2}$ p. c. à peu près.

8. Combien de pouces carrés de dorure faudra-t-il pour couvrir une surface dont la longueur est de 3 pieds 3 pouces et la largeur développée ou périmètre de 13 pouces? **Rep** 507.

9. Quel est le nombre de pieds surperficiels dans l'ensemble des moulures d'une corniche en pierre, en bois ou en plâtre, etc., dont la longueur est de 60 pieds 7 pouces et la largeur développée ou contour de 3 pieds $3\frac{1}{2}$ pouces? **Rep.** $199\frac{5}{12}$ (à très près) p. c.

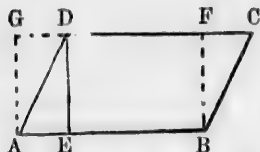
REM. Ces largeurs développées, contours ou périmètres, s'obtiennent au moyen d'un fil ou galon que l'on ploye autour des diverses moulures, dans une direction perpendiculaire (**996** ou **998**) à leur longueur.

10. On demande le nombre de verges carrées de vernis sur une porte dont la hauteur est de $7\frac{1}{2}$ pieds et la largeur développée (on mesure autour de toutes les moulures, etc.) de 3 pieds 11 pouces? **Rep.** 3 v. c. $2\frac{4.5}{12}$ p. c. $= 3$ v. c. 2.375 p. c. $= 3.\frac{2.375}{9}$ v. c. $= 3.2639$ v. c., soit $3\frac{1}{4}$ v. c. à peu près.

11. Combien de mètres carrés dans une parcelle de terre ayant 113.75 mètres en longueur sur 10.5 mètres en largeur? **Rep.** 1194.375.

12. Déterminer en arpents et perches carrés, la superficie d'une terre mesurant 40 arpents 5 perches en profondeur ou longueur, sur 3 arpents $7\frac{1}{2}$ perches de front ou largeur (10 perches linéaires formant un arpt. lin. et par conséquent 10×10 ou 100 perches carrées, un arpent carré). **Rep.** 151 arp. $87\frac{1}{2}$ perches.

(1421) REGLE II. *Faites le produit de deux côtés adjacents du parallélogramme, et multipliez ensuite ce produit par le sinus naturel de l'angle inclus.*



En effet, on a vu (**1231,** 1°) que quand R = 1 la perpendiculaire DE du triangle rectangle AED est égale au produit de l'hypoténuse AD par le sinus de l'angle A ; mais DE est la hauteur du parallélogramme AG, et puisque surf. AG = AB × DE et que DE = AD × sin. A, il est clair alors que surf. AG = AB × AD × sin. A.

Ex. 1. Quelle est la surface d'un rhombe ou losange dont le côté est de 25 chaînes et l'angle inclus de 57° 33′. **Rep.** 25 × 25 = 625, et 625 × .84386 (sin. nat. de 57° 33′) = 527.4125 chs. c.

(1422) Pour résoudre le même problème par logarithmes, où R = 10., on a (**1229,** 1°) R : sin. A :: AD : DE ; d'où, $DE = \frac{AD \times \sin. A}{R}$; or, surf. AG = AB × DE et en substituant à DE, sa valeur $\frac{AD \times \sin. A}{R}$, on obtient pour surface AG, l'expression $AB \times \frac{AD \times \sin. A}{R}$, ou ce qui est la même chose, $\text{surf.}AG = \frac{AB \times AD \times \sin. A}{R}$; c'est-à-dire qu'il faut *ajouter ensemble les logarithmes des deux côtés adjacents et le sinus logarithmique de l'angle inclus ; cette somme, diminuée du log. du rayon, sera le log. de la surface voulue.*

Log. surf. AG =	+ log. AB	25	1.397940
	+ log. AD	25	1.397940
	+ log. sin. A	57° 33′	9.926270
	− log. R	....	10.
Log. surf. AG =		....	2.722150

Log. moindre suivant 2.722148 = 527.41 chs. ; la différence entre ce log. et le log. trouvé est 2, auquel ajoutant (**1286**) deux zéros et divisant par 82, on a (à très près) 25 que l'on ajoute à la droite des chiffres 527.41 déjà trouvés, pour avoir comme auparavant, 527.4125.

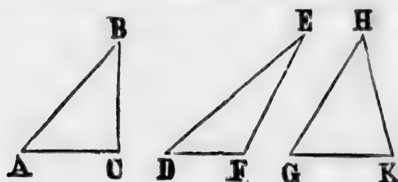
Ex. 2. On demande la la surface d'une terre dont les côtés sont respectivement de 40½ ar. et de 3 ar. 7½ per. et l'angle inclus 57° 33′.

Rep.	+ log. 40½ ar. ou 405 per.	2.607455
Log. surf. voulue =	+ log. 3 ar. 7½ per ou 37.5 per.	1.574031
	+ log. sin. angle inclus 57° 33′.	9.926270
	− log. R.	10.
Log. surf. voulue =	....	4.107756

Le log. moindre suivant .107549 correspond au nombre 1281 ; la différence entre ce log. et le log. trouvé est 207 ; ajoutant des 0 et divisant par la dif. (D) 338, on obtient 612426 que l'on écrit (**1286**) à la droite du nombre déjà trouvé 1281 pour avoir 1281612426 ; mais la caractéristique du log. trouvé est 4, ce qui correspond (**1273**) à 5 chiffres d'entiers ; donc le nombre voulu est 12816.12426 perches, ou 128 ar. 16.124 (ou 16⅛) perches, près.

PROBLÈME II.

Trouver la surface d'un triangle (*).



ler Cas.

Quand la base et la hauteur sont données.

(**1423**) **REGLE** *Multipliez la base par la hauteur et prenez la moitié du produit. Ou, multipliez l'une de ces dimensions par la moitié de l'autre.* (**344** ou **348**).

Ex. 1. Quelle est la surface d'un triangle dont la base est 625 et la hauteur 620 ? **Rep.** 162500.

2. Combien de verges carrées d'enduits dans une surface triangulaire dont la base est 40 pieds et la hauteur 30 pieds ? **Rep.** 66⅔.

3. Quel est le nombre de mètres carrés dans un terrain triangulaire, dont la base mesure 30 mètres 7 déci-mètres, et la hauteur 17 mètres 39 centimètres ? **Rep.** La surface voulue = 30.7 mètres × 17.39 mètres = 266.9365 m. c.

4. Combien faut-il de *carrés* de lambris pour couvrir un pignon dont la base est de 39 pieds 9 pouces et la hauteur de 23 pieds 4 pouces ?

Rep. 463¾ p. c. = 4 carrés 63¾ p. c.

5. Déterminer le nombre de carrés de toiture en chaume, tuile, ardoise, bardeau, zinc, plomb, cuivre ou autre métal, etc., dans une croupe dont la base est de 65.4 pieds et la hauteur de 37.3 pieds ?

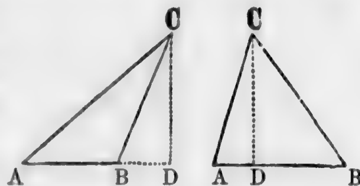
Rep. 12 carrés 19.71 p. c.

(*) Le triangle, comme le parallélogramme, se rencontre fort souvent dans la pratique du mesureur, etc. Les pignons d'un édifice, les croupes d'un toit, les côtés ou joues d'une lucarne, etc., affectent cette sorte de figure ; et il n'est pas rare non plus d'avoir à déterminer la surface d'un terrain triangulaire.

2ème Cas.

Quand on a deux côtés et l'angle inclus.

(1424) **REGLE.** *Faites le produit continu (41) des deux côtés donnés et du sinus nat. de l'angle inclus ; la moitié de ce produit sera la surface voulue.*



On a (**1231.** 1°) comme dans le cas (**1421**) du parallélogramme, CD = AC × sin. A ou BC × sin. B; or, surf. $ACB = \frac{AB \times CD}{2}$ et puisque CD = AC × sin. A ou BC × sin. B, on obtient pour surf. du triangle l'expression $\frac{1}{2}$ (AB × AC × sin. A) ou $\frac{1}{2}$ (AB × BC × sin. B).

Ex. 1. Quelle est la surface d'un triangle dont deux côtés valent 30 et 40 mètres et l'angle inclus 30° ? **Rep.** 300 m. c.

2. Déterminer la surface d'un triangle dont un côté est de 45 verges, un autre côté 37 verges et l'angle inclus 60° ? **Rep.** 720.9661.

3. Les autres données restant les mêmes, déterminer la surface pour un angle inclus = 45° ? **Rep.** 588.6664.

(1425) **Par logarithmes.** *Ajoutez ensemble les logarithmes des deux côtés et le sinus logarithmique de leur angle inclus ; de cette somme soustrayez* 10, *log. du rayon, et le reste sera le log. du double de la surface du triangle.*

Car, (**1429**, 1°) R : sin. A :: AC : CD ou R : sin. B :: BC : CD; d'où, $CD = \frac{AC \times \sin. A}{R} = \frac{BC \times \sin. B}{R}$, et comme surf. ABC = AB × CD, on a surf. $ABC = \frac{AB \times AC \times \sin. A}{R} = \frac{AB \times BC \times \sin. B}{R}$.

Ex. 1. On demande la surface d'un triangle dont les côtés sont AB = 125.81, AC = 57.65, et l'angle inclus A = 57°25' ?

Rep. .... Log. 2 ABC =	+ log. AB	125.81	2.099715
	+ log. AC	57.65	1.760799
	+ log. sin. A	57°25'	9.925626
	− log. R		10.
Log. 2 ABC =	....		3.786140

Et 2ABC = 6111.4, ou ABC = 3055.7 = surface demandée.

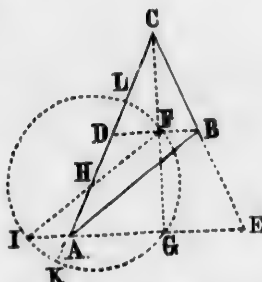
2. Combien de verges carrées dans un triangle dont les côtés sont 25 pieds et 21.25 pieds et l'angle inclus 45° ? **Rep.** 20.8694.

3ème Cas.

Quand les trois côtés sont connus.

(1426) **REGLE I.** *Ajoutez ensemble les trois côtés et prenez la moitié de leur somme. De cette demi-somme soustrayez séparément chacun des*

côté. ***Faites le produit continu de la demi-somme et des trois restes. Ce produit sera le carré de la surface du triangle, et la racine carrée de ce produit la surface voulue.***



Soit ACB le triangle. Prenez CD égal au côté CB et menez DB ; menez AE parallèle à DB, pour rencontrer en E le côté CB prolongé : CE sera alors égal à CA. Menez CFG perpendiculaire à DB et par conséquent aussi à AE qui est parallèle à DB ; CFG bissectera DB, AE en F et G. Menez, parallèle à AB, FHI qui rencontrera CA en H et EA prolongé en I. Enfin, du centre H, avec un rayon FH, décrivez la circonférence d'un cercle ; cette circonférence rencontrera en K le prolongement de CA, passera par le point I, à cause de AI=FB=DF (d'où, HI=HF), et passera aussi (**444**) par le point G, parce que FGI est un angle droit.

Maintenant, puisque $HA=HD=\frac{1}{2}AD$ et $CD=CB=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}CB$, il est clair que CH est égal à la demi-somme des côtés AC, BC du triangle ; c'est-à-dire $CH=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$; et puisque $HK=\frac{1}{2}IF=\frac{1}{2}AB$, il suit que $CK=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}S$, si l'on représente par S la demi-somme des côtés.

De plus, $HK=HI=\frac{1}{2}IF=\frac{1}{2}AB$, ou $KL=AB$; d'où, $CL=CK-KL=\frac{1}{2}S-AB$, $AK=CK-AC=\frac{1}{2}S-AC$, et $AL=DK=CK-CD=\frac{1}{2}S-BC$. Or, $AG\times CG=$ surf. ACE, et $AG\times FG=$ surf. ABE, d'où $AG\times CF=$ surf. ACB ; et par triangles semblables, $AG:CG::DF:CF$, ou comme $AI:CF$; donc $AG\times CF$ (surf. de ACB) $=CG\times DF=CG\times AI$; donc $\overline{AG\times CF\times CG\times AI}$ ou, ce qui est la même chose, $AG\times CF\times CG\times AI$ est égal au carré de la surf. ACB.

Mais $CG\times CF=$ (**576**) $CK\times CL=\frac{1}{2}S\times(\frac{1}{2}S-AB)$,

et $AG\times AI=$ (**572**) $AK\times AL=(\frac{1}{2}S-AC)\times(\frac{1}{2}S-BC)$;

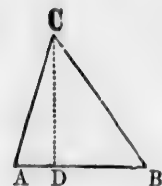
d'où, $AG\times CF\times CG\times AI=\frac{1}{2}S\times(\frac{1}{2}S-AB)\times(\frac{1}{2}S-AC)\times(\frac{1}{2}S-BC)=$ surf. ACB × surf. ACB = (surf. ACB)^2.

Ex. 1. Soit à trouver la surface d'un triangle dont les côtés sont 20, 30, et 40.

20	45	45	45
30	20	30	40
40	—	—	—
—	25 = 1er reste.	15 = 2ème reste.	5 = 3ème reste.
2) 90			
45 = demi-somme.			

Maintenant $45\times 25\times 15+5=84375$.

La racine carrée de ce produit est 290.4737, la surface voulue.



2. Les trois côtés d'un triangle étant 24, 36, et 48 ; quelle en est la surface? **Rep**. 418.282.

3. On demande la surf. d'un triangle équilatéral dont le côté est 25 ? **Rep**. 270.632.

(1427) Par logarithmes. *Après avoir déterminé les trois restes, faites l'addition des logarithmes de la demi-somme et des trois restes ; la demi-somme de ces quatre logarithmes répondra à la surface voulue.*

Ex. 1. Combien y a-t-il de verges carrées d'enduits dans une surface triangulaire dont les côtés sont de 30, 40, et 50 pieds ? **Rep.** $66\frac{2}{3}$.

2. Les trois côtés d'une parcelle de terre mesurent 505.3, 330.7, et 402.5 mètres. Quelle en est la surface ?

505.3	619 25 − 505.3 = 113.95 = 1er reste.
330.7	619.25 − 330.7 = 288.55 = 2ème reste.
402.5	619.25 − 402.5 = 216.75 = 3ème reste.
2) 1238.5	
619.25 = demi-somme.	

+ log. demi-somme	619.25...........	2.7918660
+ log. 1er reste	113.95............	2.0567143
+ log. 2ème reste	288.55............	2.4602211
+ log. 3ème reste	216.75............	2.3359591
		2) 9.6447605
		4.82238025

Ce log. correspond à 66432.447 qui est la surface demandée.

(1428) Le même exemple par nombres naturels fera voir l'avantage qui résulte, dans le cas actuel, de l'emploi des logarithmes pour diminuer le travail ; mais, de leur côté, les nombres naturels ont cet avantage sur les logarithmes, qu'en faisant entrer en compter toutes les décimales, avec l'addition même de zéros pour continuer au besoin la division ou l'extraction de la partie fractionnaire de la racine voulue, on peut porter la précision à tel degré d'approximation que l'on voudra, tandis qu'on ne saurait avec exactitude donner à la réponse qu'on obtient par logarithmes, un plus grand nombre de chiffres que n'en contient la partie fractionnaire du log. lui-même, comme le fait voir d'ailleurs l'inexactitude du dernier chiffre (7) de la réponse ainsi obtenue.

619.25	70563 53 75	20361108.7456 25
113 95	2 88.55	216 75
3096 25	352817 68 75	101805543 7281 25
55732 5	3528176 87 5	1425277612 1937 5
185775	56450830 00	12216665247 3750
61925	564508300 0	20361108745 625
61925	1411270750	407222174912 50
70563.53 75	20361108.74 56 25	6)4413270320.61 4218 75
		36

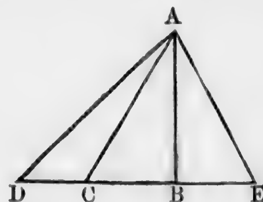
Preuve.

66432.4493 +
66432.4493 +
199297 3479
5978920 437
26572979 72
265729797 2
1328648986
1992973479
2657297972
3985946958
3985946958
4413270319.9970 7049 +

12,6)	813
	756
132,4)	5727
	5296
1328,3)	43103
	39849
13286,2)	325420
	265724
132864,4)	5969661
	5314576
1328648,4)	65508542
	53145936
13286488,9)	1236260618
	1195784001
132864898,3)	4047661775
	3985946949
1328648986,0,4)	617148260000

$\sqrt{} = 66432.449304 +$

(**1429**) **REGLE II.** *Prenez pour base du triangle donné quelconque* ADE, *son plus grand côté* DE ; *faites* (**578**) DE : AD + AE :: AD − AE : DC, *différence des segments* BD, BE *de la base par la perpendiculaire* AB ; *alors,* (**367**) $BD = \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}DC$ *ou* $BE = \frac{1}{2}DE - \frac{1}{2}DC$ *; maintenant vous aurez* (**308**) *la perpendiculaire ou hauteur* AB *du triangle* $= \sqrt{AD^2 - BD^2}$ *ou, faites* (**1229**, 1° alt. ou **1235**) AD : sin. B (= R) :: BD : sin. BAD, *pour avoir ensuite* (**1231**, 2°) AB = AD × cos. BAD, *quand* R = 1, *c'est-à-dire, si vous opérez par nombres naturels, ou* $AB = \frac{AD \times \cos. BAD}{R}$ *si vous opérez par logarithmes, où log.* R = 10. *Enfin vous aurez surf.* $ADE = \frac{1}{2}(DE \times AB)$.



EX. Les données étant encore les mêmes que dans le dernier exemple ; on aura, d'après la règle :

AD = 402.5	AD = 402.5	DE = 505.3 = base
+ AE = 330.7	− AE = 330.7	÷ 2 = 252.65 = demi-base
= som. 733.2	= dif. 71.8	

```
DC=104.183178=dif. des segm.            ½DE=252.65
÷ 2= 52.091589=demi-dif.            +   ½DC= 52.091589
                                    ----------------------
                                    =seg.BD=304.741589
```

Sin. nat. trouvé=.7571220 correspond à 49° 12′ 40.0737″=BAD.

```
   DE:AD+AE::AD--AE:BD—BE (ou DC)
  505.3:733.2 ::71.8:104.183178+=DC
          71.8
        ------
         58656
         7332
        51324
        -------
505.3)52643.76(104.183178+(*)
      5053
      -----
       21137                      AD   :R::     BD     :sin. BAD
       20212                      402.5:1 ::304.741589:.7571220 –
       -----                                28175
         9256                               -----
         5053                                22991
         -----                               20125
         42030                               -----
         40424                                28665
         -----                                28175
          16060                               -----
          15159                                 4908
          -----                                 4025
            9010                                ----
            5053                                 8839
            -----                                8050
            39570                                ----
            35371                                 7890
            -----
             41990

Sin. nat. trouvé=.7571220                 Dif. de cos. pour 60″=2202
Sin. moindre suiv.=.7569951=49°12′        60″:2202:40.0737″:14707
                   --------                             2202
     Différence=      1269                            -------
   Dif. pour 60″=     1900                             801474
        1900:60″::1269:40.0737″                       801474
                       6                             801474
                     ----                            -------
               190)7614                          ÷6)882422
                   760                             =147070
                   ----
                    1400
```

(*) C'est parce que ce quotient doit entrer dans le calcul à faire pour trouver le sinus de l'angle BAD qu'il est nécessaire de porter les décimales assez loin pour s'assurer d'une exactitude suffisante dans les derniers chiffres de ce sinus.

AB = AD × cos. nat. BAD
BAD = 49° 12′ 40.0737″

Cos. nat. 49° 12′ =	.6534206
Dif. pour 40.07″ = —	14707
Cos. nat. de 49° 12′ 40.0737″	.65327353
× AD	402.5
	326636765
	130654706
	261309412
AD × cos. nat. BAD = AB =	262.942595825
× DE	505.3
	788827787475
	1314212979126
	1314712979125
AB × DE = 2 surf. ADE =	1328648936703
$\frac{1}{2}$ AB.DE =	66432.44683 = surf. ADE.

(1430) La surface trouvée d'aprés cette règle est de 66432.4468 mètres carrés. L'exactitude de ce résultat ne s'étend encore, comme on le voit, que jusqu'au 7ème chiffre, et il ne saurait en être autrement, puisque les sinus naturels dont on a fait usage et qui concourent, comme éléments, à la solution du problème, ne vont qu'à 7 chiffres, dont le dernier même est presque toujours trop fort ou trop faible suivant qu'il a été, ou non, augmenté d'une unité lorsque le chiffre suivant excède ou est moindre que 5.

(1431) Remarquons ici que cet exemple, dont on vient de faire le calcul. de trois manières différentes, permet de comparer la somme de travail que requiert chaque mode de solution, et met en mesure de choisir au besoin, ou le moyen le plus expéditif (le premier) ou celui qui admet la plus grande précision (le second), ou celui qui ne comporte pas l'extraction d'une racine (le troisième).

(1432) Il est à peine nécessaire de rappeler que ce problème, comme celui qui le précède, et comme ceux qui vont le suivre, peut aussi se résoudre au moyen d'une construction graphique qui permette d'établir à l'aide d'une échelle suffisamment subdivisée, la longueur ou valeur de la perpendiculaire AB en termes de la base ou des côtés; et c'est là assez souvent le plus court moyen, quoi que non le plus précis, d'arriver au résultat voulu.

PROBLÈME III.

Trouver la surface d'un trapèze. (*)



(1433) REGLE. *Faites* **(346)** *la somme des deux côtés parallèles : multipliez cette somme par la hauteur ou largeur du trapèze, et la moitié de ce produit sera la surface voulue.*

Ex. 1. Dans un trapèze, les côtés parallèles sont $10\frac{1}{2}$ et $12\frac{1}{4}$ pieds, et la distance perpendiculaire entre ces côtés 3 pieds 2 pouces. Quelle est la surface? **Rep**. $\frac{1}{2}(10\frac{1}{2}+12\frac{1}{4})\times 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2}(10.5+12.25)\times 3.166 = 11.375 \times 3.166 = 36.01325$ p. c.

2. On demande la surface d'une parcelle de terre dont les côtés parallèles mesurent respectivement 75 et 122 chaînons, et la perpendiculaire 154 chaînons? **Rep**. 1561 chaînons c.

3. Combien y a-t-il de pieds carrés de surface dans une planche dont la longueur est de $12\frac{1}{2}$ pieds, la largeur à une extrémité 15 pouces et celle de l'autre extrémité 11 pouces? **Rep**. $13\frac{6\frac{1}{2}}{12} = 13.541666+$

4. Combien de verges carrées dans un trapèze dont les côtés parallèles sont 240 et 320 pieds, et la hautenr 66 pieds? **Rep.** $2053\frac{1}{3}$.

5. Les côtés parallèles d'un terrain sont 12.41 et 8.22 chaînes, et la perpendiculaire 5.15 chaînes ; quelle est la surface en chaînes carrées? **Rep.** 53.37975.

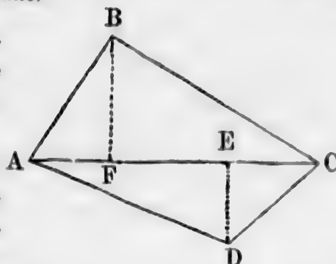
(*) Le trapèze **(172)** s'offre assez souvent, dans la pratique, au calcul du mesureur. Ainsi, la tablette intérieure d'une fenêtre dont les joues ou côtés sont d'ordinaire ébrasés, présente la forme d'un trapèze ; il en est de même du plafond d'une fenêtre, porte ou autre ouverture ébrasée ; et il est clair aussi que la surface développée ABCD, de la joue d'une ouverture cintrée en même temps qu'ébrasée peut encore être regardée comme une sorte de trapèze à bases parallèles curvilignes, mais dont on détermine également la superficie par la règle ici donnée, puisque cette figure n'est autre chose qu'un tronc ou partie d'anneau circulaire, et que le mode **(1145)** d'arriver à la surface de cette figure est analogue à celui qui enseigne à déterminer la surface du trapèze proprement-dit. Le trapèze se retrouve encore souvent dans le parquet ou plafond d'un appartement dont deux côtés seulement sont parallèles, à l'endroit d'une toiture de lucarne, d'une rampe d'escalier, d'une toiture ou plafond de mansarde et les joues d'une fenêtre rectangulaire affectent aussi cette forme quand le plafond ou la tablette en est inclinée ou ébrasée. Enfin, on est appelé très souvent à déterminer l'aire d'un terrain en forme de trapèze.



PROBLÈME IV.

Trouver la surface d'un quadrilatère.

(**1434**) **REGLE**. *Multipliez* (**351**) *l'une quelconque des diagonales* (**173**) *du quadrilatère, par la demi-somme des perpendiculaires abaissées des angles opposés sur cette base commune.*



Ex. 1. Quelle est la surface d'un quadrilatère BD dont la diagonale AC est de 42 pieds, et les perpendiculaires BF = 18 et DF = 16 pieds ? **Rep.** 714 p. c.

2. Combien de toises carrées de pavé y a-t-il dans un quadrilatère dont la diagonale est de 65 pieds et les deux perpendiculaires 28 et 33½ pieds ? **Rep.** 55.52083.

3. Combien y a-t il de mètres carrés de surface dans un terrein quadrangulaire dont une des diagonales est de 64 mètres, et les distances perpendiculaires de cette diagonale aux deux angles opposés, 28 et 32 mètres ? **Rep.** 1920 m. c.

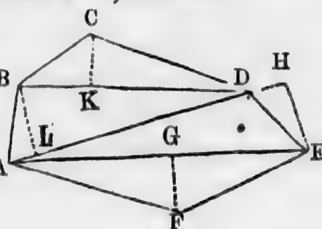
4. Déterminer le nombre de *carrés* de planchéiage qu'il faut pour couvrir un espace quadrilatère, dont la diagonale est de 108 pieds 6 pouces, et les perpendiculaires 56 pieds 3 pouces, et 60 pieds 9 pouces ? **Rep**. 63 *carrés*, $47\frac{3}{12}$ p. c.

5. On demande à établir le nombre d'arpents dans une terre de quatre côtés dont une des diagonales mesure 70.5 perches, et les perpendiculaires 26.5 et 30.2 perches ? **Rep.** 19 ar. 98.675 per.

PROBLÈME V.

Trouver la surface d'un polygone irrégulier.

(**1435**) **REGLE**. *Mesurez les diagonales qui diviseront le polygone donné en quadrilatères et triangles. Déterminez séparément les surfaces de ces figures composantes ; leur somme sera la surface voulue.*



Ex. 1. Déterminez la surface du polygone BE, dans lequel BD = 18½. CK = 12⅘, AD = 27½, BL = 9.5, EH = 14, AE = 40, et FG = 8.

Rep. ½ (BD × CK) = ½(18.5 × 12.8) = 118.40 = surf. BCD, ½(BL + EH) = ½(9.5 + 14) = 11.75 et surf. quadrilatère



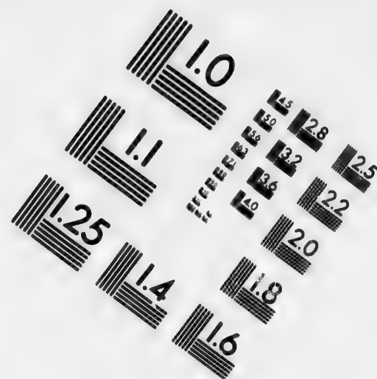
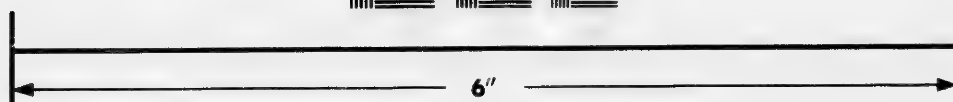
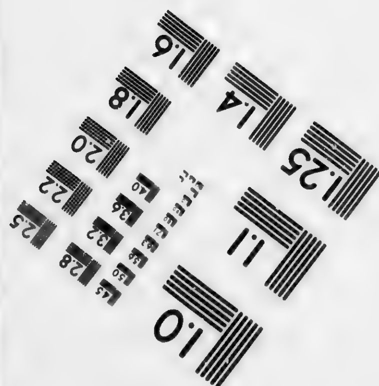
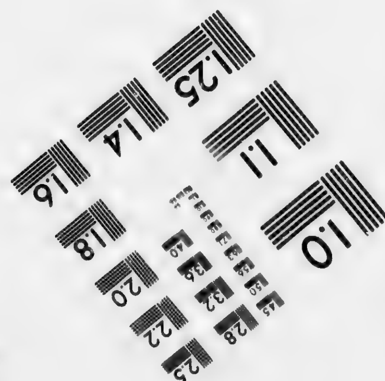
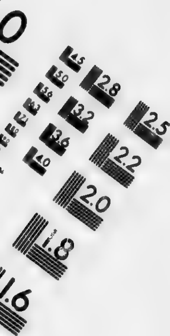


IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)








2.8
3.2
3.6
4.0
2.5
2.2
2.0
1.8
1.6


1.1
1.0

ABDE = AD × ½(BL + EH) = 27.5 × 11.75 = 323.125, surf. AEF = AE × ½FG = 40 × 4 = 160. Surf. ABCDEF = 118.40 + 323.125 + 160 = 601.525.

2. On demande combien il y a d'acres (l'acre est de 100,000 chaînons carrés) dans un terrain polygone BE dont les diagonales BD, AD et AE mesurent respectivement 13 chaînes (la chaîne linéaire est de 100 chaînons), 33 chaînons, 13 chaînes 99 chaînons, et 14 chaînes 13 chaînons, et dont les perpendiculaires CK = 173 chaînons, BL = 2 chaînes, EH = 2½ chaînes et FG 3¾ chaînes.

Rep. BD × CK = 1332 × 173 = 230609 ÷ 2 = 115304½ = surf. BCD.
AD × BL = 1399 × 200 = 279800 ÷ 2 = 139900 = surf. ABD.
AD × EH = 1399 × 220 = 307780 ÷ 2 = 153890 = surf. ADE.
AE × FG = 1413 × 375 = 529875 ÷ 2 = 264937½ = surf. AEF.

2) 13.48064 6.74032 = surf. ABCDEF.

6.74032 c-à-d. 6 acres et 74032 chaînons c.
ou 6 acres 2 vergées (*roods*) et 24032 chaînons (la vergée étant le quart de l'acre, c'est-à-dire, 100000 ÷ 4 = 25000 chaînons)
ou 6 acres, 2 vergées, 38 perches, et 282 chaînons (la perche linéaire étant le quart d'une chaîne, c'est-à-dire, 25 chaînons, et la perche carrée par conséquent = 25 × 25 = 625 chaînons carrés. (*)

(*) La chaîne de Gunter est de 66 pieds anglais, divisée en 100 chaînons, dont chacun est en conséquence = 66 ÷ 100 = 7.92 pouces anglais. L'acre équivaut à 1 chaîne × 10 chaînes = 10 chaînes carrées = 4 perches × 40 perches = 160 perches carrées = 100 chaînons × 1000 chaînons = 100,000 chaînons carrés. L'avantage de cette division de la chaîne de Gunter en 100 parties consiste en ceci que toutes les dimensions qu'elle sert à établir, sont immédiatement applicables et sans réduction au calcul décimal. L'opération faite, on sépare 5 décimales, les chiffres restants à gauche étant alors des acres, puisqu'il y a 100,000 chaînons dans l'acre et que séparer 5 chiffres équivaut à diviser par 100,000. Il est clair aussi que pour les vergées on n'a qu'à multiplier d'abord le reste par 4 pour séparer encore 5 chiffres, ce qui équivaut à diviser de suite par 25,000 (nombre de chaînons dans une vergée) et est de beaucoup plus expéditif. Pour les perches, on multiplie ensuite le second reste par 40, pour séparer encore 5 chiffres, puisque la perche est la 40ème partie de la vergée ; ou si l'on voulait négliger les vergées, on multiplierait de suite le premier reste par 160 (4 × 40 dont on retrancherait de même 5 chiffres. Le dernier reste .45120 est évidemment une fraction de perche, c'est-à-dire, $\frac{45120}{100000}$ de perche ; or la perche carrée étant de 625 chaînons, $\frac{1}{100000}$ de 625 = .00625 et ce nombre multiplié par le numérateur .45120 donne les 282 chaînons de la réponse ; c'est-à-dire que pour les mailles on multiplie tout simplement le dernier reste par 625 et l'on sépare encore 5 décimales.

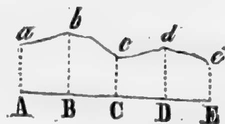
PROBLÈME VI.

Déterminer la surface d'une figure longue et irrégulière bornée d'un côté par une ligne droite. (*)

(1436) REGLE. 1° *Mesurez, à chaque extrémité de la ligne droite, la largeur perpendiculaire de la figure; mesurez aussi cette largeur à plusieurs points intermédiaires également éloignés l'un de l'autre.*

2°. *A la demi-somme des largeurs extrêmes ajoutez la somme des largeurs intermédiaires; multipliez alors la somme ainsi obtenue par l'une des parties égales de la ligne de base: le produit sera la surface voulue à très près.*

Soit AEea une figure irrégulière ayant pour base la droite AE. Aux points A, B, C, D et E, également éloignés l'un de l'autre, élevez les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, Ee et désignez ces perpendiculaires par les lettres a, b, c, d, e.



Alors (**325**) la surface du trapèze ABba $= \frac{a+b}{2} \times$ AB,

la surface du trapèze BCcb $= \frac{b+c}{2} \times$ BC,

la surface du trapèze CDdc $= \frac{c+d}{2} \times$ CD,

et la surface du trapèze DEed $= \frac{e+d}{2} \times$ DE;

donc, leur somme, ou la surface de la figure entière est égale à

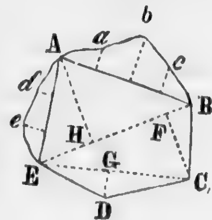
$$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+e}{2}\right) \times \text{AB},$$

puisque AB, BC, etc., sont égales entre elles. Or, cette somme est égale à

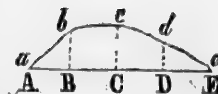
$$\left(\frac{a}{2} + b + c + d + \frac{e}{2}\right) \times \text{AB},$$

expression qui s'accorde avec l'énoncé de la règle.

(*) Les terrains qui avoisinent et sont bornés d'un côté par les sinuosités d'un chemin ou d'une rivière, etc., présentent souvent au calcul des figures de cette sorte; ou, après avoir déterminé par la méthode du dernier problème la superficie du polygone rectiligne ABCDE qui fait partie du pol. irrégulier AbBCDEedA, on se servira de la méthode du problème actuel pour obtenir les parties secondaires et irrégulières AabcB, AdeE.



(1437) Si Aa devient très petit, on n'en aura pas moins surf. AB$ba = \frac{a+b}{2} \times$ AB et si a et A se confondent en un même point, ou que le trapèze ABba devienne le triangle ABb, on aura $\frac{a+b}{2} = \frac{b}{2}$; dans ce cas il est clair que l'expression pour la surface de la figure AEedbA devient $\left(\frac{b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+d}{2} + \frac{d+e}{2}\right) \times$ AB, ou, ce qui est la même chose, $(b+c+d+\frac{1}{2}e) \times$ AB. Et si Ee devient aussi $=o$, l'expression pour la surface AEdbA prendra la forme $(b+c+d) \times$ AB.



Ex. 1. Les largeurs d'une figure irrégulière en 5 endroits également éloignés l'un de l'autre, étant 8.2, 7.4, 9.2, 10.2, et 8.6, et la longueur de la base = 40; quelle est la surface?

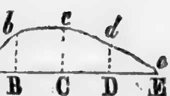
Une des largeurs extrèmes	= 8.2	La base entière	= 40
L'autre l'argeur extrême	= 8.6	Une des parties égales	= 40 ÷ 4 = 10
Somme des largeurs ext.	= 16.8	Somme des largeurs	= 35.2
Demi-somme	= 8.4	Multipliée par	10
1e Largeur ietermédiaire	= 7.4	= surface voulue	= 352
2e Largeur intermédiaire	= 9.2		
3e Largeur intermédiaire	= 10.2		
Somme des largeurs.	= 35.2		

2. La longueur d'une figure irrégulière étant de 84 mètres et les largeurs, en six endroits équidistants, 17.4, 20.6, 14.2, 16.5, 20.1, et 24.4 mètres; on demande la surface? **Rep.** 1550.64 m. c.

3. La longueur d'une lisière de terre est de 125 perches et sa largeur prise en 15 endroits différents et équidistants, est de 5.2, 4.6, 7.2, 8.3, 9.4, 8.1, 7.3, 7.9, 6.6, 7.2, 7.3, 8.4, 7.4, 6.5, et 5.8 perches. Quelle en est le contenu?

Rep. La somme des demi-largeurs extrêmes et des largeurs intermédiaires = 101.7, la longueur 125 ÷ 14 = 8.92857 et 8.92857 × 101.7 = 908.0556 perches carrées. (*)

(*) *Si la perche linéaire dont il s'agit ici est de* 18 *pieds français*, c'est-à-dire, le dixième d'un arpent, la surface qu'on vient de trouver équivaudra à 9 arpents carrés, 8.0356 perches carrées, car, comme on l'a déjà fait remarquer, l'arpent carré est de 10 × 10 perches = 100 perches carrées, et comme la perche carrée est de 18 × 18 = 324 pieds carrés (ou l'arpent carré de 324 × 100 = 32400 pieds carrés) on réduira au besoin la décimale .0356 de perche carrée en pieds carrés en multipliant par 324, ce qui donne dans cet exemple 11.53 pieds carrés. *Si*, au contraire *la perche linéaire était de* 16½ *pieds anglais*, c'est-à-dire celle de la chaîne de Gunter, on



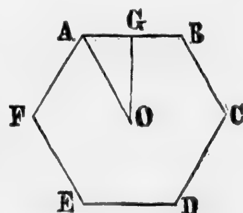
(1438) REM. Certains auteurs enseignent à déterminer la surface de la figure de ce problème en faisant le produit de la base entière AE par la moyenne des largeurs que l'on obtient en ajoutant ensemble toutes ces largeurs pour diviser ensuite leur somme par le nombre de ces largeurs. Cette règle est fautive, et cela, d'autant plus qu'il y a un moindre nombre de hauteurs ou de divisions dans la figure à estimer. L'erreur de cette méthode, dans le cas ou il n'y aurait que trois parties composantes et par conséquent quatre hauteurs ou largeurs, pourrait aller jusqu'à 25 pour cent en défaut de la surface exacte. Elle donne pour largeur moyenne, dans cet exemple, $107.2 \div 15 = 7.1466$ et $7.1466 \times 125 = 893.325$ perches carrées au lieu de 908.035; soit un défaut de près de 15 perches carrées de terrain.

PROBLÈME VII.

Trouver la surface d'un polygone régulier.

(1439) REGLE I. *Multipliez* **(663)** *le périmètre du polygone par son demi-rayon droit, et le produit sera la surface voulue.*

REM. Si le polygone n'est connu que par son côté, déterminez en d'abord le rayon droit de la manière suivante : Divisez 360° par le nombre des côtés du polygone proposé, et le quotient sera **(620)** l'angle au centre; c'est-à-dire, l'angle sous-tendu par l'un des côtés égaux. Maintenant les rayons droit et oblique du polygone forment avec le demi-côté un triangle rectangle dans lequel on connaît la base, c'est-à-dire le demi-côté. et l'angle aigu opposé, c'est-à-dire, le demi-angle au centre, pour trouver la perpendiculaire ou le rayon droit du polygone.



Ex. 1. Soit à trouver l'aire d'un hexagone régulier dont le côté est de 20 pieds ?

Rep. $360° \div 6 = 60$ et $60 \div 2 = 30°$ angle AOG, moitié de AOB. On a aussi $OAG = 90° - AOG = 60°$ et $AG = 10$; alors **(1235)** sin. AOG : AG :: sin. OAG : OG; d'où,

Sin.	AOG	30°	..........comp. ar. log.	0.301030
est à sin.	OAG	60°	....	9.937531
comme	AG	10	....	1.000000
est à	OG	17.32052	....	1.238561

---

aurait en divisant par 160, 5 acres, 108.0356 perches, et si l'on voulait ensuite traduire en pieds carrés, la décimale de perche, il est clair que la perche carrée étant de $16\frac{1}{2} \times 16\frac{1}{2} = 272.25$ pieds carrés (ou l'acre $= 272.25 \times 160$ ou 66×660 pieds $= 43560$ pieds carrés) il n'y aurait qu'à multiplier .0356 par 272.25 pour avoir 7.69 pieds carrés anglais.

Maintenant comme il y a 6 côtés, chacun égal à 20, on aura le périmètre $=20\times6=120$ et la surf. $=120\times\frac{1}{2}(17.32052)$ ou ce qui est la même chose $=17.32052\times\frac{1}{2}(120)=17.32052\times60=1039.23120$ p. c.

Ex. 2. Quel est le contenu superficiel d'un octogone dont le côté est 20? **Rep.** 1931.368.

Car l'angle au centre $= 360°\div8=45°$ dont la moitié 22° 30′ est l'angle AOG adjacent au rayon droit, et son complément OAG en conséquence $= 90°-0=67°.30$; or on a (**1231**, 3°) OG $=$ AG $\times$ tang. nat. OAG $=10\times2.41421=24.41421$ et surf. $=24.41421\times80$ (demi-pér.) $=1931.368$.

3. On demande l'aire d'un nonagone dont le côté mesure 8 pieds et la perpendiculaire menée du centre $=10.99$ pieds? **Rep.** 395.64 p. c.

4. Trouver l'aire d'un heptagone dont le côté $=19.38$ et le rayon droit $=28$? **Rep.** 1899.24.

5. Le côté d'un pentagone $=25$ mètres et la distance du côté au centre $=17.2$ mètres; quel est le contenu? **Rep.** 1075 m. c.

(**1440**) A l'aide de cette règle, on obtient aisément l'aire d'un polygone quelconque, c'est-à-dire d'un polygone d'un nombre quelconque de côtés. Ayant donc calculé et disposé sous la forme du tableau suivant, les aires relatives des divers polygones ayant pour côté l'unité ou 1; savoir:

Noms.	*Rayon du cercle circons.*	*Côtés.*	*Rayon du cercle ins.*	*Aires.*	*L'angle* OAB.
Triangle......	0.5773503	3	.. 0.2886751	.. 0.4330127	.. 30°
Carré........	0.7071068	4	.. 0.5000000	.. 1.0000000	.. 45
Pentagone....	0.8506508	5	.. 0.6881910	.. 1.7204774	.. 54
Hexagone....	1.0000000	6	.. 0.8660254	.. 2.5980762	.. 60
Heptagone ...	1.1523824	7	.. 1.0382607	.. 3.6339124	.. $64\frac{2}{7}$
Octogone.....	1.3065628	8	.. 1.2071068	.. 4.8284271	.. $67\frac{1}{2}$
Ennéagone...	1.4619022	9	.. 1.3737387	.. 6.1818242	.. 70
Décagone	1.6180340	10	.. 1.5388418	.. 7.6942088	.. 72
Undécagone..	1.7747324	11	.. 1.7028436	.. 9.3656399	.. $73\frac{7}{11}$
Dodécagone..	1.9318517	12	.. 1.8660254	..11.1961524	.. 75

Et parce que (**556**) les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, l'aire d'un polygone donné quelconque aura au carré de son côté le même rapport que l'aire du polygone de même nom et dont le côté est 1, au carré de l'unité; d'où, on a:

(**1441**) **REGLE II.** *Carrez le côté du polygone donné; multipliez alors ce carré par l'aire du polygone de même nom dont le côté est* 1: *le produit sera la surface voulue.*

Ex. 1. Quelle est la surface d'un hexagone régulier, dont le côté est 20?

Rep. $20^2=400$, l'aire de l'hexagone du tableau $=2.5980762$, et $2.5980762\times400=1039.2304800$, comme auparavant.

2. Déterminer le contenu superficiel d'un pentagone dont le côté est de 25 verges ? **Rep.** 1075.298375 v. c.

3. Le côté d'un décagone mesure 20 mètres; quelle est l'aire ? **Rep.** 3077.68352 m. c.

4. Trouver la superficie d'un dodécagone dont le côté est 6 ? **Rep.** 403.0614864.

5. Le côté d'un terrain en forme de triangle équilatéral mesure 3 arpents 7 perches et 6 pieds ; quel en est le contenu ?

Rep. $37\frac{1}{3}$ per. $\times\, 37\frac{1}{3}$ per. $= 1393\frac{7}{9}$ ou 1393.77777, $\times\, 0.4330127 = 603.$-5234787 ou 6 arpents carrés, $3\frac{1}{2}$ perches carrées à peu près.

PROBLÈME VIII.

Trouver la circonférence d'un cercle dont on a le diamètre, ou le diamètre d'un cercle dont on a la circonférence.

(1442) REGLE. *Multipliez* **(686)** *le diamètre par* 3.1416, *et le produit sera la circonférence ; ou divisez* **(687)** *la circonférence par* 3.1416, *et le quotient sera le diamètre.*

Ex. 1. Quelle est la circonférence d'un cercle dont le diamètre est 25 ? **Rep.** 78.54.

2. Si le diamètre de la terre est de 7921 milles, quelle en est la circonférence ? **Rep.** 24884.6136.

3. Déterminer le diamètre, dont la circonférence est 11652.1904 ? **Rep.** 3709.

4. On demande la circonférence, quand le diamètre est de 17 mètres ? **Rep.** 53.4072.

5. On donne la circonférence d'un cercle = 354 pieds pour en déterminer le diamètre ? **Rep.** 112.681.

REM. Le rapport 7 : 22 donnerait pour ce diamètre 112.636 ce dernier résultat est trop faible de $\frac{45}{1000}$ d'une unité ou de $\frac{4}{10000}$ du tout, et met en mesure de juger de l'exactitude relative des deux rapports.

PROBLÈME IX.

Trouver la surface d'un cercle.

(1443) REGLE I. *Multipliez* **(431)** *la circonférence par la moitié du rayon.*

REGLE II. *Multipliez* **(1024)** *le carré du rayon par* 3.1416.

REGLE III. *Multipliez* (dém. de **684**) *le carré du diamètre par* .7854.

Ex. 1. Quelle est la surface d'un cercle dont le diamètre est 10 ?
Rep. 78.54.

Si la diamètre était 100, la surface serait.................. 785.4
Si le diamètte était 1000, la surface serait.................. 7854

2. On a le diamètre 7 et la circonférence 21.9912 pour trouver la superficie du cercle ? **Rep.** 38.4846.

3. Combien y a-t-il de verges carrées dans un cercle dont le diametre est de $3\frac{1}{2}$ pieds ? **Rep.** 1.069016.

4. Le diamètre étant 7, quelle est l'aire du cercle ? **Rep.** 38.4846.

5. Trouver l'aire d'un cercle dont le rayon est de $30\frac{1}{2}$ perches ?
Rep. 2922.4734 perches carrées.

(1444) REGLE IV. *Multipliez le carré de la circonférence par .07958 : le produit sera la surface du cercle.* Car, soit c la circonférence donnée d le diamètre et $\pi = 3.14159$; alors **(686)** $c = \pi d$, et **(687)** $d = \frac{c}{\pi}$; de là l'aire du cercle $= \frac{\pi d^2}{4}$ puisque **(1024)** la surf. d'un cercle dont le rayon est $r = \pi r^2$ et que $d^2 = 4\ r^2$; mais puisque $d = \frac{c}{\pi}$, on a $d^2 = \left(\frac{c}{\pi}\right)^2 = \frac{c^2}{\pi^2}$; et comme $\frac{\pi\ d^2}{4} = \frac{1}{4}\pi\ d^2$, on a $\pi\frac{d^2}{4} = \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{c^2}{\pi^2} = \frac{c^2}{4\pi} = \frac{c^2}{4 \times 3.14159} = \frac{c^2}{12.56636} = c^2 \times \frac{1}{12.56636} = c^2 \times .07958.$

EX. 1. Trouver l'aire d'un cercle dont la circonférence est de 10.75 ?
Rep. 9.196463750.

2. Déterminer, en acres, la superficie d'un terrain dont la circonférence mesure un mille (soit 80 chaînes de Gunter $= 66 \times 80 = 5280$ pieds anglais) ? **Rep.** 50.9312.

PROBLÈME X.

Trouver la surface d'un anneau circulaire ou l'espace compris entre deux cercles concentriques. (*)

(1445) REGLE I. *Trouvez* **(1144)** *par le dernier problème les surfaces des deux cercles : leur différence sera la surface de l'anneau.*

REGLE II. *Multipliez* **(371)** *la somme des diamètres par leur différence : ce produit multiplié par* .7854 *sera la surface voulue.*

(*) Tel serait une allée autour d'un jardin circulaire, la coupe horizontale d'une colonne évidée, le plan-par-terre du mur d'une tour, une coupe perpendiculaire à l'axe d'un tuyau ou conduit, etc., etc.

REGLE III. *Multipliez la demi-somme des circonférences des deux cercles par la demi-différence de leurs diamètres, c'est-à-dire par la largeur de l'anneau, et le produit sera la surface demandée.*

Car chaque unité du diamètre correspond à 3.1416 unités de la circonférence ; donc, si a C $= a$ A $=$ une unité ou partie quelconque du diamètre A B ou C D, l'excédant de la circonférence $a\ b$ sur la circ. C D sera égal à l'excédant de A B sur $a\ b$; d'où a b est moyenne arithmétique (**1265**) entre circ. A et circ. C. Maintenant, (**428**) A E : $a\ c$: C F :: circ. A B : circ. $a\ b$: circ. C D ; donc $a\ c$ est moyenne arithmétique entre AE, CF ; et puisque l'arc AE, indéfiniment petit, peut être considéré (**430**) comme étant sensiblement une ligne droite, la partie A E F C de l'anneau circulaire peut être régardée comme un trapèze ; or, surf. trapèze A E F C = (**347**) $a\ c \times$ AC ; donc aussi, surface anneau A C = circ. $a\ b \times$ A C.

Ex. 1. Combien y a-t-il de pouces carrés dans la surface d'un anneau circulaire dont le diamètre extérieur est 30 pouces et la largeur $2\frac{1}{2}$ pouces ? **Rep.** 215.985.

2. Les diamètres de deux cercles concentriques sont 15 et 10 : quelle est l'aire de l'anneau que forment ces cercles ? **Rep.** 98.175.

3. On demande la surface de l'anneau dont les cercles contenants ont pour diamètres 9 et 5 ? **Rep.** 43.9824.

4. Les deux diamètres d'un anneau circulaire sont 21.25, et 9.75 ; quel en est le contenu superficiel ? **Rep.** 279.9951.

5. Déterminer la surperficie de l'espace compris entre deux cercles concentriques dont les diamètres sont 15 et 16 ? **Rep.** 24.3474.

(**1446**) Si les cercles A B, $a\ b$, n'avaient pas le même centre, comme c'est le cas pour une roue excentrique, il est clair qu'on aurait tout de même la surface de l'espace annulaire compris entre les cercles en faisant (Règle I) la différence de surface de chacun d'eux.

PROBLÈME XI.

Trouver la longueur d'un arc de cercle.

(**1447**) **REGLE. I.** *Multipliez le nombre de degrés dans l'arc proposé par.* 0087266 *et ce produit par le diamètre du cercle.*

REM. 1. Puisque la circonférence est 3.1416 quand le diamètre est 1, il suit que $3.1416 \div 360 = 0.0087266 =$ longueur (*) de l'arc d'un degré,

---

(*) On a déjà eu occasion de faire remarquer et il est d'ailleurs clair que l'exactitude d'un résultat est limité par celle des éléments qui y concourent ;

sous un diamètre égal à l'unité. Ce quotient multiplié par le nombre de degrés dans un arc, sera la longueur de cet arc dans le cercle dont le diamètre = 1 ; et ce produit multiplié par un diamètre quelconque donnera la longueur de l'arc dans un cercle de ce diamètre.

REM. 2. Puisque la minute est le 60ème du degré, et la seconde le 60ème de la minute ou le (60 × 60) 3600ème du degré ; si l'arc proposé contient des minutes, on réduira ces minutes en les divisant par 60 à la décimale d'un degré et si l'on a aussi des secondes, on réduira d'abord les minutes en secondes pour diviser ensuite le tout par 3600 ; ce qui traduira comme auparavant en décimales d'un degré la partie fractionnaire de l'arc.

Ex. 1. Le diamètre étant de 18 pieds, quelle est la longueur de l'arc de 30° ? **Rep.** 4.712364.

2. Trouver la longueur d'un arc de 12°.10′ ou $12\frac{1}{6}$°, sous un diamètre 20 ? **Rep.** 2.123472.

3. Dans un cercle dont le diamètre est de 68, quelle est la longueur de l'arc de 10°.15′ ou 10.25° ? **Rep.** 6.082396.

4. On demande la longueur d'un arc de 57° 17′ $44\frac{1}{2}$″ ; le rayon du cercle étant de 25 pieds ? **Rep.** 25 pieds.

Car 57° 17′ $44\frac{1}{2}$″ est la 3.1415926ème partie de 180°, c'est-à-dire la longueur du rayon en termes de la circonférence.

5. Déterminer, dans un cercle dont le rayon est 20, la longueur d'un arc de 45° 30′ 3″ ? **Rep.** 15.885.

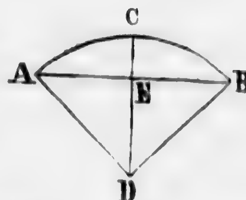
REM. 3. Si le nombre de degrés dans l'arc voulu n'était pas connu, on y arriverait facilement par la méthode du par. **(785)**. où la corde et la flèche de l'arc sont données pour trouver le reste.

(1448) REGLE II. *Déterminez* **(785)** *la longueur de la circonférence entière dont l'arc donné fait partie et établissez alors la proportion suivante, savoir :* 360° : *la longueur de la circonférence* :: *le nombre de degrés dans l'arc* : *la longueur de l'arc.*

Ex. 1. Sous un rayon 14, quelle est la longueur de l'arc de 60° ?
Rep. 14.6607720

---

il est donc à peine nécessaire de rappeler que suivant le degré de précision qu'on se propose, il peut devenir nécessaire de faire entrer en compte un nombre plus ou moins grand des décimales de l'unité de tel élément ; ainsi il est clair que la solution du problème dont il s'agit ici peut exiger que l'on remplace le rapport $\pi = 3.1416$ dont on se sert d'ordinaire par le rapport plus exact $\pi = 3.14159$, ou par le rapport encore plus approximatif $\pi = 3.141592$, $\pi = 3.1415926$, $\pi = 3.14159265$, etc., avec une décimale additionnelle du terme ou facteur π pour chaque décimale additionnelle de l'unité du résultat.



2. La corde A B d'un arc A C B est de 30 pieds et la hauteur ou sinus-verse E C est de 8 pieds ; trouver la longueur de l'arc ? **Rep** $35\frac{1}{3}$ pieds, près.

3. Quelle est la longueur de l'arc dont la corde est $48\frac{1}{2}$ et la flèche $18\frac{1}{4}$? **Rep.** 64.767 près.

4. Si la corde d'un arc mesure 20.386 perches, et son sinus-verse 4 perches ; quelle est la longueur de l'arc ? **Rep.** 22.402 perches près.

5. On demande la longueur d'un arc de cercle dont la corde est 40 et la hauteur 15 ? **Rep.** 53.33 près.

(1449) REGLE III. On démontre aussi que : *L'on obtient, à peu de chose près, la longueur d'un arc, en soustrayant de huit fois la corde de la moitié de l'arc, la corde de l'arc entier, pour prendre ensuite le tiers de la différence.*

Ex. 1. La corde d'un arc est de 36.75 et la corde de la moitié de l'arc 23.2 ; quelle est la longueur de l'arc ? **Rep.** 49.616 près.

2. Quelle est la longueur d'un arc dont la corde est 50.8 et la corde du demi-arc 30.6 ? **Rep.** 64.66 près.

REM. Quand on ne connaît que la corde et la flèche de l'arc entier, on obtient au besoin la corde de la moitié de l'arc égale **(305)** à la racine carrée de la somme des carrés de la flèche et de la demi-corde.

PROBLÈME XII.

Trouver l'aire d'un secteur de cercle.

(1450) REGLE I. *Multipliez* **(430.2°)** *l'arc du secteur par le demi-rayon.*

REGLE II. *Faites* **(429)** *l'aire du cercle entier, et établissez ensuite la proportion :* 360 *degrés : degrés dans l'arc du secteur :: l'aire du cercle entier : l'aire du secteur.*

Ex. 1. On demande l'aire d'un secteur, dont l'arc est de 18 degrés et le diamètre du cercle 3 pieds ? **Rep.** 0.35343.

2. Quelle est la surface d'un secteur dont l'arc est 20 et le rayon 10 ? **Rep.** 100.

3. L'arc d'un secteur est 147° 29′ et son rayon 25 ; quel est le contenu superficiel ? **Rep.** 804.3986.

4. Déterminer la surface d'un secteur, quand la corde de l'arc = 28 et la corde de la moitié de l'arc = 16 ? **Rep.** 275.39 près.

5. Le rayon du cercle étant 10, quelle est la superficie du secteur dont la corde de l'arc est 20 ? **Rep.** 113.3 près.

6. La corde de l'arc est 16 et sa hauteur 6 ; quelle est l'aire du secteur ? **Rep.** 88.873 près.

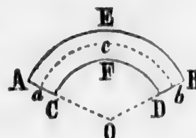
7. Trouver le contenu d'un secteur dont la hauteur de l'arc = 4 et le rayon = 8 ? **Rep.** 66.858 près.

PROBLÈME XIII.

Trouver l'aire d'un secteur d'anneau circulaire ou l'espace compris entre deux arcs de cercles concentriques.

(**1451**, **REGLE I**. *Multipliez* (dém. de **1445, R. III**.) *la demi-somme des arcs intérieur et extérieur du secteur par sa largeur ; c'est-à-dire par la largeur de l'anneau dont le secteur fait partie, ou, ce qui est la même chose, par la différence des rayons des arcs concentriques qui le contiennent.*

REGLE II. *Trouvez par le dernier problème les surfaces des deux secteurs concentriques : leur différence sera la surface voulue.*



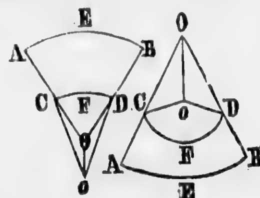
Ex. 1. L'arc AEB ou CFD d'un secteur AB d'anneau circulaire est de 30°, la largeur AC de l'anneau de $2\frac{1}{2}$ et le rayon AO de l'arc extérieur de 15 pouces ? **Rep.** La surface = 17.99875, soit 18 p. c.

2. Les deux rayons d'un secteur d'anneau circulaire sont 10.625 et 4.875 et l'angle au centre O ou AOB c'est-à-dire l'arc AEB est de 270° ; (**257**) on demande l'aire du secteur ? **Rep.** 209.996, soit 210.

3. Les arcs qui comprennent un secteur d'anneau circulaire sont 11 pieds 9 pouces et 10 pieds 3 pouces, et la largeur de l'anneau 13 pouces ; quelle en est la surface ? **Rep.** $11\frac{11}{12}$ p. c.

4. Déterminer la superficie de l'espace compris entre deux demi-cercles ayant un centre commun, et dont les diamètres mesurent 20 et 30 ? **Rep.** $39.270 \times 5 = 196.35$.

(**1452**) **REM.** Si les secteurs composants ABO, CD*o* n'avaient pas le même centre ; on ferait d'abord la surface de l'espace CFDO en ajoutant au secteur CFD*o*, ou en lui retranchant, suivant le cas, la somme des triangles CO*o*, DO*o*, pour prendre ensuite la différence entre AEBO et CFDO ; ce qui est clair.

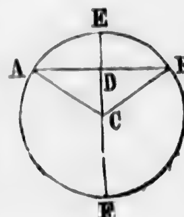


PROBLÈME XIV.

Trouver la surface d'un segment de cercle.

(1453) REGLE I. 1° *Trouvez* (**433**) *par l'avant dernier problème, l'aire du secteur de même arc.* 2° *Trouvez ensuite l'aire du triangle formé par la corde du segment et les rayons du secteur.* 3° *La somme de ces surfaces sera* (**434**) *celle du segment, si le segment est plus grand qu'un demi-cercle, et si le segment est moindre qu'un demi-cercle, sa surface sera égale à la différence de ces surfaces.*

Ex. 1. Trouver l'aire du segment AEB dont la corde AB est 12 et le rayon AC = 10.



AD	10	comp. ar. log.	9.000000
: AD = ½AB	6		0.778151
:: Sin. D	90°		10.000000
: Sin. ACD	36° 52′ = 36.87°		9.778151
	× 2		

= 73.74° = les degrés dans l'arc AEB.

Alors 73.74 × (**1455 REM. 1.**) 0 0087266 × 20 = 12.87 = longueur (près) de l'arc AEB et AEB × ½AC = 12.87 × 5 = 64.35 = surf. secteur AEBC.

Maintenant $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ et 6 × 8 = 48 surface du triangle ACB. De là, sect. AEBC − ABC = 64.35 − 48 = 16.35 = seg. AEB.

2. On demande l'aire du segment dont la hauteur est 18 et le diamètre du cercle 50 ? **Rep.** 636.4834.

3. La corde d'un segment = 16, le diamètre = 20 ; quelle est la surface ? **Rep.** 44.764.

4. L'arc d'un segment contient 90° sous un rayon = 9 ; quelle est la surface ? **Rep.** 23.1174.

5. Déterminer l'aire d'un segment dont la corde de l'arc est 24 et la corde de la moitié de l'arc = 13 ? Voyez (**536**) ou **539**). **Rep.** 52.53333.

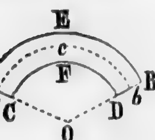
(1454) REGLE II. 1° *Divisez la hauteur ou le sinus-verse par le diamètre et trouvez le quotient dans la table des sinus-verses à la fin de ce volume.* 2° *Multipliez alors le nombre à la droite du sinus-verse par le carré du diamètre, et le résultat sera la surface demandée.*

(1455) La table dont il est question contient les surfaces ou aires des segments d'un cercle dont le diamètre est 1 et que l'on suppose divisé en 1000 parties égales. On y trouvera donc la surface d'un segment ayant pour hauteur la millième partie du diamètre, celle d'un segment dont la

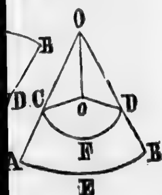
secteur dont la
113.3 près.
aire du secteur ?
88.873 près.
le l'arc = 4 et le
66.858 près.

pulaire ou
ercles

III.) *la demi-*
argeur ; c'est-à-
ie, ou, ce qui est
oncentriques qui



circulaire est de
l'arc extérieur de
5, soit 18 p. c.
10.625 et 4.875
le 270° ; (**257**)
996, soit 210.
ire sont 11 pieds
3 pouces ; quelle
ep. 11 1/12 p. c.
eux demi-cercles
0 et 30 ?
× 5 = 196.35.



hauteur égale les 2 millièmes du diamètre, celle du segment ayant pour hauteur ou sinus-verse les $\frac{3}{1000}$ du diam. et ainsi de suite jusqu'au segment dont la hauteur est de $\frac{500}{1000}$ du diam. c'est-à-dire jusqu'au demi-cercle en entier.

(1456) Il est clair que cette règle est analogue à la règle II du problème VII et qu'elle n'exige pas une démonstration spéciale ; car il suffit de rappeler, pour en faire comprendre l'exactitude, que dans deux cercles différents les segments semblables sont **(24)** ceux qui correspondent à des angles égaux au centre et dont les cordes (double-sinus **(1216)** des moitiés de ces angles) et les sinus-verses ont en conséquence entre eux le rapport des diamètres de ces cercles et que **(557)** ces figures semblables sont entre elles comme les carrés de ces diamètres.

(1457) Il est a peine nécessaire d'ajouter que s'il s'agisait d'un segment plus grand que le demi-cercle on n'aurait qu'à opérer sur l'autre segment, pour le retrancher ensuite du cercle entier, et si le quotient du sinus-verse donné par le diamètre ne se trouve pas dans la table, il sera facile de déterminer par une simple proportion la différence de surface correspondant à la partie fractionnaire de tel sinus.

Ex. 1. Le sinus-verse d'un segment de cercle étant 10 et le diamètre 50 ; trouvez l'aire du segment ?

Rep. $10 \div 50 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = .2$ = sinus-verse de la table ; l'aire qui correspond à ce sinus-verse est .111823 laquelle multipliée par 2500 le carré du diam. donne pour surf. du segment proposé 279.5575.

2. On demande la surface du segment dont la hauteur est 6 et le diam. du cercle 21 ?

Rep. $6 \div 21 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} = .285\frac{5}{7}$ = .sinus-verse de la table, auquel

correspond surf....	.184521
La surface qui correspond au sinus-verse plus grand suivant est..	.185425
La différence entre ces surfaces est........................	.000904
Cette différence × $\frac{5}{7}$, c'est-à-dire × 5 et ÷ 7 donne pour surf. cor. à $\frac{5}{7}$.	.000646
A laquelle j'ajoute la surf. qui cor. à 285..................	.184521
Pour avoir la surface entière du segment $285\frac{5}{7}$ de la table......	.185167
Maintenant, multipliant par le carré du diam. 21 × 21 = ...	441
On obtient pour surface du segment proposé..................	81.658647

3. Trouver l'aire d'un segment dont la hauteur est 2 et le diam. 52 ?

Rep. 26.88.

4. Le sinus-verse est 5 et le diam. 25 ; quelle est l'aire du segment ?

Rep. 69.889375.

5. La hauteur d'un segment est 9 pouces et le diam. $3\frac{1}{2}$ pieds ; trouvez la surface ? **Rep.** 205.4118 pouces carrés.

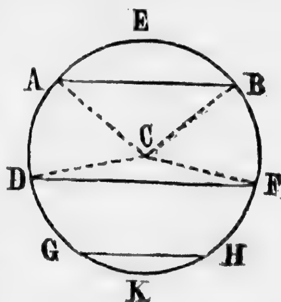
PROBLÈME XV.

Trouver la surface d'une zone de cercle, ou l'espace compris entre deux cordes parallèles quelconques et leurs arcs interceptés.

(1458) **REGLE I.** *Trouvez d'abord par la méthode du par.* (**574**; *etc., le diamètre ou rayon du cercle et les autres éléments du calcul à faire. Déterminez ensuite* (**435**) *séparément par les problèmes déjà donnés les surfaces des secteurs et des triangles composants, pour en prendre la somme, si la zone est centrale ; ou si la zone est soit centrale ou latérale, déterminez par le dernier problème les surfaces des deux segments ayant pour cordes les cordes de la zone ; la différence entre ces segments, ou entre le cercle entier et la somme de ces segments, sera la surface voulue.*

Ex. 1. Les deux cordes parallèles d'une zone sont 12 et 20 et leur distance perpendiculaire est 13 ; quelle est la surface ?

Rep. 252.87859.



2. Trouver l'aire d'une zone de cercle dont les cordes parallèles mesurent 12 et 16 et la distance entre elles 2 ?

Rep. 28.376.

3. Déterminez le contenu superficiel d'une zone dont les côtés sont 96 et 60 et la largeur 26 ? **Rep.** 2136.82.

4 Si les deux cordes parallèles d'une zone circulaire sont 20 et 15 et leur distance perpendiculaire 17.5 ; quelle est la surface ?

Rep. 395.4369.

5 On demande l'aire d'une zone dont chacune des cordes parallèles est 40 et la largeur 36 ?

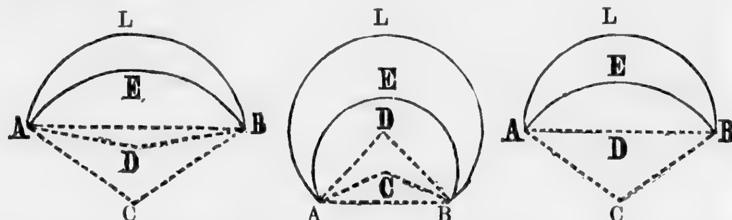
6 L'une des cordes parallèles d'une zone de cercle est de 30 et passe par le centre du cercle, l'autre est de 16 ; on demande la surface.

REM. On pourrait aussi considérer le segment donné comme composé du trapèze ABFD et des deux segments égaux AD, BF pour en déterminer de cette manière la surface.

PROBLÈME XVI.

Trouver la surface d'une lunule, ou l'espace compris entre les arcs de deux cercles excentriques qui s'intersectent.

(**1459**) **REGLE.** *Trouvez* (**436**) *par l'avant dernier problème les aires des deux segments qui vont à former la lunule : leur différence sera la surface requise.*



Ex. 1. La corde AB d'une lunule AEBLA est 20 et les hauteurs des segments composants AEB, ALB sont 5 et 8 ; quelle est la surface de la lunule ? **Rep.** 49.392704.

2. La corde = 20, et les hauteurs des segments 10 et 2 ; quelle est l'aire de la lunule ? **Rep.** 130.204.

3. Déterminer la surface d'une lunule dont la longueur de la corde est 48, et les hauteurs des segments 18 et 7 ? **Rep.** 408.608.

4. La base AB d'une lunule est 10 est les rayons AC, AD des deux arcs contenants AEB, ALB sont 7 et 6 ; trouvez la surface.

5. La corde d'une lunule étant 10 et les hauteurs des segments 15 et 13 ; quelle est la surface ?

PROBLÈME XVII.

Trouver (*) la circonférence d'une ellipse.

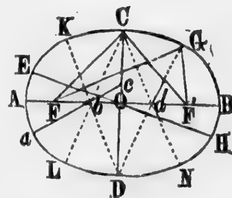
Cette figure que fait voir toute coupe FI, AD (**997**) ou FE, RN (**1099**) d'un cylindre, ou *be* (**1055**), *ac* (**1057**) d'un cône par un plan qui étant incliné à

(*) Quoiqu'on ne puisse à l'aide des principes dont il a été question jusqu'ici, donner une démonstration de cette règle et des quatre suivantes ; on a cru cependant devoir les insérer ici pour compléter les règles nécessaires au toisé des surfaces planes, ou de celles (**1140**, *D'ail.*) qui étant à simple courbure, peuvent se développer en surfaces planes.

l'axe de ces solides en rencontre les deux côtés, se présente fréquemment à la considération du mesureur. On la retrouve dans le cirque, l'amphithéâtre, le parterre, etc., et sur une plus petite échelle dans l'œil-de-bouc, etc., mais c'est surtout la demi-ellipse que l'on rencontre, dans la coupe des voûtes de toutes sortes, dans la tête cintrée d'une porte ou fenêtre, ou d'une ouverture arquée entre deux appartements, etc., etc.

(1460) On serait peut-être tenté de croire, au premier abord, que la circonférence de l'ellipse dût être une moyenne arithmétique entre les circonférences de deux cercles ayant pour diamètres respectifs les grand et petit diamètres de l'ellipse, ou ce qui est la même chose, que cette circonférence dût être égale à celle d'un cercle dont le rayon serait égal à la demi-somme des grand et petit rayons de l'ellipse, c'est-à-dire dont le rayon serait moyen arithmétique entre les demi-diamètres de l'ellipse ; et il en est à peu près ainsi pour les ellipses dont les diamètres ne diffèrent, l'un de l'autre que de 25 à 20 pour cent ; mais pour se persuader qu'il n'en est pas toujours ainsi, on n'a qu'à recourir à un cas extrême (comme on l'a déjà fait au par. (**828**)). En effet, supposons que pendant que le petit axe de l'ellipse est 1, le grand axe soit 1,000,000 ; il est évident que la circonférence d'une telle ellipse sera sensiblement égale au double de son grand diamètre, c-à-d. 2,000,000 pendant que la demi-somme 500000 + .5 ou 500000 (car on peut négliger le .5), des axes × 3.1416 = 1.570809 ; et si le petit diamètre était infiniment petit relativement au grand supposé égal à 2, la circonférence exacte serait 4, (double du grand axe) pendant que la circonférence moyenne arithmétique ne serait que de 3.14159 etc., l'erreur étant dans ce cas de 4 − 3 1416 = .8584 ou de près d'un quart. Mais, si l'on ne peut correctement obtenir la circonférence d'une ellipse, de cette manière, il est démontrable qu'on y arrive exactement par la méthode suivante :

(1461) REGLE I. *Multipliez la racine carrée de la demi-somme des carrés des deux diamètres de l'ellipse par.* 3.1416, *et le produit sera la circonférence voulue.*



Ex. 1. Le grand diamètre AB d'une ellipse est 15 et le petit diamètre 12 ; quelle en est la circonférence ?

Rep. $\left(\frac{AB^2 + CD^2}{2}\right)$ ½ (**39**) $=\sqrt{184.5} = 13.583$ et $3.1416 \times 13.583 = 42.6723528$.

2. Les grand et petit axes étant respectivement 24 et 20 ; déterminer la périphérie de l'ellipse ? **Rep.** 69.3979.

3. Les demi-diamètres d'une ellipse sont 12½ et 7½ ; quel en est le périmètre ? **Rep.** 64.7667.

(1462) Il est clair que *la demi-ellipse* CBD est égale en périmètre et en surface à la demi-ellipse ACB, et que chacune d'elles a pour mesure la

demi-circonférence et la demi-surface de l'ellipse entière. Cette règle et la suivante qui enseignent à trouver la circonférence et la surface de l'ellipse entière fournissent donc aussi le moyen d'*arriver au perimètre* ACB ou CBD *ou à la surface de la demi-ellipse* de même nom.

Il est de plus évident que tout autre diamètre EH divise l'ellipse en deux parties de même surface et de même périmètre.

(1463) *Il est une propriété importante de l'ellipse qui nous permet de la tracer avec facilité ou de découvrir si une figure curviligne qui ressemble à une ellipse en est une ou non ;* c'est que la somme FC + F′C, FG + F′G, des rayons menés de deux points F,F′ situés sur le grand diamètre et qu'on nomme foyers ou centres de l'ellipse, à un troisième point quelconque C ou G etc., sur sa circonférence, est constante et égale au grand diamètre AB ; or il est clair que cette propriété là même nous permet d'établir les foyers. En effet, les deux diamètres d'une ellipse quelconque étant donnés, du point C ou D extrémité du petit axe, comme centre et avec un rayon $CF = CF' = OA$ ou $OB = \frac{1}{2}AB$ on intersectera AB en F et F′ les foyers voulus ; puis, des points F et F′ comme centres, avec des rayons FG, F′G dont la somme $=AB$, c'est-à-dire, avec un rayon quelconque FG moindre que FB et un autre rayon F′G égal à la différence entre le premier rayon FG et le diamètre AB, l'on tracera des arcs dont les intersections en G donneront un point, et en répétant l'opération une suite de points par lesquels on fera passer une courbe qui sera l'ellipse voulue.

(1464) Ou, l'on fixera en F et F′ des aiguilles auxquelles on attachera les extrémités d'un fil d'une longueur telle que l'on ait $FC + F'C$ ou $FG + F'G = AB$; il suffira alors de tenir le fil tendu au moyen d'un crayon ou d'une pointe que l'on promènera tout autour des deux foyers pour compléter le tracé de l'ellipse.

(1465) *Pour faire la même opération sur une grande échelle ;* après avoir pris FG ou F′G à volonté, moindre que AF′ ou BF, mais plus grand que AF ou BF′, connaissant l'autre rayon$= AB - FG$ ou $AB - F'G$, suivant le cas, et FF′ étant aussi connu$= 2\,OF = 2\,\sqrt{CF^2 - CO^2} = 2\,\sqrt{OA^2 - OC^2}$ on n'aura qu'à calculer l'un FF′G ou F′FG des deux angles à la base du triangle GFF′ et mener l'un des deux rayons de la longueur voulue et sous l'angle requis pour donner un point G de la circonférence proposée ; cette opération répétée donnera une série de points par lesquels on fera passer une ligne qui sera la circonférence demandée. Observons aussi que l'on s'exempterait le mesurage du rayon GF ou GF′, en calculant chacun des angles en F et en F′ pour opérer ensuite une intersection G des directrices FG, F′G.

(1466) Ajoutons qu'une construction géométrique ou graphique sur une petite échelle aurait l'avantage de donner d'une manière plus expéditive et souvent assez exacte tous les angles GFF′, GF′F etc., nécessaires à la détermination des intersections ou points G du périmètre voulu.

(1467) *On trace encore l'ellipse comme suit :* Soit ac=AO ou BO le demi grand axe, ab=CO ou DO le demi petit axe. En faisant mouvoir la droite ac de manière à tenir le point c sur le diam. DC et le point b sur le diam AB, le point a décrira l'ellipse voulue. Dans la pratique la droite ac est une tige ou tringle quelconque, avec des aiguilles ou points saillants en a, b et c, et l'on dispose à l'endroit des diamètres AB, CD des tringles, rainures ou coulisses pour servir de guides aux points b et c.

(1468) REGLE II *Quand les diamètres ne sont pas très inégaux, on obtient assez correctement la circonférence de l'ellipse en faisant le produit de la demi-somme de ces diamètres par.* 3.1416.

Ainsi les trois derniers exemples calculés de cette manière donnent respectivement pour réponses 42.41 au lieu de 42.67, 69.11 au lieu de 69.40, et 62.83 au lieu de 64.76 ; c'est-à-dire que quand la différence entre les diamètres n'excède pas $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{4}$ ou quand les rapports entre les diamètres sont ceux de 5:6 ou de 4:5, l'erreur dans le résultat ne va pas au-delà de $\frac{1}{150}$ ou $\frac{1}{160}$, et lorsque la différence entre les diamètres est de $\frac{2}{3}$ ou que ces diamètres sont entre eux comme 15:25 l'erreur devient $\frac{1}{30}$ à peu près du résultat entier. Quand les diamètres sont entre eux comme 1:2, les circonférences obtenues par les deux règles sont entre elles comme 47.12:49.66, l'erreur étant dans ce cas $\frac{1}{20}$ près. Les diamètres étant comme 1:3, les circonférences sont à peu près :: 63 : 70, l'erreur étant dans ce cas de $\frac{1}{10}$ près. Quand les diamètres sont :: 1:5, les circonférences sont :: 94:113 et l'erreur de $\frac{1}{5}$ près. Enfin si les diamètres étaient entre eux :: 1:10 les périmètres seraient :: 173 : 223, et l'erreur de $\frac{5}{22}$ ou de $\frac{1}{4}$ près. Ce qui mettra en mesure de faire choix de l'une ou l'autre règle suivant le degré d'exactitude voulue dans le résultat.

REM. D'ailleurs il est clair qu'on pourrait aussi, après avoir trouvé la circonférence voulue, d'après cette seconde règle, la corriger par l'addition du taux d'erreur ou de défaut proportionné au rapport entre les diamètres, et tel qu'établi plus haut.

PROBLÈME XVIII.

Déterminer la surface d'une ellipse.

(1469) REGLE. *Multipliez le produit des deux diamètres par .7854 ; le résultat sera la surface voulue.*

Ex 1. Quelle est l'aire d'une ellipse dont les diamètres sont 24 et 18 ?

Rep. 24 × 18 = 432=AB × CD, et 432 × .7854 = 339.2928 = surf. ACBD.

2. Si les axes d'une ellipse sont 35 et 25, quelle en est l'aire ?

Rep. 687.225.

3. On demande l'aire d'un ovale dont la longueur est 70 et la largeur 50 ?

Rep. 2748.9.

4. L'axe majeur d'une ellipse mesure 840 chaînons, l'axe mineur 612 chaînons : on demande le nombre d'acres dans cette enceinte ?

Rep. 4 acres 6 perches.

(1470) REM. Puisque la règle donne pour surface de l'ellipse l'expression AB.CD × .7854 ou, ce qui est **(87)** la même chose $\left(\sqrt{AB.CD}\right)^2 \times$ .7854, il suit évidemment que *l'ellipse est égale en surface à un cercle dont le diamètre serait moyen proportionnel entre les deux diamètres de l'ellipse.* Soit d ce diam. moyen, on a $AB:d::d:CD$ et puisque **(104)** $AB^2:d^2::d^2:CD^2$ il est clair aussi que *la surface de l'ellipse est moyenne proportionnelle entre celles des cercles inscrit et circonscrit, c'est à dire entre celles de deux cercles ayant pour diamètres respectifs les deux diamètres de l'ellipse.*

(1471) REM. Aidés des deux règles qui enseignent à déterminer la circonférence et la surface d'une ellipse ; on pourra les substituer avec avantage à la méthode moins précise et plus longue du par. **(437)** dans l'estimation des périmètres et surfaces des bases curvilignes, c'est-à-dire **(1460)** elliptiques, du cylindre oblique et du tronc de cylindre **(997** et **1099)** ainsi que celles du cône oblique et du tronc de cône (**1055**, **1065**, **1067**, **1140** etc.)

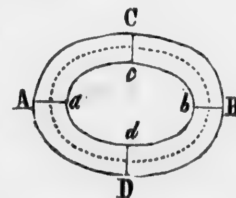
PROBLÈME XIX.

Trouver la surface d'un anneau elliptique.

(1472) REGLE I. *Déterminez séparément les surfaces des deux ellipses concentriques, et prenez en la différence qui sera la surface voulue.*

(**REGLE**) **II**. *Multipliez la demi-somme des circonférences parallèles des deux ellipses limitatives par la largeur de l'anneau.*

Ex. 1. Quelle est l'aire d'un anneau elliptique dont les diamètres intérieurs sont 10 et 20 et les diamètres extérieurs 12 et 22 ?



Rep. 10 × 20 × .7854 = 157.08, 12 × 22 × .7854=207.3456 ; la différence 50.2656 de ces deux résultats est la surface voulue de l'anneau.

2. La circonférence extérieure d'une ellipse est 100, la circonférence intérieure 90, la largeur de l'espace intermédiaire étant de 3.5 ; on demande la surface de l'anneau ? **Rep**. 332.5.

3. Déterminer la superficie d'un demi-anneau elliptique, dont les périmètres parallèles mesurent 93 et 77 pouces et la largeur 10 pouces ?

Rep. 850 pouces carrés ou 5.9028 pieds c.

4. Evaluer l'aire d'une partie quelconque *AacC* d'un anneau elliptique, dont l'arc extérieur AC est 15, l'arc parallèle *ac* 12, et la largeur 3 ?

Rep. 40.5.

REM. Il est à peine nécessaire d'observer que si la largeur de l'espace annulaire n'était pas partout égale, ou même si l'ellipse intérieure avait une position quelconque par rapport à son enveloppe extérieure, ou un rapport quelconque entre ses diamètres, on n'en obtiendrait pas moins la surface voulue par la première des deux règles de ce problème.

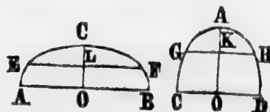
PROBLÈME XX.

Trouver la surface d'un segment d'ellipse dont la base est parallèle à l'un ou à l'autre axe de l'ellipse.

(1473) REGLE. *Divisez la hauteur du segment par celui des deux diamètres dont cette hauteur fait partie, et trouvez dans la table annexée à ce traité le segment de cercle dont le sinus-verse est égal au quotient. Faites alors le produit continu du segment ainsi trouvé et des deux axes de l'ellipse ; ce produit sera la surface voulue.*

Ex. 1. Evaluez l'aire du segment elliptique AGH dont la hauteur AK=10, et les deux axes AB, CD, 35 et 25 ?

Rep. 162.02.



2. Quelle est la surface d'un segment d'ellipse, dont la base GH est à 36 du centre O, les axes étant 120 et 40. **Rep.** 536.75.

3. Déterminez la surface d'un segment d'ellipse, dont la hauteur CL est 8 pouces ; les deux axes étant 4 et 3 pieds. **Rep.**

(1474) REM Si les segments d'ellipses ACD, *acd*, *ace*, de la fig. du par. (**1140**) répondent à la définition de l'énoncé de ce prob. on pourra au besoin faire l'application de la règle ici donnée pour en exprimer les surfaces. On estimerait de même au besoin la superficie du segment d'ellipse qui forme la surface supérieure de l'onglet fig. 2 du par. (**1143**.) Et si le segment à estimer était la partie AEFB, CGHD, on aurait la surface voulue égale à la différence entre les demi-ellipses ACB, CAD et leurs segments respectifs ECF, GAH.

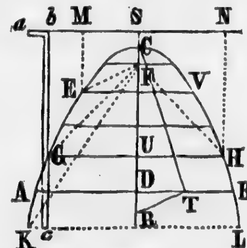
PROBLÈME XXI.

Trouver la surface d'une parabole.

(1475) Cette figure est celle que présente la coupe d'un cône droit par un plan parallèle à son côté incliné. (ADC, fig. du par. **(1140)** en donne une idée). Elle a ceci de particulier que tout point E, H, etc., de la courbe est également éloigné d'un point F qu'on appelle foyer et d'une droite M N perpendiculaire à l'axe CD) qu'on appelle directrice et dont la distance SC du sommet C de la parabole est égale à la distance FC du foyer au sommet; c'est à dire que l'on a toujours EF=EM, HF=HN, etc; or on démontre que l'endroit F du foyer se trouve en bissectant BD en T, joignant CT, et menant TR perpendiculaire à CT pour avoir DR=CF=CS. Le foyer F trouvé et la position de la directrice MN déterminée, on trace la courbe en menant une série de droites indéfinies GH (appelées ordonnées) parallèles à AB ou perpendiculaires à l'axe CD; puis, du foyer F comme centre et avec un rayon US égal à la distance entre les parallèles GH, MN on intersecte GH en G et H, ce qui détermine deux points dans le périmètre de la parabole. Cette opération suffisamment répétée donnera une série de points, par lesquels on fera passer une courbe qui sera la figure voulue.

(1476) On trace encore la parabole à l'aide d'une équerre *abc*, dont la branche *bc* est égale à la distance de la directrice MN à la base KL de la parabole proposée. A l'extrémité *c* de l'équerre et au foyer F, l'on attache un fil *c*GF égal en longueur à *cb*. On glisse alors la branche *ab* de de l'équerre le long de la directrice MN en tenant en même temps le fil tendu le long de la branche *bc*, au moyen d'une pointe ou crayon dont le mouvement décrit la parabole voulue.

(1477) REGLE. *Multipliez la base par la hauteur et prenez les deux tiers du produit pour la surface voulue.*



Ex 1. Trouver la surface de la parabole ACB dont la base AB est 20 et la hauteur CD 18 ?

Rep. 240.

2. La base d'une parabole est 13.5, et la hauteur 11.25; quelle en est l'aire?

Rep. 101.25.

3. CD=10, AD=8; quelle est la surface?

Rep $106\frac{2}{3}$.

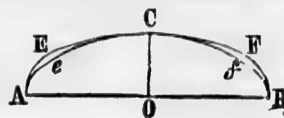
(1478) REM. Il suit de la définition de la parabole que toute partie GCH, ECV de la parabole ACB terminée par une base GH, EV, parallèle à AB, est encore une parabole, et non un simple segment, comme dans le cas de l'ellipse; car le cône peut-être sensé coupé par un plan parallèle à sa

base et cela tant en deçà qu'au delà de cette base en KL sans cesser d'être un cône et par conséquent, sans que la définition de la section KCL ou ECV, etc, en soit aucunement altérée.

D'où, il résulte que pour arriver à la surface d'un segment AEVB de parabole par une ligne quelconque EV parallèle à sa base, on n'aura qu'à prendre la différence des paraboles entière et partielle ACB, ECV.

(1479) Il y a encore, **l'hyperbole**, (section d'un cône par un plan qui en rencontre la base sous un angle plus grand que celui que fait le côté du cône avec cette base) la **cycloïd** (que fait décrire à un point situé sur la circonférence d'un cercle maintenu dans un même plan, une révolution entière du dit cercle le long d'une droite qu'on appelle base de la courbe) **et** plusieurs **autres figures curvilignes**, dont on peut avoir à évaluer les surfaces et périmètres, et pour lesquelles il existe des règles spéciales qui permettent d'en établir avec toute la précision voulue les aires et circonférences relatives ou absolues ; mais on remarquera ici, comme on l'a déjà fait (**1136**) qu'il y aura généralement à s'enquérir tout d'abord de l'espèce même de la figure proposée ; et le travail seul qu'exigerait cette opération préliminaire serait souvent suffisant pour décider de recourir de suite à la méthode du problème suivant.

(1480) Un œil même exercé aura souvent peine à se rendre compte de la nature de la figure à estimer, et l'on commettra parfois d'assez graves erreurs en s'y méprenant. Il y a par exemple la courbe AECFB, dite *anse-de-panier* et d'autres de cette sorte qu'on retrouve souvent dans la coupe d'une voûte et dans la

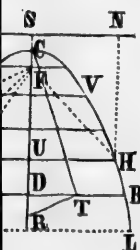


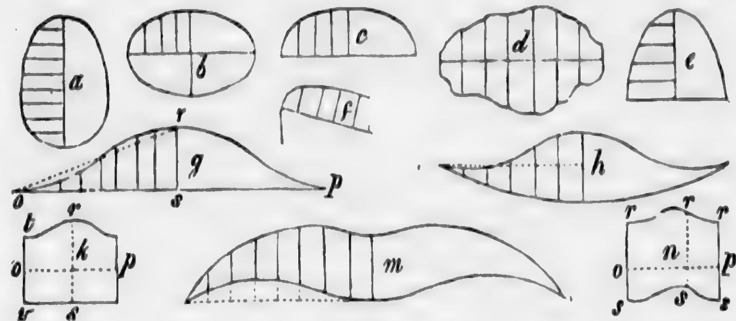
tête cintrée d'une ouverture, et qu'on serait peut être quelquefois tenté de prendre pour une ellipse, afin d'en évaluer le contenu superficiel d'après la règle applicable à cette figure ; or, l'on voit que dans le cas actuel la différence AECe + BFCf (ou 2 AECe) entre les deux figures peut être trop considérable pour permettre de la négliger.

PROBLÈME XXII.

Déterminer la surface d'une figure curviligne quelconque.

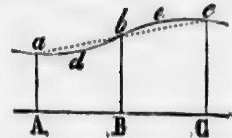
(1481) REGLE. *Divisez la figure entière si elle est irrégulière, (c'est à dire si les parties correspondantes ne sont pas symétriques) la moitié ou le quart, si elle est régulière, en trapèzes de même largeur ou hauteur, et procédez ensuite à la manière du problème VI., doublant ou quadruplant au besoin la surface ainsi trouvée pour avoir l'aire entière de la figure.*



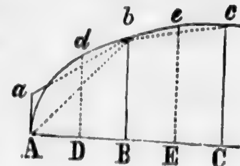


(*)

(1482) La méthode d'évaluation par trapèzes, sera d'autant plus exacte qu'il y aura dans la figure à estimer des concavités et convexités *adb*, *bec*, compensatoires l'une de l'autre, comme l'on en remarque dans les figures *g*, *h*, *m*, *k*, puisque alors le segment *bec* qu'on néglige en considérant comme trapèze la partie BC*ceb* de l'aire à évaluer, sera compensée ou remplacée par le segment *adb* qui est de trop dans le trapèze AB*ba*.



(1483) Mais quand la figure sera toute convexe on ajoutera à la précision en faisant entrer en compte la somme des segments *abd*, *bce*, etc. dont on fixera à l'œil ou autrement la largeur moyenne que l'on multipliera par le périmètre correspondant *adbec* pour en avoir la surface.



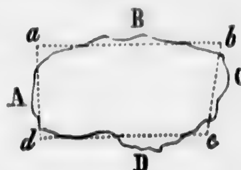
(1484) Observons aussi que au lieu de regarder comme nulle la hauteur

---

(*) Parmi ces figures, *a* est l'ove ou ovale ; (telle est la coupe verticale de l'œuf, etc.,) *b* est l'ellipse, (telle est la coupe du melon, etc.,) ou toute autre figure analogue, l'œil-de-bouc, la coupe du sphéroïde, l'amphithéâtre, etc. ; *c* est la demi-ellipse, anse-de-panier, cycloïde, tête cintrée surbaissée d'une ouverture, coupe d'une voûte, etc. ; *d*, une figure curviligne irrégulière quelconque ; *e*, une parabole ou autre figure analogue, hyperbole, tête cintrée surhaussée d'une ouverture, coupe d'une voûte, coupe verticale d'un conoïde, d'un dôme, etc. ; *f* est l'arche rampante ou la coupe d'une voûte inclinée : *g* est la surface latérale ou convexe développée d'un onglet de cylindre droit ; *h*, la surface latérale développée d'un onglet de cône droit ; *m* le développement de la surface d'un onglet de cylindre ou de cône oblique. Les lunettes ou intersections de voûtes, dont on a fait déjà mention à l'article (**1143**) présentent aussi des surfaces dont le développement offre à la considération du mesureur les trois dernières figures que l'on vient de définir. La surface latérale développée d'un tronc de cylindre droit présente la forme *k*, et il suit du par. (**997**) et de la dém. du par. (**1099**) qu'il suffit de multiplier la demi-somme de sa moindre et de sa plus grande hauteur *tr*, *rs*, par la

initiale de la figure, à l'endroit A de la naissance de la courbe, ce qui donnerait pour aire de la partie ABbdaA de la fig. le triangle ABb, on obtiendra plus d'exatitude en regardant comme ligne droite la partie presque verticale Aa de la courbe, ce qui donnera alors pour surface plus approximative de cette partie composante de la fig. le trapèze AabB au lieu du triangle AbB.

Il est clair aussi qu'une subdivision continue Dd, Ee, et suffisante pour permettre de considérer comme étant sensiblement des lignes droites les parties *ad*, *db*, *be*, etc., de la circonférence convexe ou concave de la fig. aura aussi l'effet d'ajouter singulièrement à l'exactitude du résultat.



(1485) Il est encore un moyen assez correct et expéditif d'arriver à la surface d'une figure irrégulière ABCD, celui de la réduire en une figure régulière ou rectiligne équivalante quelconque par des lignes compensatoires *ab*, *bc*, c'est à dire telles que la somme des parties exclues par ces droites soit égale en surface à la somme des parties comprises dans leur enceinte, opération graphique ou mécanique pour l'exactitude de laquelle on s'en rapportera souvent à une appréciation oculaire.

(1486) Enfin, pour ce qui est de l'évaluation des longueurs développées des périmètres des figures dont il s'agit ici, remarquons encore comme on l'a fait, page 596, que la manière souvent la plus expéditive et non la moins exacte d'y arriver, consistera dans l'emploi d'un fil ou galon ou de tiges ou tringles en bois ou en métal assez minces pour permettre de les ajuster aux périmètres à estimer, afin d'en déduire de suite les dimensions voulues.

Passons maintenant au

Toisé des corps ou solides.

(1487) Le toisé des solides, comprend celui de leurs surfaces et celui de leurs volumes ou solidités.

On a déjà vu que l'unité de mesure pour les surfaces planes est un carré dont le côté est l'unité de longueur.

---

longueur *op* perpendiculaire à *rs* ou *vt*, cette largeur étant évidemment égale à la circonférence développée d'une section du cylindre par un plan perpendiculaire à son axe ou côté. Le développement de la surface latérale d'un cylindre oblique (**997**) présente la figure *n*, dont la hauteur *rs* qui est celle du côté incliné du cylindre, est partout uniforme. l'aire de l'enveloppe étant par conséquent égale au produit de *rs* par la largeur *op*, périmètre d'une section perpendiculaire à l'axe ou au côté du solide.

Il est utile de dire aussi que si l'onglet de cylindre droit dont la fig. *g* est l'enveloppe, au lieu d'être partiel comme KLNE ou KLRF page 409, est entier ou complet comme ADd, page 388, on aura la superficie de *g* en faisant le produit de *op* par la moitié de *rs*, car dans ce cas *g* ne sera autre qu'une enveloppe *k* de tronc de cylindre dont la moindre hauteur *vt* serait égale à zéro.

L'on réfère aussi à une unité de longueur une ligne courbe exprimée en nombres, et sa valeur numérique est le nombre de fois que la ligne contient son unité. Il y a aussi lieu d'observer ici que la règle déjà donnée (page 177, 2°) pour trouver le rapport numérique entre deux lignes droites ou pour en déterminer la commune mesure ou le plus grand commun diviseur, s'applique également à deux lignes courbes quelconques de même rayon puisque cette égalité de courbe permettra la superposition et la coïncidence entière et parfaite de ces lignes tout de même que si elles étaient droites. Maintenant si l'on suppose que l'unité linéaire soit réduite à une ligne droite et que sur cette ligne l'on construise un carré, ce carré sera l'unité de mesure pour les surfaces courbes.

(1488) L'unité de volume est **(1014)** un cube dont la face composante est égale à l'unité superficielle qui sert à estimer la surface du solide, et le côté égal à l'unité linéaire dont on a fait usage pour en exprimer les dimensions linéaires.

PROBLÈME I.

Trouver la surface d'un prisme (*) droit.

(1489) **RÈGLE** *Multipliez* **(992)** *le périmètre de la base par la hauteur et le produit sera la surface latérale. A cette surface ajoutez celles des deux bases, quand la surface entière est requise.*

Ex. 1. Quelle est la surface d'un cube dont le côté est 20 ?

Rép. 2400.

(*) Le prisme, qui comprend aussi le cube et le parallépipède, se présente tous les jours au calcul de mesureur. On le voit dans le corps principal et les ailes d'édifices de toutes sortes, ainsi que dans la figure des divers appartements qui en font partie. On le retrouve encore dans les murs, piliers et trumeaux de constructions de toute espèce et sur une plus petite échelle dans chacune des pierres ou briques composantes de ces corps. Les toits à pignon présentent le plus souvent la figure du prisme triangulaire droit et les pignons mêmes des murs qui en forment les bases parallèles sont aussi des prismes de même nom. Le corps ou carré d'une lucarne de mansarde n'est autre chose d'ordinaire qu'une prisme triangulaire ou demi-parallépipède droit et le toit d'une lucarne, s'il est en croupe, est un prisme triangulaire oblique pourvu que l'inclinaison de la croupe soit égale à celle du toit et si le plan de la croupe n'est pas parallèle à celui du toit, c'est alors un tronc de prisme dont on a à évaluer le contenu solide et superficiel. Il y a encore dans les arts et métiers mille et un objets qui affectent la forme du cube, du parallépipède droit, oblique ou tronqué, du prisme polygone droit, oblique ou tronqué ou qui peuvent se décomposer en solides de cette espèce. Les déblais et remblais pour voies ferrées et autres présentent encore assez souvent à la considération du mesureur des prismes quadrangulaires ayant pour bases parallèles des trapèzes.

2. Déterminer la surface entière d'un prisme triangulaire, dont la base est un triangle équilatéral ayant 18 pouces de côté, et la hauteur 20 pieds ?

Rep. 91.949 pds. carrés.

3. On demande le poids du cuivre nécessaire pour couvrir l'intérieur d'une citerne dont la longueur mesure 10 pieds, la largeur 5 pieds et la hauteur ou profondeur 4 pieds, le cuivre à employer étant de 5 livres au pied carré ? **Rep.** 850 livres.

4. Combien y-a-t-il de mètres carrés dans la surface latérale d'un corps de bâtisse dont la longueur est de 100 mètres, la largeur 23.3 mètres et la hauteur 17 mètres ? **Rep.** 4192.2.

5 Un appartement mesure 40 pieds sur 25, et sa hauteur est de 15 pieds ; combien faudra-t-il de verges carrées d'enduits pour en recouvrir les quatre pans et le plafond ? **Rep.** 327$\frac{7}{9}$.

6 Quel serait le coût de garnir en plomb de 7 livres au pied et à 8 sous la livre, l'intérieur d'un vaisseau rectangulaire dont la longueur est de 3 pieds 2 pouces, la largeur 2 pieds 8 pouces, et la hauteur 2½ pieds?

Rep. Surface à couvrir $= 37.\frac{7.333+}{12}$ pieds carrés, $=263\frac{5}{18}$ livres, $=$ £4.7.9½d.=\$17.55.185.

7. Quelle est la surface latérale d'un madrier de 10 pieds, sur 12 pouces, sur 3 pouces. **Rep.** 25 pd. car.

8. Combien de pieds superficiels de pierre taillée dans la surface latérale d'un pilier octogone dont le côté est 15 pouces et la hauteur 10 pieds ?

Rep. 100.

9. Combien faudra-t-il de carrés de lambris pour couvrir la surface latérale d'un édifice hexagone dont le rayon oblique est de 20 pieds et la hauteur 33 pieds ? **Rep.** 39.60.

10. Quelle est la surface latérale d'un poteau polygone de 3 pieds de périmètre et 10 pieds de hauteur. **Rep.** 30 pieds carrés.

11. Le périmètre d'une barre de fer est 3¾ pouces, sa longueur 7 pieds ; quelle en est la superficie latérale ?

Rep. $3.75 \times 84=315$ pouces carrés.

PROBLÈME II.

Trouver le volume d'un prisme droit.

(1490) REGLE. *Déterminez d'abord la surface de la base ; multipliez ensuite cette surface par la hauteur ; le produit sera* **(1020)** *le volume du prisme.*

Ex. 1. Quel est le contenu solide d'un cube dont le côté est 24 pouces ?

Rep. 13,824.

2. Combien y a-t-il de pieds cubes dans un bloc de marbre dont la longueur est 3 pieds 2 pouces, la largeur 2 pieds 8 pouces et la hauteur ou épaisseur $2\frac{1}{2}$ pieds ? **Rep.** $21\frac{1}{9}$.

3. Combien de gallons d'eau pourra contenir une citerne des dimensions de l'exemple précédent, le gallon étant de 282 pouces cubes ?

Rep. $129\frac{17}{47}$.

4. Quel est le volume d'un prisme triangulaire dont la hauteur est 10 pieds, et les trois côtés de sa base triangulaire 3, 4 et 5 pieds ?

Rep. 60.

5. On demande le nombre de pieds cubes de pierre dans un pilier de 15 pieds de hauteur et dont la base est un hexagone régulier ayant 1 pied 4 pouces de côté ? **Rep.** 69.282.

6. Déterminer le nombre de toises de maçonnerie, (la toise étant de $6 \times 6 \times 2 = 72$ pieds cubes) dans un prisme octogone de 12 pieds de hauteur et 3 pieds de côté ? **Rep.** 7 toises 17.47 pieds cubes.

7. Le pilier ou trumeau qui sépare deux fenêtres ébrasées, et dont la base est en conséquence un trapèze, mesure 13 pieds de hauteur, 2 pieds d'épaisseur, 9 pieds de largeur en dehors et 7 pieds de largeur en dedans ; on demande le nombre de briques qu'il a fallu pour le construire, à raison de 20 briques au pied cube ? **Rep.** 4,160.

8. Un pignon en pierre de l'épaisseur de 3 pieds, mesure 40 pieds de base et 20 pieds de hauteur ; combien contient-il de verges cubes de maçonnerie ?

Rep. $44\frac{12}{27}$.

9. La façade d'un édifice est de 33 mètres, sa hauteur de 17 mètres et l'épaisseur du mur 73 centrimètres ; quel en est le volume en mètres cubiques ?

Rep. $33 \times 17 \times .73 = 409.53$.

10. On demande le nombre de mètres cubes dans un remblais dont la longueur est de 100 mètres, et dont chacun des plans parallèles qui en constituent les extrémités est un trapèze ayant pour bases parallèles 3 mètres et 13 mètres et pour hauteur 3.3 mètres ? **Rep.** 2640.

11. Un puits doit avoir 27 pieds de profondeur, et le plan doit en être un hexagone régulier dont le rayon du cercle circonscrit soit de 5 pieds ; combien y aura-t-il de verges cubes de roc à miner pour donner les dimensions voulues ? **Rep.** Le côté de l'exagone est (**643**) 5 pieds ; $5^2 = 5 \times 5 = 25$, et 25×2.5980762 (surface (**1441**) de l'exagone dont le côté est 1) = 64.9519 pieds carrés = surface de l'exagone donné, et $\frac{64.9519 \times 27}{27} = 64.9519$ verges cubes.

Ex. 12. Quelle est la solidité d'une barre de fer rectangulaire de $4\frac{1}{2} \times 1$ pouces et de 14 pieds de longueur ?

Rep. 756 pouces cubes.

13. On demande le volume d'un poteau à huit faces dont la hauteur est de 10 pieds et la largeur de chaque face 7 pouces ?

Rep. $\overline{7 \times 7} \times 4.8284271 =$ (**1441**) surf. de la base$=236.5929279$, et $\times 120=28391.15$ pouces cubes, et $\div 1728$ (ou $12 \times 12 \times 12$)$=16.43$ pieds cubes.

PROBLÈME III.

Trouver la surface d'un prisme oblique.

(**1491**) **REGLE**. *Multipliez* (**996**) *la longueur du côté par le périmètre d'une section perpendiculaire au côté.*

Ex. 1. Quelle est la surface du dessous et des deux côtés d'une poutre inclinée à bases parallèles, dont la longueur est de 12 pieds, la largeur du dessous 9 pouces, et celle des côtés $13\frac{1}{2}$ pouces ? **Rep**. 36 pieds carrés.

2. La longueur d'une corniche sous une rampe d'escalier entre murs parallèles est de 20 pieds et le pourtour ou périmètre d'une section de la corniche perpendiculaire à sa direction est de 27 pouces ; quelle en est la surface développée ? **Rep**. 45 pieds carrés.

PROBLÈME IV.

Trouver le volume d'un prisme oblique.

(**1492**) **REGLE I**. *Multipliez* (**1020**) *la surface de la base par la hauteur ; le produit sera le volume requis.*

REGLE II. *Multipliez* (**1025**) *le côté par la surface d'une section perpendiculaire à ce côté.*

Ex. 1. Combien faudra-t-il de pieds cubes de chêne pour une rampe d'escalier de 17 pieds de longueur et de 15×4 pouces d'équarrissage ?

Rep. $6\frac{1}{4}$.

2. La base horizontale d'une saillie de cheminée dévoyée. c'est-à-dire inclinée, mesure 7 pieds sur 18 pouces, la hauteur perpendiculaire étant de 7 pieds 3 pouces ; combien de briques contient le parallépipède, à 18 briques au pied cube ? **Rep**. $76\frac{1}{8}$ pieds cubes $\times 18=1370\frac{1}{4}$ briques.

3. Le côté triangulaire d'une lucarne a pour longueur horizontale 7 pieds, pour hauteur verticale 5 pieds, la largeur de la lucarne étant de 4 pieds ; le toit de la lucarne est en croupe parallèle au toit de l'édifice ; la hauteur du triangle qui en constitue la coupe verticale est de 2 pieds ; quel est le volume total. **Rep**. le corps ou carré de la lucarne (prisme trian-

gulaire droit) (*)$=\frac{1}{2}(7\times5\times4)=70$ pieds cubes, le toit (prisme triangulaire oblique)$=\frac{1}{2}(7\times4\times2)=23$ pieds cubes ; le volume demandé est par conséquent de 98 pieds cubes.

PROBLÈME V.

Déterminer la surface d'un tronc de prisme.

(1493) REGLE. *Trouvez séparément* **(1059)** *l'aire de chacune de ses faces composantes ; leur somme sera la surface voulue.*

Ex. Quel est le nombre de pieds superficiels de pierre taillée dans le pourtour d'une tête de cheminée située obliquement sur un toit incliné, c'est-à-dire dont les faces composantes ne sont pas parallèles à celles de l'édifice ; le plan de la cheminée étant un rectangle de 3 pieds sur 4 pieds et les hauteurs respectives de ses quatre côtés ou arêtes, 7, 8, $9\frac{1}{2}$ et $8\frac{1}{2}$ pieds ?

Rep. $\frac{1}{2}(7+8)\times3(=22\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(8+9\frac{1}{2})\times4(=35)+\frac{1}{2}(9\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}\times3(=27)+\frac{1}{2}$ $(8\frac{1}{2}+7)\times4(=31)=115\frac{1}{2}$.

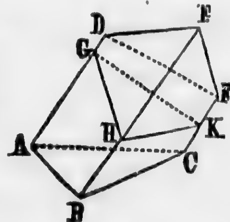
PROBLÈME VI.

Trouver le volume d'un tronc de prisme triangulaire.

(1494) REGLE I. *Multipliez* **(1093)** *la base du tronc par le tiers de la somme des hauteurs de ses trois côtés ou arêtes parallèles.*

REGLE II. *Multipliez le tiers de la somme de ses trois côtés parallèles par la surface d'une section perpendiculaire à ces cotés.*

REM. Cette seconde règle a-t-on dit **(1095)** dérive évidemment de celle du paragraphe **(1025)** ; mais dût-on ne pas trouver assez rigoureuse et satisfaisante, cette conclusion, peut être trop immédiate pour que l'élève puisse de suite en saisir la vérité, il est néanmoins facile d'en faire voir l'exactitude, de différentes manières, dont la suivante pour être la plus expéditive n'est pas la moins concluante. Soit donc ABC–DEF un tronc de prisme triangulaire oblique, divisé en deux troncs de prismes droits GHK–ABC, GHK–DEF par un plan GHK perpendiculaire aux côtés parallèles AD, BE, CF du solide. Le volume de chaque tronc composant est égal **(1093)** au produit



(*) Ici le prisme dont il s'agit ne repose pas sur une de ses bases parallèles ; mais cette circonstance ne doit empêcher de décider de suite de la nature du solide à évaluer ; car, il est évidemment indifférent, eu égard au volume requis, que la position du polyèdre soit verticale, horizontale ou inclinée.

de la base commune GHK par le tiers de la somme des perpendiculaires GD, HE, KF.....GA, HB, KC; mais $GHK \times \frac{1}{3}(GD + HE + KF) + GHK \times \frac{1}{3}(GA + HB + KC) = GHK \times \frac{1}{3}(\overline{GD + GA} + \overline{HE + HB} + KF + KC) = GHK \times \frac{1}{3}(AD + BE + CF)$; donc, etc.

Ex. 1. La base d'un tronc de prisme droit triangulaire est de 10 pieds carrés, ses côtés sont de 7, 8, et 9 pieds ; quel en est le volume ?

Rep. 80 pieds cubes.

2. Les trois côtés d'un tronc de prisme oblique sont $7\frac{1}{2}$ $8\frac{2}{3}$ et $9\frac{1}{3}$ pieds ; les base et hauteur d'une coupe perpendiculaire au côté sont respectivement de 5 et 3 pieds ; quel est le volume du solide ?

Rep. $8\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2} = 63\frac{3}{4}$ pieds cubes.

3. Les trois côtés de la base d'un prisme incliné mesurent respectivement 3, 4 et 5 mètres et les hauteurs de ses trois sommets sont 6, 7 et 8 mètres ; quel en est le contenu solide ? **Rep.** 42 mètres cubes.

PRCBLÈME VII.

Trouver le volume d'un tronc de prisme dont la base ou coupe perpendiculaire au côté est un polygone régulier ou à moitiés symétriques (1097)

(1495) REGLE I. *Multipliez* **(1097)** *la base par la demi-somme des hauteurs de deux côtés opposés ; le produit sera le volume requis.*

REGLE II. *Multipliez la demi-somme de deux des côtés ou arêtes opposés du tronc par la surface d'une coupe perpendiculaire à ces côtés parallèles.*

REM. Cette seconde règle dérive encore du par. **(1093)** puisqu'on peut supposer le tronc de prisme polygone divisé en troncs de prismes triangulaires, et faire pour chacun de ces troncs composants la même preuve que pour le tronc de prisme triangulaire du dernier problème.

Ex. 1. Combien y a-t-il de pieds cubes de pierre dans une tête de cheminée ayant pour coupe horizontale un hexagone régulier dont le côté est de 2 pieds, les hauteurs ou longueurs de deux arêtes opposées du tronc étant de 13 et 17 pieds ? **Rep.** $2.5980762 \times 2^2 \times \left(\frac{17 \times 13}{2}\right) = 155.884572.$

2. Trouver le nombre de pouces cubes de mérisier dans un balustre d'escalier ayant pour coupe horizontale un octogone régulier de 3 pouces de diamètre et dont la moindre et la plus grande longueurs ou hauteurs mesurent respectivemect 27 et 29 pouces.

Rep. On obtient assez correctement dans le cas actuel, le côté voulu de

l'octogone, en décrivant un cercle de 3 pouces de diamètre pour trouver ensuite (**651**), la corde d'un huitième de sa circonférence. Cette opération donne pour largeur d'un des pans du balustre $1\frac{6}{40}$ pouces près, soit 1.15 ; or $(1.15)^2 = 1.3225$, et $1.3225 \times$ (**1441**) 4.8284271, ou pour abréger $4.83 \times 1.32 = 6.375$ pouces carrés = surface de la coupe du balustre ; enfin, $6.375 \times \frac{1}{2}(27+29) = 6.375 \times 28 = 178\frac{1}{2}$ pouces cubes.

PROBLÈME. VIII.

Déterminer le volume d'un tronc de prisme quelconque.

(**1496**) **REGLE**. *Faites d'abord séparément* (**1098**) *le volume de chacun des troncs de prismes triangulaires composants, pour en prendre ensuite la somme.*

Ex. Un déblais de terre présente la forme d'un tronc de prisme droit ayant pour base le polygone ABCDEA ; la surface de la base composante ABC est de 50 verges carrées, celle de la base ADC = 73 verges et celle de la base ADE = 65 verges ; les hauteurs ou longueurs des côtés parallèles A, B, C, etc., sont respectivement de 7, 8, 9, 13 et 11 pieds ; quel est le nombre de verges cubes dans le solide proposé ?

Rep. (**1103**. 20°) $\overline{450 \times \frac{1}{3}(7+8+9)} + \overline{657 \times \frac{1}{3}(7+9+13)} + \overline{585 \times \frac{1}{3}(7+13+11)} = 3600 + 6351 + 6045 = 15{,}996$ pieds cubes ; divisant par 27, on a $592\frac{12}{27}$ verges cubes.

REM. Ici on a réduit en pieds carrés les surfaces des bases données en verges carrées, et l'on a divisé par 27, mais il est clair que puisque 3 fois 9 = 27, ce serait la même chose de multiplier de suite par les verges pour diviser ensuite par 3.

PROBLÈME IX.

Trouver le volume d'un coin.

(**1497**) **REGLE.** *A deux fois la longueur de la base, ajoutez la longueur de l'arête. Multipliez cette somme par la largeur de la base, puis par la hauteur du coin ; divisez le résultat par* 6 *et le quotient sera le volume requis.*

REM. Le coin, comme on l'a déjà fait remarquer (**1100**) n'est autre chose qu'un prisme triangulaire ou un tronc de prisme, suivant que l'arête est égale ou inégale aux deux autres côtés ; aussi la règle ici donnée pour en déterminer le volume est elle analogue à celle du prob. VI, quoique l'énoncé en soit un peu différent.

Ex. La base rectangulaire d'un coin est de 20 × 40 pieds, l'arête 35 pieds et la hauteur 10 pieds ; quel en est le volume ?

Rep. $\frac{(40 + 40 + 35) \times 20 \times 10)}{6}$ ou (**1094 Rem.**)$\frac{1}{3}(40 + 40 + 35) \times \frac{1}{2}20) \times 10) = 3833.33$.

2. Quel est le contenu solide d'un coin dont la base mesure 5 pieds 4 pouces sur 9 pouces, la longueur de l'arête $3\frac{1}{2}$ pieds, et la hauteur perpendiculaire $2\frac{1}{3}$ pieds ? **Rep.** 4.1319 pieds cubes.

3. Un plan incliné rencontre un plan horizontal et forme avec ce dernier un coin dont l'arête mesure 100 pieds ; la base rectangulaire 80 pieds sur 20 pieds et la distance perpendiculaire entre l'arête et la base 300 pieds ; quel est le volume du solide ? **Rep.** 260,000 pieds cubes.

PROBLÈME X.

Trouver le volume d'un prismoïde (*)

(1498) REGLE. ***A la somme des surfaces des deux bases parallèles, ajoutez quatre fois la surface d'une section ou coupe parallèle à distances égales de ces bases : multipliez alors la somme ainsi obtenue par un sixième de la hauteur ou distance perpendiculaire entre les plans parallèles (1101) et le résultat sera le volume demandé.***

Ex. L'une des bases d'un prismoïde rectangulaire est de 20 × 25 pieds, l'autre est de 10 × 15 pieds, la hauteur est de 12 pieds ; quel en est la solidité ?

Rep. $\overline{(25 \times 20) + (15 \times 10) + 4(20 \times 15)} \times \frac{12}{6} = 1850 \times 2 = 3700$.

2. Un quai ou pilier a pour bases parallèles des rectangles qui mesurent respectivement 100 × 50 pieds et 80 × 40 pieds, la hauteur est de 30 pieds ; quel en est le contenu en verges cubes. **Rep.** $4518\frac{14}{27}$.

3. Une pile de pierre cassée mesure 100 × 20 pieds au bas, 96 × 16 pieds

---

(*) Ce solide, comme le prisme, se présente fort souvent à l'évaluation du mesureur. Les cuves rectangulaires à côtés inclinés sont de cette forme ; un toit à croupes avec plate-forme, présente la même figure ; les grands réservoirs ne sont autre chose que des primoïdes renversées ; on le retrouve, dans les bassins, quais, piliers, culées et constructions de cette sorte ; les déblais et terrassements, fouilles et chaussées etc. prennent d'ordinaire cette forme ; le remblais continu d'une voie ferrée se subdivise par des coupes ou sections verticales en prismoïdes qui reposent chacun sur une de leurs faces latérales et dont les bases parallèles sont par conséquent perpendiculaires à l'horizon ; on retrouve le prismoïde dans chaque pièce de bois écarri dont les extrémités sont des rectangles inégaux, on le voit encore dans l'empilement des boulets et bombes, et il se répète encore souvent sur diverses échelles dans les arts et métiers, etc. On a déjà remarqué (note page 412) qu'il faut se garder de confondre le prismoïde avec le tronc de pyramide, ou plutôt, aurait-on dû dire, le tronc de pyramide avec le prismoïde, car il suit évidemment de la définition du prismoïde que tout tronc de pyramide à bases

sur le dessus et a 3 pieds de hauteur ou épaisseur ; quel en est le contenu en toises cubes ?

Rep. $(\overline{100 \times 20) + (96 \times 16) + 4(98 \times 18}) \times \frac{3}{8}$ (ou par $\frac{1}{2}$) $\div 216 = 24\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ toises cubes.

4. Un déblais, fouille ou excavation présente la forme d'un prismoïde renversé ; la surface inférieure de la fouille est de 10,000 mètres, la surface supérieure 14,400 mètres, la surface à demi-distance entre les bases parallèles est de 12,100 mètres et la hauteur ou profondeur de l'excavation est de 9 mètres ; combien en a-t-on enlevé de mètres cubes ? **Rep.** 109,200.

5. Combien de pieds cubes d'eau pourra contenir un réservoir dont la base inférieure est un rectangle de 100×50 pieds, la base supérieure un rectangle de 180×130 pieds et la profondeur 20 pieds. **Rep.** $262,666\frac{2}{3}$.

6. Quel est l'espace cubique que remplit un toit dont la base est un rectangle de 40×60 pieds, le dessus une plate-forme rectangulaire de 20×40 pieds et la hauteur 12 pieds. **Rep.** 18,400 pieds cubes.

7. Quelle est la solidité d'une pièce de bois écarri dont la longueur est de 24 pieds et dont les extrémités sont des plans parallèles et rectangulaires de 30×27 pouces et de 24×18 pouces. **Rep.** 102 pieds cubes.

8. Une auge dont la profondeur est de 20 pouces, à pour bases parallèles des rectangles de 36×30 pouces et de 30×24 pouces.

Rep. 10.3472 pieds cubes.

9. Un remblais pour voie ferrée mesure 300 verges en longueur, les extrémités en sont des trapèzes dont les côtés parallèles de l'un sont de 4 et 34 verges et la hauteur 10 verges, les côtés de l'autre 4 et 19 verges et sa hauteur 5 verges ; combien contient-il de verges cubes ?

Rep. Surf. d'une extrémité $= \frac{1}{2}(4 + 34) \times 10 = 190$ verges, surface de l'autre extrémité $= \frac{1}{2}(4 + 19) \times 5 = 57\frac{1}{2}$ verges, surface intermédiaire $= \frac{\frac{1}{2}(4 + 4) + \frac{1}{2}(34 + 19)}{2} \times \frac{1}{2}(10 + 5) = 15.25 \times 7.5 = 114.375$ verges carrées, $114.375 \times 4 = 457.500$, $190 + 57.5 + 457.5 = 705$, et $705 \times \frac{1}{6}(300) = 705 \times 50 =$ 35,250 verges cubes.

---

parallèles est en même temps un prismoïde et peut s'évaluer d'après la règle applicable à ce dernier ; mais le prismoïde proprement-dit n'est pas un tronc de pyramide et on ne saurait en conséquence en déterminer le volume par la règle applicable au tronc de pyramide, quoique cependant dans certains cas cette dernière règle puisse donner une approximation très voisine de la vérité. Ajoutons aussi que, puisque quand il y a à déterminer tout d'abord la nature du solide à estimer, il faut dans le cas du tronc de pyramide s'assurer de la proportionnalité des côtés aussi bien que de leur parallélisme, et qu'il suffit de leur parallélisme seul pour constituer le prismoïde ; on se sauvera souvent un travail inutile en regardant comme prismoïde tout solide dont les faces latérales seraient inclinées l'une à l'autre et les côtés des bases opposées parallèles entre eux.

10. Une chaussée sur un terrain en pente ou incliné mesure 100 mètres en longueur ; les surfaces des quadrilatères à côtés parallèles qui forment les extrémités verticales ou bases du prismoïde perpendiculaires à sa longueur, sont de 120 et 80 mètres carrés, et la surface d'une coupe à mi-distance entre ces dernières est de 100 mètres ; combien a-t-il fallu de mètres cubes pour le former ? **Rep.** 10,000.

11. Quel est l'espace cubique occupé par une pile de boulets dont la base rectangulaire est de 30 pieds sur 10, le plan supérieur 25 pieds sur 5 et la hauteur 4 pieds ? **Rep.** $833\frac{2}{3}$ près.

12. Le piédestal d'une statue équestre dont la hauteur est de 10 pieds, a pour bases parallèles des rectangles de 15×7 pieds et de $12=4$ pieds ; quelle est la solidité de la masse de pierre dont il est formé ?

Rep. 750 pieds cubes.

PROBLÈME XI.

Trouver la surface d'une pyramide régulière.

(1499) REGLE. *Multipliez* **(1039)** *le périmètre de la base par la demi-hauteur inclinée ; le produit sera la surface latérale ou convexe. A la surface latérale ajoutez celle de la base, quand la surface entière est requise.*

Ex. 1. Quelle est la surface latérale d'une pyramide triangulaire régulière, dont la hauteur inclinée est 20 et chaque côté de la base 3.

Rep. 90.

2. On demande la surface entière d'une pyramide régulière dont la hauteur inclinée est de 15 mètres et la base un pentagone dont le côté est de 25 mètres ? **Rep.** 2012.778 mètres carrés.

3. Combien faudra-t-il de carrés de bardeau, zinc ou autre métal, etc., pour recouvrir un toit en forme d'une pyramide régulière dont la base a 200 pieds de périmètre et la hauteur inclinée 33 pieds ? **Rep.** 33.

PROBLÈME. XII.

Trouver la surface latérale d'un tronc de pyramide régulière à bases parallèles.

(1500) REGLE. *Faites* **(1040)** *le produit de la demi-somme des périmètres des deux bases par la hautear inclinée du tronc ; vous aurez la surface voulue.*

Ex. 1. Quelle est la surface latérale d'un tronc de pyramide heptagone,

dont la hauteur inclinée est 55, chaque côté de la base inférieure 8, et chaque côté de la base supérieure 4. **Rep.** 2,310.

2. Un toit à huit pans, terminé par une plateforme, a pour mesure de sa hauteur inclinée 17 pieds; la longueur du côté de l'octogone régulier qui en constitue la base est de 20 pieds, et le côté du polygone supérieur est de 10 pieds; on demande le poids du plomb qui le recouvre, le plomb étant de 6 livres au pied carré? **Rep.** 12240 livres.

3. Combien y a-t-il de pieds superficiels de pierre taillée dans la surface latérale d'une tour polygone dont les périmètres inférieur et supérieur mesurent respectivement 100 pieds et 80 pieds et dont la hauteur inclinée est de 40 pieds? **Rep.** 3600.

PROBLÈME XIII.

Déterminer la surface d'une pyramide, ou d'un tronc quelconque de pyramide, oblique ou irrégulière.

(1501) REGLE. *Faites* **(1059)** *séparément la surface de chacune des faces composantes et prenez en la somme pour la surface voulue.*

PROBLÈME XIV.

Trouver la solidité d'une pyramide quelconque.

(1502) REGLE. *Multipliez* **(1049)** *la surface de la base par le tiers de la hauteur, et le produit sera le volume requis.*

Ex. 1. Quelle est la solidité d'une pyramide, dont la base est un carré de 30 pieds de côté, et la hauteur 25 pieds? **Rep.** 7500.

2. Le côté du triangle équilatéral qui forme la base d'une pyramide est de 3 pieds, sa hauteur est de 30 pieds; quel est le volume? **Rep.** 38.9711.

3. Quel est le contenu solide d'une pyramide hexagone dont la hauteur est de 6.4 pieds et chaque côté de sa base 6 pouces? **Rep.** 1.38564.

4. La hauteur d'une pyramide est 12, et chaque côté de sa base pentagonale est 2; on en demande le contenu cubique? **Rep.** 27.5276.

5. Quel est le volume de l'espace qu'occupe la toiture d'une tour octogone dont le côté est de 5 mètres, la hauteur du toit étant de 10 mètres?

Rep. $5^2 \times 4.8284271$ **(1441)**$=120.7106775$ mètres est la surface de la base octagonale du toit et $120.71 \times 10 \div 3 = 402.366$ mètres cubes.

PROBLÈME XV.

Trouver le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

(1503) REGLE I. *Trouvez* **(1061)** *d'abord une moyenne proportionnelle entre les deux bases ; faites ensuite l'addition continue de cette moyenne proportionnelle et des deux bases du tronc ; multipliez alors cette somme par le tiers de la hauteur du tronc ; le produit sera le volume requis.*

REGLE II. A la somme des deux bases ajoutez **(1102)** quatre fois la surface d'une section à demi-distance entre elles, c'est-à-dire d'une section dont les facteurs linéaires soient moyens arithmétiques **(1265)** entre ceux des deux bases ; multipliez alors la somme ainsi obtenue par un sixième de la hauteur du tronc ; le produit sera le volume requis.

Ex. 1. Quel est le nombre de pieds cubes dans une pièce de bois dont la longueur est de 24 pieds et dont les extrémités sont des carrés de 15 et de 6 pouces de côté ?

Rep. $\sqrt{15^2 + 6^2} = 90$, $225 + 36 + 90 = 351 = (\div 144)$ 2 pieds $5\frac{1}{4}$ pouces carrés, ce qui multiplié par le tiers de 24 donne 19.5 pieds cubes.

2. On demande le volume d'un socle pentagonale dont la hauteur est 5 pieds, chaque côté de la base inférieure 18 pouces et chaque côté de la base supérieure 6 pouces. **Rep.** 9.31925.

3. Un fort dont la hauteur est de 15 mètres, a pour base un octogone régulier dont le côté est de 10 mètres, le côté du polygone supérieur est de 9 mètres ; quel est le volume de la tour ?

Rep. Surf. oct. inf. = **(1441)** $4.8284271 \times 10^2 = 482.84271$ mètres carrés, surf. oct. sup. $= 4.8284271 \times 9^2 = 391.1025951$, surf. moy. prop. $= \sqrt{482.84 \times 391.10} = 434.56$, la somme des trois surfaces $= 482.84 + 391.1 + 434.56 = 1308.50$, et $1308.5 \times \frac{1}{3}(15) = 6542.5$ mètres cubes.

Rep. Par la règle **(1101)** du prismoïde, on a pour surface à demi-distance des bases parallèles $(10 + 9) \div 2 = 9.5$, et $(9.5)^2 \times 4.8284271 = 435.76$, $\times 4 = 1743.04$, $1743.04 + 482.84 + 391.1 = 2616.98$, et $2616.98 \times \frac{1}{6}(15 =$ 6542.45 comme auparavant, car la différence .05 entre les deux résultats vient seulement de ce qu'on n'a pas fait entrer en compte dans les deux calculs un plus grand nombre de décimales.

REM. Dans ce dernier exemple, l'aire de la moindre base $= 4.8284271 \times 9^2$ et celle de la plus grande base $= 4.8284271 \times 10^2$; le produit de ces deux

surfaces l'une par l'autre est $4.8284271 \times 9^2 \times 4.8284271 \times 10^2 = 4.8284271^2 \times 9^2 \times 10^2$ dont la racine carrée est $4.8284271 \times 9 \times 10 =$ la surf. moyenne proportionnelle requise. Il est donc clair que dans le calcul du volume du tronc de pyramide par la 1ère des deux règles ici données, on se sauvera un travail long et inutile en se servant de la méthode que l'on vient d'indiquer pour déterminer la surf. moy. prop. voulue, au lieu de multiplier l'une par l'autre les surfaces 482.84271, 391.1025951, pour en extraire ensuite la racine carrée. Cette remarque s'applique aussi au tronc de cône prob. XXVIII.

PROBLÈME XVI.

Trouver le volume d'un tronc de pyramide quelconque.

(1504) REGLE. *Déterminez* **(1067)** *séparément les volumes respectifs des pyramides entière et partielle ; la différence de ces volumes sera la solidité requise.*

Ex. Les surfaces inférieure et supérieure ou opposées d'un tronc de pyramide à bases non parallèles, sont 30 et 20 mètres, les hauteurs respectives des pyramides entière et partielle sont 33 et 17 mètres ; quel est le volume du tronc ?

Rep. $\overline{30 \times \frac{1}{3}(33)} - \overline{20 \times \frac{1}{3}(17)} = 330$ mètres cubes $- 113\frac{1}{3}$ mètres cubes $= 216\frac{2}{3}$ mètres cubes.

PROBLÈME XVII.

Trouver la surface d'un cylindre droit.

(1505) REGLE. *Multipliez* **(993)** *la circonférence de la base par la hauteur pour avoir la surface latérale. A cette surface ajoutez celles des deux bases si la surface entière est requise.*

Ex. 1. Quelle est la surface latérale d'un cylindre dont le diamètre de la base est 20, et la hauteur 50 ? **Rep.** 3141.6.

2. Quelle est le nombre de pieds superficiels de pierre taillée dans la surface convexe d'un pilier circulaire dont la hauteur est 7 pieds et la circonfé rence 8 pieds 4 pouces ? **Rep.** $58\frac{1}{3}$.

3. Combien y a-t-il de verges d'enduits dans le pourtour et le plafond d'un appartement circulaire, ayant 20 pieds de diamètre et 10 pieds de hauteur ?

Rep. Circ. $= 3.1416 \times 20 = 62.832$, surf. convexe $= 62.832 \times 10 = 628.32$, surf. du plafond $= \overline{20 \times 20} \times .7854 = 314.16$, surf. voulue $= \frac{628.32 \times 314.16}{9} =$ 104.72 verges carrées.

4. Quel sera le coût de polir la surface convexe d'une colonne en marbre dont le diamètre est de 12 pouces et la longueur 10 pieds, à raison d'une piastre le pied superficiel ? **Rep.** \$31.42.

5. Une tour cylindrique dont la hauteur est de 10 mètres et le diamètre aussi de 10 mètres, a pour surface latérale ?

Rep. 314.16 mètres carrés.

6. On demande combien de pieds de surface il y a dans un pied courant du pourtour intérieur d'un conduit ou canal cylindrique, dont le diamètre est de 3 pieds ? **Rep.** $3.14159 \times 3 = 9.42477$.

7. Une voûte en pierre taillée est demi-cylindrique, son diamètre est de 10 pieds et sa longueur de 50 pieds ; quelle en est la surface concave ?

Rep. 785.4 pieds carrés.

8. Quel est le nombre de pouces carrés de dorure dans la surface d'une barre de fer dont la longueur est de 14 pieds et le diamètre de $1\frac{1}{4}$ pouces.

Rep. circ. $3.927 \times 168 = 659.73$.

9. Combien faudra-t-il de pouces superficiels d'argenture pour couvrir l'intérieur, c'est-à-dire la surface concave et le fond d'un vase cylindrique de 7 pouces de diamètre et 9 pouces de hauteur ?

Rep. le fond $= \overline{7 \times 7} \times .7854 = 38.4846$ pouces carrés, la surf. concave $= \overline{3.1416 \times 7} \times 9 = 197.9208$ pouces carrés, en tout 236.4 pouces carrés.

PROBLÈME XVIII.

Trouver le volume d'un cylindre droit.

(1506) REGLE. *Multipliez* **(1023)** *la surface de la base par la hauteur ; le produit sera le volume.*

Ex. 1. On demande le volume d'un cylindre dont la hauteur est 20 et la circonférence de la base $5\frac{1}{2}$?

Rep. $(5.5)^2 \times$ **(1444)**$.07958 = 2.4073 =$ surf. de la base, et $2.4073 \times 20 = 48.146$.

2. Un seau ou autre vaisseau cylindrique a 15 pouces de diamètre et 12 pouces de hauteur ; combien contiendra-t-il de gallons de vin, le gallon étant de 231 pouces cubes ?

Rep. $15 \times 15 \times .7854 \times 12 = 2120.58$ pouces cubes, $\div 231 = 9.18$ gallons ou 9 gallons, 1 chopine et 1 septier, près.

3. Une barre de fer battu a 14 pieds de longueur et $1\frac{1}{4}$ pouces de diamètre ; quelle en est la solidité en pouces cubes ?

Rep. $1.25 \times 1.25 \times .7854 \times 168$ (ou 14×12) $= 206.1675$.

4. Une colonne en pierre a 1 pied de diam. et 10 pieds de hauteur; quel en est le volume. **Rep**. 7.854 pieds cubes.

5. Quelle est, par pied courant, la capacité d'un tuyau ou conduit d'un diamètre de 3 pieds ? **Rep**. 7.0686 pieds cubes.

6. La fondation d'une cheminée est une masse cylindrique dont le diam. est de 10 pieds et la hauteur aussi de 10 pieds; combien contient-elle de verges cubes de maçonnerie ?

Rep. 785.4 pieds cubes $\div$ 27 = 29 verges cubes, 2 pieds cubes.

7. L'essieu ou arbre en fer d'une roue de moulin a 10 pieds de longueur et 9 pouces de diam.; quelle en est la solidité en pieds cubes ?

Rep. $9 \times 9 \times .7854 \div 1728 = 4.418$ pieds cubes.

PROBLÈME XIX.

Trouver la surface d'un cylindre oblique.

(1507) REGLE. *Multipliez* **(997)** *la longueur du côté par la circonférence d'une section perpendiculaire au côté ou à l'axe du cylindre; le produit sera la surface latérale.*

Ex. **1**. La voûte demi-cylindrique d'une ouverture ou baie de pont qui traverse obliquement une rivière, a 30 pieds de diamètre et 20 pieds de longueur; quelle en est la surface concave ?

Rep. 942½ pieds carrés, près.

2. Le bras d'une rampe d'escalier, terminé à chaque extrémité par les faces verticales des noyaux, mesure 10½ pouces de tour et 15 pieds de longueur; quel est le nombre de verges superficiels de vernis dont il est enduit ?

Rep. 10½ pouces = .875 pied, et $15 \times .875 = 13.125$ pieds carrés = 1 verge 4⅛ pieds.

3. Quelle est la surface du zinc dans un tuyau dont le diamètre est de 9 pouces et dont la longueur, 5 pieds, est terminée par les plans parallèles de deux coudes alternes **(153)** ou tournés en sens inverses. ?

Rep. circ. $= 3.1416 \times 9 = 28.2744$, circ. $\times 60$ et $\div 144 = 11\frac{1}{12}$ près pieds carrés.

PROBLÈME XX.

Trouver le volume d'un cylindre oblique.

(1508) REGLE I. *Multipliez* **(1026)** *la longueur du côté par la surface d'une section perpendiculaire au côté ou à l'axe; le produit sera le volume requis.*

Ex. Quelle est le contenu solide du bras d'escalier du dernier problème ?

Rep. Surf. sect. perp. = (**1444**) $\overline{10.5} \times 10.5 \times .07958 = 8.7737$ pouces carrés, et 8.7737×180 (la longueur en pouces) $= 1579.26$ pouces cubes, ou .914 pied cube, ou $\frac{9}{10}$ près.

REGLE II. *Multipliez* (**1026**) *la surface de la base par la hauteur perpendiculaire.*

Ex. La surface de la base d'un cylindre est 3.33 mètres carrés et la distance perpendiculaire qui sépare ses deux bases, est 10 mètres ; quel en est le volume ? **Rep**. 33.3 mètres cubes.

PROBLÈME XXI.

Trouver la surface d'un tronc de cylindre droit ou d'un tronc de cylindre oblique dont les grands ou petits axes CD, FE ou GH, LK des bases opposées. sont (1099) dans un même plan CDEF ou GHKL.

(**1509**) **REGLE I**. *Multipliez* (*dém. de* **1099** *et* **1097**) *la demi-somme de la plus grande et de la moindre hauteurs du tronc par le périmètre de la base ; le produit sera la surface latérale.*

REGLE II. *Si le tronc est oblique, multipliez la demi-somme des longueurs du moindre et du plus grand côtés du tronc par le périmètre d'une section perpendiculaire à l'axe du cylindre.*

Ex 1. Le diamètre d'un cylindre est 10, sa moindre hauteur est 9.4 et sa plus grande hauteur 10.6 ; quelle en est la surface convexe ?

2. Un demi-coude de tuyau de poële ou de conduit quelconque, (le coude rectiligne n'est autre chose qu'un double tronc de cylindre droit, c'est-à-dire deux troncs de cylindres droits se rencontrant sous un angle quelconque) dont le diamètre est de 7 pouces, a pour moindre et plus grande longueurs, 4 et 11 pouces respectivement ; quelle en est la surface latérale ?

Rep. $3.1416 \times 7 \times \frac{1}{2}(4 + 11) = 164.9$ ou soit 165 pouces carrés, ou ($\div 144$) $=1$ pied carré et 21 pouces carrés, ou $1\frac{1}{7}$ près pieds carrés.

3. Entre les deux troncs composants du coude rectiligne d'un bras cylindrique de garde-fou, se trouve un troisième tronc dont la plus grande longueur est 3 pouces et la moindre longueur nulle ; quelle en est la surface, le diamètre du bras étant de 9 pouces ?

Rep. Il est clair que le tronc proposé n'est autre chose qu'un double onglet de cylindre droit, c'est-à-dire deux onglets réunis par leurs bases perpendiculaires ; donc on aura la surf. voulue $= 3.1416 \times 9 \times \frac{1}{2}(3) = 28.2744 \times 1.5 = 42.4$ pouces carrés.

4. Dans un vaisseau cylindrique incliné à l'horizon se trouve une liqueur dont la plus petite distance de la surface au fond est de .67 décimètres et la plus grande 1.33 mètres, le diamètre du vaisseau étant de 1 mètre ; on demande la superficie de la paroi exposée à l'action de la liqueur ?

Rep. $1 \times 3.1416 \times \frac{1}{2}(.67 + 1.33) = 3.1416$ mètres carrés, = surf. latérale, le fond $= 1^2 \times .7854 = .7854$ mètres carrés, la surface entière $= 3.1416 + .7854 = 3.9270$ m. c.

5. Une voûte demi-cylindrique est terminée par deux murs, inégalement obliques à l'axe ou direction de la voûte ; le diam. est de 20 pieds et les moindre et plus grande longueurs 36 et 30 pieds ; quelle en est la surface ?

Rep. 1036.73 pieds carrés.

6. Le tambour d'un escalier circulaire dont le diamètre est de 10 pieds, est terminé par le toit incliné de l'édifice ; sa moindre hauteur à compter du niveau du plancher du dernier étage est de 7 pieds et sa plus grande hauteur de 13 pieds ; quelle en est la surface latérale en verges carrées.

Rep. $314.16 \div 9 = 34\frac{8}{9}$ près.

PROBLÈME XXII.

Trouver le volume d'un tronc de cylindre droit, ou d'un tronc de cylindre oblique dont les grands ou petits axes CD, FE ou GH, LK des bases opposées, sont (1099) dans un même plan CDEF ou GHKL.

(1510) REGLE I. *Multipliez* **(1099)** *la base par la demi-somme des moindre et plus grande hauteurs du tronc ; le produit sera la solidité demandée.*

REGLE II. *Multipliez* **(1099)** *la surface d'une section perpendiculaire à l'axe du cylindre, par la demi-somme des longueurs du moindre et du plus grand côtés du tronc.*

Ex. 1. Dans un vaisseau cylindrique dont la fondation s'est affaissée et a dérangé la position verticale, la moindre hauteur inclinée du liquide contenu est de 13 pieds et la plus grande hauteur de 15 pieds, le diamètre de la cuve étant de 20 pieds ; on demande le nombre de gallons de liqueur (soit $7\frac{1}{2}$ gallons au pied cube) dans la cuve ?

Rep. 4398.24 pieds cubes = 32986.80 gallons.

2. Le recouvrement demi-cylindrique d'un mur qui en rencontre deux autres sous des angles obliques inégaux, mesure 3 pieds de diamètre et sa longueur moyenne est de 100 pieds ; quel en est le volume ?

Rep. surf. sec. perp. $= \frac{3 \times 3 \times .7854}{2} \times 100 = 353.43$ pieds cubes.

PROBLÈME XXIII.

Trouver la surface et le volume d'un tronc quelconque de cylindre.

(**1511**) **REGLE I**. *Imaginez le tronc coupé (en AB, fig. du par.* (**1099**) *par un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Référez à cette base commune, les deux troncs composants ; faites par les deux derniers problèmes la surface ou le volume de chacun d'eux pour en prendre la somme ; ou, ce qui est la même chose, multipliez la base commune ou sa circonférence, suivant le cas, par la moitié de la somme des deux plus grands et des deux plus petits côtés des deux troncs.*

REGLE II. *La surface de la base multipliée par la demi-somme de la moindre et de la plus grande hauteurs du tronc, donnera son volume.*

PROBLÈME. XXIV.

Trouver la surface d'un cône droit ou régulier.

(**1512**) **REGLE**. *Multipliez* (**1041**) *la circonférence de la base par la moitié du côté, ou de la hauteur inclinée ; le produit sera la surface convexe ; à cette surface ajoutez celle de la base, si la surface entière est requise.*

Ex. 1. Quelle est la surface latérale d'un cône dont le côté est 50 et le diamètre de la base $8\frac{1}{4}$? **Rep**. 667.59.

2. Quelle est la surface convexe d'un cône dont le côté est 36 et le diam. de la base 18 ? **Rep**. 1272.348.

3. Le fond d'une chaudière est un cône renversé dont le diamètre est de 10 pieds et le côté 6 pieds ; quelle en est la surface latérale ?
Rep. 94.248 pieds carrés.

4. Un vase dont le diam. est de 10 pouces a un couvercle conique dont le côté est de $5\frac{3}{4}$ pouces ; quelle est la surface de ce dernier ?
Rep. $10 \times 3.1416 \times 2.875 = 90.321$ pouces carrés.

5. Un réservoir dont le plan est circulaire et dont la coupe verticale menée par le centre est un triangle isocèle, a 60 mètres de largeur et la longueur de son côté incliné est de 33 mètres ; combien faudra-t-il de briques pour en revêtir la surface, en allouant 75 briques au mètre carré ?
Rep. diam. $60 \times 3.1416 \times 16\frac{1}{2} \times 75 = 233,264$.

6. Une tour a 150 pieds de circonférence et le côté incliné de son toit conique mesure 30 pieds ; combien faudra-t-il de *carrés* de couverture en bardeau pour en revêtir l'extérieur ? **Rep**. $22\frac{1}{2}$.

7. Quel sera le poids du dessus conique d'un gazomètre dont la circonférence est de 180 pieds et le côté incliné 30 pieds, le fer étant de 5 livres au pied carré ? **Rep**. 13,500 livres.

PROBLÈME XXV.

Trouver la surface d'un tronc de cône droit ou régulier à bases parallèles.

(1513) REGLE. *Multipliez* (**1042**) *la demi-somme des circonférences des deux bases par la hauteur inclinée du tronc ; vous aurez la surface convexe ; à laquelle ajoutez les aires des deux bases, pour avoir la surface entière.*

Ex. 1. Le côté d'un tronc de cône est $12\frac{1}{2}$, et les circonférences de ses bases 8.4 et 6 ; quelle en est la surface latérale ? **Rep**. 90.

2. Quelle est la surface entière d'un tronc de cône dont le côté est de 16 pieds et les rayons des bases 3 et 2 pieds ?

Rep. surf. lat. = 251.328, surf. base inf. = 28.2744, surf. base sup. = 12.5664, surf. totale = 292.168.

3. La partie conique d'un entonnoir a pour grand diamètre 10 pouces, pour petit diam. 1 pouce, et pour côté incliné 15 pouces ; quelle en est la surface latérale ? **Rep**. 259.2 pouces carrés = 1.8 pieds carrés.

4. Le toit incliné d'une tour circulaire dont le diamètre est de 30 pieds et le côté de 20 pieds est terminé au haut par une plateforme dont la circonférence est de 33 pieds ; on demande combien il a fallu de *carrés* de zinc pour le recouvrir, y compris la plateforme ?

Rep. surf. lat. = 1272.48, surf. base sup. = $(33)^2 \times .07958$ = 86.66, surf. requise = 1359.14 pieds carrés = $13\frac{1}{2}$ *carrés* 9 pieds carrés.

5. Combien faudra-t-il de pouces carrés de dorure pour recouvrir l'intérieur d'un goblet dont la circ. inf. est 6 pouces, la circ. sup. 7 pouces et le côté $3\frac{1}{2}$ pouces ?

Rep. La paroi latérale = $3\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(6+7)$ = 22.75 pouces carrés, le fond = $\overline{6 \times 6} \times .07958$ = 2.865, le tout = 25.615 pouces carrés.

PROBLÈME XXVI.

Déterminer la surface d'un cône ou d'un tronc quelconque de cône oblique ou irrégulier.

(1514) REGLE. *Divisez la surface latérale du cône, par des lignes menées du sommet à la base en triangles ou secteurs, et la surface laté-*

rale du tronc de cône par des lignes menées entre les deux bases, en trapèzes, etc. ; estimez séparément la superficie de chacune des parties composantes et prenez en la somme pour la surface voulue.

PROBLÈME XXVII.

Déterminer le volume d'un cône droit ou oblique.

(**1515**) **REGLE**. *Multipliez* (**1050**) *la surface de la base par le tiers de la hauteur, et le produit sera le volume requis.*

Ex. 1. Quelle est la solidité d'un cône dont la hauteur est de 27 pieds et dont la base est un cercle de 10 pieds de diamètre ? **Rep**. 706.86.

2. La circonférence de la base d'un cône droit est 9 pieds, sa hauteur étant de $10\frac{1}{2}$ pieds ; quel en est le volume ? **Rep**. 22.56.

3. La surface de la base d'un cône oblique est de 1000 mètres et sa hauteur 30 mètres ; quel en est le contenu solide ?
Rep. 10,000 mètres cubes.

4. Un rocher ou monticule en forme de cône irrégulier a pour base une figure dont la surface est de 5500 verges carrées, la hauteur du corps étant de 105 verges ; combien aurait-on à enlever de verges cubes de matière pour le faire disparaître ? **Rep**. 185,500.

5. Quel est le volume de l'espace compris sous un toit conique dont la hauteur est de 30 pieds et le diamètre 30 pieds ?
Rep. 7068.6 pieds cubes.

6. Combien de pouces cubes de dragées peut contenir un cornet de 3 pouces de diam. et 9 pouces de longueur ? **Rep**. $21\frac{1}{5}$.

7. La circonférence du fond conique d'une chaudière est de 10 pieds et la hauteur du cône de 1 pied ; combien de gallons contiendra cette partie du vaisseau.

Rep. $\overline{10} \times \overline{10} \times .07958 \times \frac{1}{3} = 2.652666$ pieds cubes, $\times 1728$ et $\div 231 = 19.843$ gallons.

PROBLÈME XXVIII.

Déterminer le volume d'un tronc de cône droit ou oblique, c.-à-d. d'un tronc de cône quelconque, à bases parallèles.

(**1516**) **REGLE I**. *Trouvez* (**1063**) *d'abord une moyenne proportionnelle entre les deux bases ; faites ensuite l'addition continue de cette*

moyenne et des deux bases du tronc ; multipliez alors cette somme par le tiers de la hauteur du tronc et le produit sera le volume requis.

REGLE II. *A la somme des deux bases, ajoutez* (**1521**) *quatre fois la surface d'une section à demi-distances entre elles, c'est-à-dire d'une section dont les facteurs linéaires soient moyens arithmétiques* (**1265**) *entre ceux des deux bases ; multipliez alors la somme ainsi obtenue par un sixième de la hauteur du tronc ; le produit sera le volume requis.*

Ex. 1. On demande la solidité d'un tronc de cône droit, dont la hauteur est 18, le diam. de la base inf. 8, et celui de la base sup. 4 ?

Rep. Base inf. $=\overline{8\times8}\times.7854=50.2656$, base sup. $=\overline{4\times4}\times.7854=12.5664$, le facteur moyen arith. entre 8 et $4=\frac{1}{2}(8+4)=6$, $6\times6\times.7854\times4=113.0976$, la somme de ces surfaces $=175.9296$, multipliant par 3 (le sixième de la hauteur 18) on a 527.7888.

2. Combien de pieds cubes d'eau pourra contenir un réservoir en forme de tronc de cône renversé dont le plus grand diamètre est de 200 pieds, le plus petit diam. 100 pieds, et la profondeur 25 pieds ?

Rep. 458,153 pieds cubes.

3. Un tuyau conique relie deux conduits de 10 et 20 pouces de circonférence, sa longueur ou la distance perpendiculaire entre ses deux bases est de 25 pouces ; quelle est la capacité de cette partie du conduit ?

Rep. Surf. petit bout $=$ (**1444**) $(10)\times.07958=7.958$, surf. gros bout $=(20)^2\times.07958=31.832$, la circonférence moy. arith. $=\frac{1}{2}(10+20)=15$, $(15)^2\times.07958\times4=71.622$, la somme $=111.412$, cette somme $\times\frac{1}{6}(25)=464.21666$ pouces cubes.

4. Quelle est la capacité d'une tinette dont la hauteur est de 20 pouces, le diam. inf. 10 pouces, et le diam. sup. 16 pouces ?

Rep. 2701.776 pouces cubes $\div 1728=1.55$ pieds cubes.

5. Un vaisseau qui présente la forme de deux troncs de cônes réunis par leur plus grandes bases, mesure 40 pouces de longueur, 28 pouces à la bonde ou au centre et 20 pouces à la tête ou aux extrémités ; combien contiendra-t-il de gallons ?

Rep. $20\times20\times.7854=314.16$, $28\times28\times.7854=615.7536$, $24\times24\times.7854\times4=1809.5616$, la somme des surfaces $=2739.4752$, $\times\frac{1}{6}(20)=9131.584$ pouces cubes $=$ le contenu d'un des troncs composants, $\times2=18263.1680$ pouces cubes, $\div231=79.06133$ gallons.

Rep. Par la 1ère règle on a :

surf. moindre base =	$.7854 \times 20^2$	$=314.16$
surf. grande base =	$.7854 \times 28^2$	$=615.7536$
surf. moy. prop. = (**1503 Rem.**)	$.7854 \times 20 \times 28$	$=439.824$
		1369.7376
multipliant par le tiers de la hauteur du tronc		$6\frac{2}{3}$
on obtient pour vol. du tronc		9131.5840
		2
doublant, on a pour vol. total comme auparavant		18263.1680

REM. Il est à peine nécessaire de dire qu'au lieu de multiplier séparément par .7854 ou par .07958, suivant le cas, les carrés des diam. des bases opposées et 4 fois le carré du diam. de la base intermédiaire, pour en prendre ensuite la somme ; on se sauvera du travail en faisant tout d'abord la somme de ces carrés pour n'avoir à multiplier qu'une fois par les facteurs .7854 ou .07958.

PROBLÈME XXIX.

Trouver le volume d'un tronc de cône quelconque à bases non parallèles.

(**1517**) **REGLE.** *Déterminez séparément* (**1067**) *les volumes respectifs des cônes entier et partiel ; la différence de ces volumes sera la solidité requise.*

Ex. Les surfaces inf. et sup. d'un tronc de cône à bases non parallèles sont 30 et 20 mètres, les hauteurs respectives des cônes entier et partiel sont 33 et 17 mètres ; quel est le volume du tronc ?

Rep. $(30 \times \frac{1}{3}\overline{33}) - (20 \times \frac{1}{3}\overline{17}) = 330 - 113\frac{1}{3} = 216\frac{2}{3}$ mètres cubes.

PROBLÈME XXX.

Trouver le volume d'un onglet de cône.

(**1518**) **REGLE.** *Déterminez séparément* (**1140**) *les volumes respectifs de cette partie du cône entier dont l'onglet fait partie et de la partie correspondante du cône partiel ; la différence de ces volumes sera la solidité requise.*

Ex. Les segments d'ellipses qui servent de bases à un onglet de cône, sont (**1473**) respectivement de 20 et 15 pieds en superficie, et les hauteurs des cônes entier et partiel perpendiculaires à ces bases sont (**1067**) de 30 et 23 pieds ; quel est le volume de l'onglet ?

Rep. $(20 \times \frac{1}{3}\overline{30}) - (15 \times \frac{1}{3}\overline{23}) = 300 - 115 = 185$ pieds cubes.

2. Une quantité de liqueur (2nde fig. du par. **1143**) dans un vaisseau, incliné de 15 degrés à l'horizon, et dont la forme est celle d'un tronc de cône de 5 pieds de hauteur, ayant un diam. inf. de 10 pieds, et un diam. sup. de 8.8 pieds, laisse voir un segment du fond dont le sinus-verse ou la hauteur est de 2.5 pieds. La surface ou base sup. de l'onglet formé par le liquide est (page 622) un segment d'ellipse dont le sinus-verse ou hauteur est de 7.6 pieds; cette hauteur du segment fait partie du plus grand diam. de l'ellipse, lequel est de 10.3 pieds, le petit axe étant de 9.9 pieds. On demande le nombre de gallons de liqueur dans la cuve?

Rep. Les autres facteurs ou éléments nécessaires au calcul sont la hauteur du cône dont la cuve fait partie, et la verticale ou perpendiculaire menée du sommet du cône au plan horizontal de la surface du liquide. On obtient (**1064**) la première de ces dimensions en faisant $10 - 8.8 : 5 :: 10 : 40.1666$. La seconde peut alors se déterminer assez correctement, par construction géométrique, à l'aide d'une échelle de parties égales, et est de 37.87 pieds. La surface entière de la base est $10 \times 10 \times .7854 = 78.54$, la surface du segment visible du fond de la cuve est (**1454**) $.153546 \times 10^2 = 15.3546$, leur différence 63.1854 est la surface de la base inf. de l'onglet. La surface entière de l'ellipse dont la base sup. de l'onglet fait partie est (**1469**) $10.3 \times 9.9 \times .7854 = 80.0872$; le moindre segment de l'ellipse a pour hauteur $10.3 - 7.6 = 2.7$, la surface de ce segment est (**1473**) $.164019 \times 10.3 \times 9.9 = 16.7250$, la différence de ces surfaces donne pour base sup. de l'onglet 63.3622 pieds carrés. Le volume de cette partie du cône entier dont l'onglet fait partie est (**1056**) $63.1854 \times \overline{\tfrac{1}{3}40.1666} = 845.97668$; le volume du cône partiel qui a pour base la surf. sup. du liquide est $63.3622 \times \overline{37.87 \div 3} = 799.84217$, la différence de ces volumes 46.13451 est le volume de l'onglet; ce vol. $\times$ 1728 (nombre de pouces cubes dans un pied cube) puis $\div$ 231 (nombre de pouces cubes dans un gallon) ou multiplié de suite par 7.48 (nombre de gallons dans un pied cube) donne enfin pour capacité de l'onglet 345.0861 gallons.

PROBLÈME XXXI.

Déterminer le volume d'un onglet de cylindre.

(**1519**) **REGLE**. *Considérez l'onglet donné comme étant celui d'un cône dont la hauteur, eu égard à celle de l'onglet et au degré d'exactitude voulu dans le résultat, serait de* 10, 100, 1000, *etc. fois le diamètre de sa base, et procédez ensuite comme dans le dernier problème.*

REM. 1. Il est évident qu'il ne s'agit ici que de l'onglet partiel ou proprement dit ABC–D, fig. du par. (**1140**) ou MBN–C (**REM. 4**); car on a déjà vu (note page 631) que l'onglet entier ou complet n'est autre chose

qu'un tronc de cylindre dans lequel la moindre hauteur est nulle ou égale à zéro, et on en obtient de suite le volume en faisant le produit de sa base par la moitié de sa plus grande hauteur. Ce n'est donc que pour simplifier le calcul et pour permettre la comparaison des volumes exacts et rapprochés des onglets correspondants de cylindre et de cône que nous ne donnons ici que des exemples d'onglets entiers, pendant que le problème n'a trait qu'aux onglets partiels. Le procédé à suivre est d'ailleurs le même dans les deux cas.

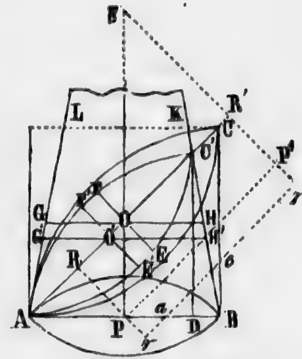
REM. 2. L'onglet de cylindre, comme l'onglet de cône, se rencontre assez souvent dans la pratique, à l'endroit des intersections de voûtes et autres corps cylindriques par des surfaces planes. La liqueur qui ne recouvre qu'en partie le fond d'un vaisseau cylindrique incliné, offre aussi au calcul une figure de cette espèce.

REM. 3. Quand la hauteur de l'onglet n'excède pas le diam. du cylindre dont il fait partie, un cône de 10 diamètres donne un résultat dont l'erreur ou défaut n'excède pas 5 pour cent ou $\frac{1}{20}$ du vol. réel ; et le défaut est d'autant moindre que la hauteur de l'onglet est plus petite, relativement à l'étendue de sa base.

Le cône de 100 diamètres donne pour résultat un volume qui, même avec un onglet dont la hauteur est de deux diamètres, ne diffère du vol. exact que de 1 pour cent à peu près, et dont l'erreur ou défaut n'est que d'une fraction de l'unité, quand la hauteur de l'onglet à estimer n'est que d'un ou de moins d'un diamètre.

Avec 1000 diamètres le défaut de volume n'est que d'un cinq-millième plus ou moins, suivant la hauteur de l'onglet relativement à l'étendue de sa base.

Il est clair que l'emploi d'un cône de 10,000, 100,000 1000,000, etc., diamètres donnerait un résultat de plus en plus voisin du volume exact de l'onglet proposé, l'erreur diminuant dans une proportion à peu près décuple pour un diamètre 10 fois plus grand ; mais si l'on fait attention que le volume à déterminer n'est d'ordinaire qu'une fraction de l'unité de vol. du cône entier, et que dans le cas de 10,000 diamètres, par exemple, le premier chiffre valant du vol. de l'onglet n'est que le quatrième chiffre de la différence des cônes entier et partiel et que le quatrième chiffre du vol. cherché est le huitième de cette même différence, on verra que sauf à la condition de faire usage de logarithmes ou d'autres facteurs ou éléments allant à plus de 7 décimales ou de se donner un surcroit de travail dans l'extraction des racines par nombres naturels et dans les autres opérations à faire, l'on ne saurait aller au delà du cône de 1000 diamètres, lequel d'ailleurs donne toute l'exactitude voulue dans la pratique.



Ex. 1. Déterminez, à moins d'un centième près, le volume d'un onglet de cylindre AB–C dont la hauteur BC = AB le diam. du cylindre.

Rep. Soit S le sommet du cône, SP sa hauteur, BKS son côté ; l'onglet de cône sera AB–C′, AC′ sera le grand et EFGH le petit diamètre de l'ellipse AEC′F qui en constitue la base supérieure. (Le petit diam. est plus correctement E′F′, où O′ est le centre de AC′ ; mais excepté dans le cas ou PS n'est que de 10 diamètres, on peut, pour simplifier, négliger O′O et mettre EF à la place de E′F′ et par conséquent GH à la place de G′H′). Soit C′D perpendiculaire sur AB ; on aura, sans erreur sensible, BD = CK = demi-diminution du diam. du cône pour une unité BC (soit $\frac{1}{100}$) de la hauteur du cône entier. La hauteur du cône partiel AC′–S est SR′ (perpendiculaire au plan AEF de la base sup. de l'onglet) = SP′–P′R′ = cosinus naturel de l'angle BAC de l'onglet, ou de son égal (**322**) S, multiplié par le nombre d'unités ou de diamètres dans SP et diminué de P′R′ ou PR, la partie du cosinus qui correspond à OP ; or OP, dans cet exemple, $= \frac{1}{2}$ BC ; l'angle BAC = 45°, à cause de BC = AB ; le cos. nat. de 45° =, dans les tables, .70711 ; ce cosinus × 100 = 70.711 = SP′, et, × $\frac{1}{2}$, = .35355 ou .354 = PR, et SP′–P′R′ = 70.711 − .354 = 70.357 fois le diam. AB.

Maintenant, quelle que soit la valeur du diam. AB, supposons pour simplifier le calcul, qu'il soit égal à l'unité ; on aura (**684**) surf. AB = .7854, et (**1050**) vol. AB–S = .7854 × 100 ÷ 3 = 26.18. On aura (**389**) AC′ = $\sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB.BD} = \sqrt{1^2 + (.995)^2 - 2(1 \times .005)}$ (car on peut, sans erreur sensible, prendre BC′ = DC′ = DK − C′K = BC − CK = 1 − .005 = .995 et BD = CK = .005) = $\sqrt{1.990025 - 01} = \sqrt{1.980025}$ =, négligeant les .000025, $\sqrt{1.98}$ =, par logarithmes ou autrement, 1.4071. Le petit diam. EF = GH = .995 = AB − .005, puisque LK = AB − .01 et que OP = $\frac{1}{2}$BC. La surface AEC′F = (**1469**) AC × EF × .7854 = .1.4071 × .995 × .7854 = 1.0996 ; le volume du cône partiel = 1.0996 × 70.357 = 77.364557 dont le tiers 25.788185 retranché de 26.18, vol. du cône entier, laisse pour vol. de l'onglet .3918.

Le vol. exact de l'onglet proposé est (**1099** ou **1495**) = surf. AB × $\frac{1}{2}$ BC = .7854 × $\frac{1}{2}$ = .3927, et 3927 − 3918 = $\frac{1}{400}$ près ou le quart de 1 pour cent ; c'est-à-dire que .3918 est, à moins de 1 pour cent près, le volume d'un onglet semblable à l'onglet proposé, et sous un diamètre égal à l'unité ; et comme (**1103**, 15°) les solidités ou volumes des polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs dimensions homologues, si l'on suppose que

AB soit de 60 pouces, on aura $1^3 : 60^3$ :: .3918 : 84628.8 pour volume de l'onglet donné en pouces cubes.

Ex. 2. On demande, à moins d'un centième près, le volume d'un onglet de cylindre dont la hauteur est de deux diamètres.

Rep. On a (**1229**, 2°) 1 : 2 :: R : tang. BAC $= 2$; d'où, BAC $= 63° 26' 6''$ dont le cos. nat. $= .44721$ lequel $\times 100 = 44.721 = SP'$. Ici, puisque BC $= 2$, on a OP $= 1$ et PR ou $P'R' = .447$, et $SP' = P'R' = 44.721 - .447 = 44.274 =$ hauteur SR′ du cône partiel AC′–S. Le diam. $AC' = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB.BD} = \sqrt{1^2 + (1.98)^2 - 2(1 \times .01)} = \sqrt{1^2 + 3.9204 - .02} = \sqrt{4.9004} = 2.2137$; EF ou GH $= .99$, surf. $AC' = 2.2137 \times .99 \times .7854 = 1.72125$, vol. cône partiel $=$ base $1.72125 \times$ hauteur $44.274 \div 3 = 25.4022$; cône entier moins cône partiel, $= 26.18 - 25.4022 = .7778 =$ vol. de AB–C′ ; or, le vol. de AB–C $=$ base AB $\times \frac{1}{2}$AC $= .7854 \times 1 = .7854$ et $.7854 - .7778 = \frac{76}{7854} = .0097$ ou moins de $\frac{1}{100}$; donc .7778 est l'unité de volume de l'onglet proposé, à moins d'un centième près, et si AB $= 10$, par exemple, $1^3 : 10^3$ :: .7778 : 777.8, le vol. exact étant 785.4 et la différence moindre que 1 pour cent, tel que demandé.

Ex. 3. Soit à déterminer, à moins d'un millième près, le vol. de AB–C, BC étant $=$ AB.

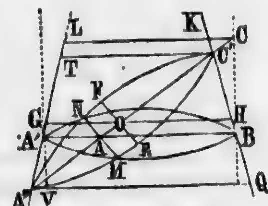
Rep. $AC = \sqrt{1^2 + (.9995)^2 - 2(1 \times .0005)} = \sqrt{1.99800025} = \sqrt{1.998}$, négligeant les .00000025, $= 1.413506$; EF $= .9995$, surf. $AC' = 1.413506 \times .9995 \times .7854 = 1.1096123$, $SP' =$ cos. nat. BAC $\times 1000 = .7071068 \times 1000 = 707.1068$, SR $= 707.1068 - .35355 = 706.75325 =$ hauteur du cône partiel ; le vol. du cône partiel $=$ surf. AC′ $1.1096123 \times$ SR′ $706.75325 \div 3 = 261.4073664$; le cône entier $= .7854 \times 1000 \div 3 = 785.4 \div 3 = 261.8$; la différence du cône entier au cône partiel $= .3926336$; le vol. exact de AB–C $=$, comme dans le 1er exemple, .3927 ; la différence entre AB–C′ et AB–C $= \frac{664}{3927000} = \frac{1}{6000}$ près, c'est-à-dire, moins d'un millième, tel que voulu.

Ex. 4. Quand BC $= \frac{1}{2}$ AB, trouver, à moins d'un centième près, le vol. de AB–C.

Rep. Le vol. exact de AB–C $= .7854 \times \frac{1}{2}$BC $= .7854 \times \frac{1}{4} = .19635$; le vol. du cône entier $=$, comme auparavant, 26.18 ; l'angle BAC $=$ (**1229**, 2°) 1 : $\frac{1}{2}$ :: R : tang. $.50000 = 26° 33' 54''$ dont le cos. nat. $= .8944276$ lequel $\times 100 = 89.44276 = SP'$. Dans cet exemple, BC étant $= \frac{1}{2}$, on a OP $= \frac{1}{4}$ et par conséquent PR ou $P'R' =$ le quart de $.8944276 = .2236069$ et $89.44276 - .2236069 = 89.219153 =$ SR′ hauteur du cône partiel. On a $AC' = \sqrt{1^2 + (.49875)^2 - 2(1 \times .0025)} = \sqrt{1 + .24875 - .005} = \sqrt{1.24375} = 1.115236$; EF $= .9975$, surf. $AC' = 1.115236 \times .9975 \times .7854 = .87371666$; vol. cône partiel $= .87371666 \times 89.219153 \div 3 = 25.98408$. Or, $26.18 - 25.98408 = .19592$ et .19635 le vol. exact $- .19592 = \frac{43}{19635} = .0022$ près, soit 2 millièmes ou $\frac{1}{5}$ de 1 pour cent.

REM. 4. Comme on l'a déjà dit, le procédé à suivre pour l'onglet partiel,

MBN-C, dont il s'agit uniquement ici, n'est autre que celui que l'on vient d'employer pour l'onglet entier; car, que le point A soit situé en P ou en *a*, etc., on n'en aura pas moins et toujours $AC' = \sqrt{AB^2 + BC'^2 - 2AB.BD}$; BD supposé égal à CK sera toujours moitié de la diminution, AB-KL, due à la partie BC de la hauteur entière du cône; C'K que l'on suppose dans le prolongement de DC', et par conséquent perpendiculaire à KC, se trouvera, comme auparavant, par la proportion AB : BC :: CK : KC'; on aura BC' qui est sensiblement égal à DC' en retranchant KC' de DK ou de DC; et la proportion AB : BC :: R : tang. BAC fournira l'angle A ou S, dont le cos. nat. sert à déterminer la hauteur SR', SP' ou S*r* (suivant le cas) du cône partiel.



Maintenant, à l'effet de trouver les autres éléments ou facteurs A''C', EF qui vont à déterminer la surface MC'N du segment d'ellipse A''EC'F dont la base sup. de l'onglet fait partie, on a dans le triangle A'AA'', l'angle A=BAC, le côté A'A=diam. A'B−AB, et l'angle A''A'A=90° + A''A'V (il est clair que A'V est à A''V comme la hauteur du cône à la moitié de son diamètre A'B, comme 1 est à .005 ou à .0005, suivant le cas, :: R : tang. nat. A''A'V; d'où, tang. nat. A''A'V=.005 ou .0005 est connue et par suite, au moyen des tables, l'angle A''A'V lui-même est connu), pour trouver AA'' et A'A''. Dans le triangle A''A'V rectangle en V, on a R : sin. A''A'V :: A'A' : A''V, d'où A''V = sin. nat. A''A'V × A'A'; A''Q = A'B + 2A''V et EF ou GH = ½ (A''Q + TC) =, d'ordinaire, ½ (A''Q + LK), puisqu'on peut généralement substituer, sans erreur sensible, LK à TC.

REM. 5. Si l'onglet était tronqué par un plan, parallèle ou non à celui de sa base, on déterminerait le vol. du tronc proposé en calculant séparément les volumes respectifs de l'onglet non tronqué et de la partie tronquée, pour prendre ensuite la différence de ces volumes.

Si l'onglet donné était celui d'un cylindre oblique, on le considérerait comme étant le tronc d'un onglet de cylindre droit et on en aurait le vol. en faisant la somme ou différence (suivant le cas) des parties composantes.

Il est à peine nécessaire de dire que si le plan supérieur de l'onglet donné passe par le point P, la hauteur du cône partiel sera SP; et si l'onglet donné est *a*B*c*, on aura pour hauteur du cône partiel S*r*, c.-à-d. SP' + P'*r'* = cos. S + P'*r'* = cos. B*ac* + P'*r'*.

Rappelons-nous en même temps que les problèmes XII et XVIII de ce livre fournissent le moyen d'arriver aux surfaces respectives des bases inférieure et supérieure (segments de cercle et d'ellipse) de tout onglet partiel ou tronqué.

Ajoutons aussi que le taux ou pour-cent de différence entre les volumes

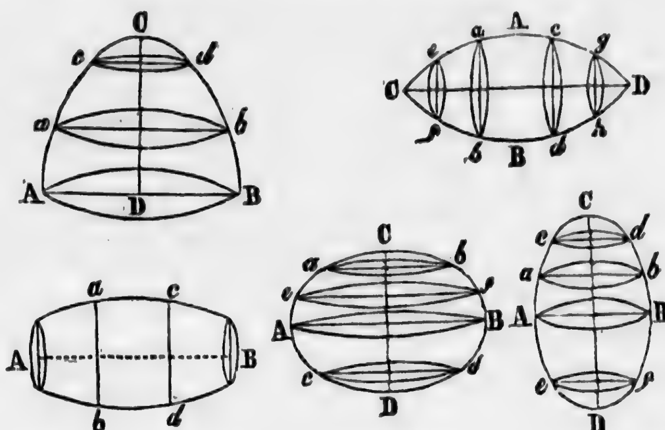
respectifs des onglets correspondants de cylindre et de cône, tel que déterminé par les quelques exemples qu'on en a donnés, pourra servir au besoin à corriger, d'une manière au moins approximative, les résultats que donnerait le calcul d'autres onglets de proportions à peu près analogues.

REM. 6. Si l'onglet proposé ne formait pas partie d'un cylindre régulier, le procédé à suivre serait encore identique ; et l'on trouverait tout de même le volume d'un onglet de prisme quelconque en faisant la différence des parties correspondantes des pyramides entière et partielle, substituées au prisme.

REM. 7. Il importe de faire observer qu'il suffira le plus souvent d'une simple construction géométrique pour obtenir de suite et sans aucun calcul, à l'aide d'une échelle suffisamment subdivisée, toutes les données AC′, A″C′, A′B, EF=GH, PR ou Pr, etc. qui seraient nécessaires à la détermination des volumes relatifs des cônes ou pyramides à estimer ; l'arête MN de l'onglet et le sinus-verse AB du segment de cercle MBN pouvant se mesurer, la hauteur SP étant connue, et la hauteur SR′, SP où Sr' du cône partiel ou de la pyramide, suivant le cas, pouvant se trouver facilement, comme on l'a fait voir, à l'aide du cos. nat. de l'angle BAC de l'onglet et de l'élément PR ou Pr à soustraire ou ajouter suivant que l'arête MN de l'onglet est située en AP ou en BP.

THÉORÈME.

(1520) Expression générale pour la surface latérale, (convexe ou concave) d'un solide de révolution quelconque, ou d'un segment ou tronc de tel solide à une seule base ou à deux bases parallèles, et dont le plan de section est perpendiculaire à l'axe de la courbe génératrice.



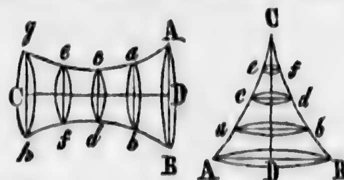
Divisez la courbe génératrice en parties égales assez petites pour que chacune d'elles soit sensiblement une ligne droite; faites passer par chaque point de division une circonférence parallèle à la base ou perpendiculaire à l'axe du solide. Ces circonférences parallèles diviseront la surface à estimer en zones d'égale largeur; chacune de ces zones sera un trapèze continu dont on aura la surface en multipliant la demi-somme de ses bases ou circonférences parallèles par la hauteur ou largeur de la zone, et la surface entière du solide proposé sera égale à la somme des surfaces de ses zones composantes.

On aura donc *la surface voulue en ajoutant à la demi-somme des circonférences des bases ou extrémités opposées du solide, la somme des circonférences intermédiaires de toutes les zones composantes, pour multiplier ensuite le tout par la largeur d'une de ces zones :* expression analogue à celle du par. **(1421)** pour la surface plane d'une figure quelconque.

Ainsi AB–C étant un conoïde quelconque, un demi-fuseau, une hémisphère, un demi-sphéroïde ou un segment quelconque de sphère, de sphéroïde ou de fuseau, à une seule base AB, on en aura la surface latérale $= (\frac{1}{2}$circ. AB + circ. *ab* + circ. *cd*$) \times \overline{Aa = ac = cC}$.

Si le segment ou tronc donné AB*dc* a deux bases AB, *cd*, la surface sera $=(\frac{1}{2}$ circ. AB + circ. *ab* + circ. etc. + $\frac{1}{2}$ circ. *cd*) × A*a* ou *ac*. Si les moitiés opposées du solide sont symétriques comme dans la futaille ou barrique AB ou autre tronc ou segment central de fuseau ou de sphéroïde, il est à peine, nécessaire d'observer qu'il suffira d'opérer sur l'une des moitiés symétriques pour doubler ensuite le résultat.

Si le solide AB–C dont il s'agit est à surface concave, c'est-à-dire, engendrée par la révolution d'une courbe AC ou A*g* qui présente sa convexité à l'axe CD du solide, il est clair qu'on aura tout de même cette surface = ($\frac{1}{2}$ circ. AB + circ. *ab* + circ. *cd* + cir. *ef*) × A*a* ou *ac*, etc., dans le cas

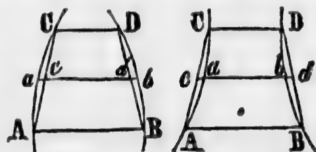


du conoïde ou segment à une seule base, ou = ($\frac{1}{2}$ circ. AB + circ. *ab* + circ. etc. + $\frac{1}{2}$ circ. *gh*) × A*a* ou *ac*, etc. dans le cas du tronc ou segment à deux bases parallèles AB, *gh*.

Il suit évidemment de ce qui précède que si la ligne génératrice de la surface à estimer est mixte, c'est-à-dire en partie convexe et en partie concave, ou si cette ligne est en partie droite et en partie courbe, le même procédé conduira tout aussi simplement à la détermination de cette surface ou superficie.

Il est à remarquer que la formule générale qu'on vient d'établir donnera d'ordinaire, pour toute surface convexe, un résultat qui sera en défaut de la superficie voulue du solide, et de même, le résultat qu'on en obtiendra dans le cas d'une surface concave, sera en excès de la surface réelle du corps proposé.

En effet, dans la pratique, la largeur A*a*C de l'une des zones composantes de la surface à déterminer, sera plus ou moins éloignée de la droite A*c*C, suivant que AC sera une partie plus ou moins grande de la courbe génératrice. Au lieu donc de considérer AC comme ligne droite avec une longueur = A*c*C, on ajoutera à l'exactitude du résultat en prenant pour largeur de la zone la largeur développée A*a*C de cette zone, que l'on obtiendra assez exactement à l'aide d'une échelle de parties égales suffisamment subdivisée et assez mince pour pour pouvoir s'ajuster à la direction convexe ou concave de l'arc à estimer



Cependant, malgré qu'on aura ajouté à la précision de l'opération en substituant à la largeur rectiligne A*c*C de la zone, sa largeur réelle A*a*C ; on n'en sera pas moins encore en défaut ou en excès de la surface voulue, quoique d'une quantité très petite relativement à la superficie totale. Cette quantité sera, à très près, égale à (*ac* + *bd*) (ou 2*ac*) × 3.1416 × $\frac{1}{2}$ A*a*C ou à $3\frac{1}{7}$ fois le double de la surface de l'espace A*c*C*a*A, ou à $12\frac{4}{7}$ fois la surface de de l'espace triangulaire ayant *ac* pour base et pour hauteur la longueur



développée de l'arc aC; car $2ac \times 3.1416$ est évidemment la différence entre la circonférence ab et la moyenne, cd, des circonférences AB, CD, et c'est précisément du produit de cette différence par la longueur de l'arc aC ou aA, ou ce qui est la même chose, du produit de la demi-différence ac par l'arc entier AaC que la surface convexe demandée est faible ou en défaut, ou que la surface concave à déterminer est forte ou en excès; mais à cause de AC très petit, la différence, soit en plus ou en moins, entre la surface exacte et la surface obtenue par la formule, ne sera toujours, comme on vient de le dire, qu'une quantité relativement petite et insignifiante, ce que d'ailleurs on verra bientôt à l'endroit des quelques problèmes et solutions que l'on se propose de soumettre afin de pouvoir en comparer l'exactitude avec celle des résultats que fournissent les règles ordinaires, et pour juger en même temps de la somme de travail nécessaire pour y parvenir.

THÉORÈME.

Expression générale pour le volume d'un solide quelconque.

(1521) *De tout prisme ou cylindre droit ou oblique—de toute pyramide régulière ou irrégulière, ou de tout cône droit ou oblique—de tout tronc de pyramide ou de cône compris entre bases parallèles—de la sphère—de tout onglet, secteur ou pyramide sphérique—de tout sphéroïde—de tout segment de sphère ou de sphéroïde à une seule base ou à deux bases parallèles—de tout paraboloïde ou conoïde parabolique—de tout hyperboloïde ou conoïde hyperbolique—de tout segment de paraboloïde ou d'hyperboloïde à une seule base ou à deux bases parallèles—de tout coin ou autre tronc de prisme triangulaire—de toute partie de tel coin ou de telle prisme tronqué séparée du solide entier par un plan parallèle à l'une quelconque de ses faces latérales—de tout autre prismoïde ou cylindroïde quelconque: le volume est équivalent à la somme de la surface de sa base, s'il n'y en a qu'une ou de ses bases parallèles, s'il y en a deux, et de quatre fois la surface d'une section à demi-distance entre les bases, entre la base et le sommet, ou entre les sommets opposés, suivant le cas, multipliée par un sixième de la hauteur du solide.*

Soient A et B les bases opposées, base et sommet, ou sommets opposés de l'un quelconque des corps qu'on vient d'énumérer, soit S une section parallèle à demi-distance entre A et B, et H la hauteur du solide; on aura suivant le cas, volume=(surf. A + surf. B + 4 surf. S) $\times \frac{1}{6}$ H, ou (surf. A + 4 surf. S) $\times \frac{1}{6}$ H, ou (4 surf. S) $\times \frac{1}{6}$ H, suivant que surf. sommet B = 0 ou que surf. sommet A + surf. sommet B = 0.

(1522) Maintenant, des cinq polyèdres réguliers, le tétraèdre est une pyramide, l'exaèdre est un cube c'est-à-dire un prisme, et chacun des trois autres est un composé de pyramides égales entre elles; tout tronc de prisme

polygone est un composé de troncs de prismes triangulaires ayant chacun pour base l'une des faces latérales du tronc donné et dont les arêtes ou sommets se réunissent tous et se confondent à l'endroit d'une des arêtes parallèles du solide ou sur une droite quelconque parallèle aux côtés du tronc, située à son intérieur et qu'on peut regarder comme axe du prisme dont le tronc fait partie; tout tronc de cylindre peut aussi être regardé comme un composé de troncs de prismes triangulaires, puisque le cylindre lui-même n'est qu'un prisme infinitaire; tout fuseau circulaire, elliptique, parabolique, etc., se décomposera, comme on l'a déjà fait voir (**1138**) en cônes et troncs de cônes, ou, s'il est possible, en troncs ou segments de conoïdes paraboliques ou hyperboliques, subdivisions auxquelles l'on ajoutera au besoin le cylindre et le segment sphérique; le conoïde ou le sphéroïde dont la courbe génératrice ne serait pas celle d'une section de cône, se décomposera (**1139**) comme le fuseau, en troncs de cônes, segments et calottes sphériques, segments de sphéroïdes, de paraboloïdes ou d'hyperboloïdes, etc; l'onglet de cylindre, de cône ou de conoïde sera regardé comme un composé de pyramides rectilignes ou sphériques, et tout autre corps se subdivisera, suivant le cas, en éléments (**1143**) de l'espèce de ceux qu'on vient d'énumérer.

L'expression est donc générale, comme on l'a dit en titre de cet article, et servira à volonté à déterminer le volume d'un solide quelconque.

(**1523**) Habitué jusqu'ici (**1103**) à la considération d'un nombre si varié d'expressions pour le volume des divers solides dont il s'agit, et cela, sans même y comprendre le sphéroïde, le paraboloïde, l'hyperboloïde et les segments de ces corps, qui donnent lieu encore à des formules additionnelles, l'élève s'étonnera peut-être tout d'abord et doutera même de l'existence d'une formule qui puisse s'appliquer à la fois, à des corps aussi dissemblables entre eux que le sont le prisme ou cylindre, la sphère, le segment de sphère, la pyramide ou le cône, et le coin, etc., et dont les surfaces limitatives sont indifféremment planes ou courbes ou les deux; mais il suffira des réflexions suivantes pour faire foi de l'exactitude de l'énoncé de la proposition.

(**1524**) **En premier lieu,** le *prisme ou cylindre* a pour volume (**1103** 1° et 6°) la surface de sa base multipliée par sa hauteur; or les bases opposées d'un prisme ou cylindre sont égales et toute section de ces solides parallèle à la base est (**943**) égale à la base; la somme des 2 bases plus 4 fois la section à demi-distance entre elles, équivaut donc à six fois la base, et c'est la même chose de multiplier 6 fois la base par un sixième de la hauteur ou de multiplier tout simplement la base par la hauteur entière.

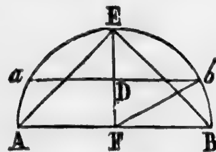
(**1525**) **En second lieu,** le volume de la *pyramide ou* du *cône* (pyramide infinitaire) est (**1103** 2° et 7°) le tiers du produit de sa base par sa hauteur; mais la section parallèle à demi-distance entre la base et le sommet vaut le quart de la base, puisque les côtés ou autres lignes homologues de cette section sont moitiés de ceux de la base et que les surfaces

sont comme les carrés des côtés homologues, c'est-à-dire :: 1 : 4 quand les côtés sont :: 1 : 2. Donc dans ce cas la base plus 4 fois la section entre la base et le sommet équivaut à 2 fois la base, et c'est la même chose de multiplier deux fois la base par un sixième de la hauteur ou de simplifier la formule en multipliant la base par le tiers de la hauteur.

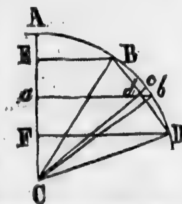
(1526) D'ailleurs, comme le fait voir **(1102)** la déf. du prismoïde, le *tronc de pyramide* est en même temps un prismoïde et le *tronc de cône* (tronc de pyramide infinitaire) est encore un prismoïde et ces troncs, en supposant que leur hauteur soit indéfiniment augmentée, finiront par devenir les solides mêmes dont ils ne formaient d'abord qu'une partie ; or la formule (surf. A + surf. B + 4 surf. S) vaudra toujours, quelle que soit la surface du sommet ou de la base supérieure B, et quand B ne sera plus qu'un point et que sa surface sera par conséquent devenue égale à 0, la formule deviendra (surf. A + 4 surf. S) $\times \frac{1}{6}$ hauteur.

(1527) En troisieme lieu, le volume de la *sphère* est **(1075)** égal à sa surface multipliée par le tiers de son rayon ; or cette surface est précisément égale à quatre de ses grands cercles, c'est-à-dire à quatre fois la surface d'une section de la sphère à distances égales de deux sommets ou points opposés quelconques de sa surface convexe ; de là donc l'exactitude de la formule, puisque le sixième de la hauteur de la sphère, c'est-à-dire de son diamètre, est le tiers du rayon ou demi-diamètre.

(1428) Pour ce qui est de l'*hémisphère,* son volume est égal **(1077)** à la surface convexe par le tiers du rayon ; mais sa surface convexe est égale à 2 grands cercles, puisque la surface de la sphère entière est égale à 4 grands cercles, et l'on a (4 grands cercles $\times \frac{1}{6}$ EF) = (2 grands cercles $\times \frac{1}{3}$ EF) ; or surf. section aDb (où ED = FD) = $\frac{3}{4}$ surf. base AB, puisque $\overline{Db}^2 = \overline{bF}^2 - \overline{DF}^2 = \overline{FB}^2 - (\frac{1}{2}FB)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et comme quatre fois $\frac{3}{4} = 3$, on a 4 surf. ab + surf. AB = 4 surf. AB ; donc 4 surf. $\times \frac{1}{6}$ EF ou 2 surf. AB $\times \frac{1}{3}$ EF = (surf. AB + 4 surf. ab) $\times \frac{1}{6}$ EF ; donc, etc.



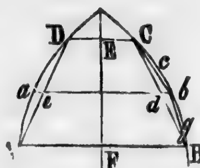
(1529) Et en general, s'agit-il d'un *segment quelconque* ED *de la sphère,* le volume en est égal **(1088)** à la somme des volumes du cône tronqué ED et du segment BD ; or le volume de BD, c'est-à-dire du solide engendré par la révolution du segment BD est **(1089)** la différence entre le secteur sphérique engendré par la révolution du secteur BCD et le solide engendré par la révolution du triangle isocele BCD ; cette différence vaut **(1089)** $\frac{2}{3}\pi$ $(\overline{CB}^2 - \overline{Cd}^2)EF = \frac{2}{3}\pi(\overline{Cc}^2 - \overline{Cd}^2)$ EF ; or $\overline{Cc}^2 - \overline{Cd}^2 = \overline{Cb}^2 - \overline{Cd}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{ad}^2$ à cause de aC commun aux triangles rectangles abC, adC ; donc le volume du solide engendré par BD (et qui avec le cône tronqué engendré par la



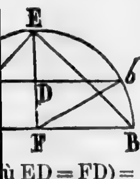
révolution du trapèze EBDF forme le segment sphérique dont il s'agit) $= \frac{2}{3}\pi (ab^2 - ad^2)$EF. Maintenant, $\pi\, ab^2 =$ (**1024**) surf. cercle *ab*, $\pi\, ad^2 =$ surf. cercle *ad* et par conséquent $\pi\,(ab^2 - ad^2) =$ surface de l'anneau circulaire *db*. Il est clair aussi qu'on peut écrire $\pi\,(ab^2 - ad^2)\,\frac{2}{3}$ EF ou $4\,\pi\,(ab^2 - ad^2)\,\frac{1}{6}$ EF, puisque $\frac{2}{3} \div 4 = \frac{1}{6}$; donc le volume de BD=(4 surf. *db*) × $\frac{1}{6}$ EF ou 4 fois la surface de l'anneau engendré par la révolution de *db*, multipliée par un sixième de la hauteur EF du segment. Or le volume du cône tronqué composant est= (**1516**) (surf. base FD + surf. base EB + 4 surf. section parallèle *ad*) × $\frac{1}{6}$ EF ; donc le volume entier du segment de sphère = (surf. base FD + surf. base EB + 4 surf. section *ab* également éloignée de EB et de FD) × $\frac{1}{6}$ EF ; donc, etc.

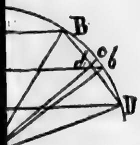
(**1530**) **En quatrième lieu.** Après avoir démontré l'exactitude de "*l'expression générale*" dans le cas de la sphère et du cône, solides engendrés par la révolution du cercle et du triangle, les deux sections extrêmes du cône (et les plus dissemblables) l'une par un plan parallèle à sa base, l'autre par un plan perpendiculaire à sa base et passant par le sommet du cône, on est porté à croire qu'il en sera de même, par analogie, des corps engendrés par la révolution des trois autres sections coniques proprement dites, savoir : l'ellipse (génératrice de l'ellipsoïde ou sphéroïde), la parabole (génératrice du paraboloïde) et l'hyperbole, (génératrice de l'hyperboloïde), et cela à cause de la position intermédiaire qu'occupent ces trois sections entre les deux autres, chacune de ces dernières ayant à passer successivement à l'état d'hyperbole, de parabole et d'ellipse, ou vice versa, pour, de triangle devenir cercle, ou pour, de cercle devenir triangle ; ou ce qui est la même chose, le cône ayant à passer successivement à l'état d'hyperboloïde, de paraboloïde et d'ellipsoïde pour devenir sphère, ou la sphère par le chemin contraire pour devenir cône.

Et en effet, les expressions que fournit le "calcul différentiel et intégral" pour les volumes respectifs du sphéroïde, et des conoïdes parabolique et hyperbolique ou des segments de ces corps, se traduisent et se réduisent facilement à celles contenues dans l'énoncé de cet article et dont elles ne diffèrent, que par la forme.



(**1531**) **Enfin.** Il reste à démontrer que quand le *segment* AC *d'un fuseau*, par exemple, *ou de tout autre solide de révolution*, etc., n'est pas celui d'une sphère, d'un sphéroïde, d'un conoïde régulier ou d'un cône, on n'en obtient pas moins le volume, au moins à très près, par la formule (E + F + 4 *ab*) × $\frac{1}{6}$ EF. En effet, on a toujours vol. cône tronqué AC = (surf. E + surf. F +

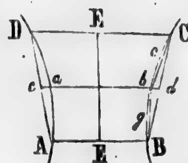




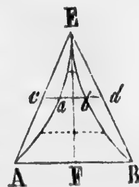
4 surf. *ed*) $\times \frac{1}{6}$ EF, ce qui d'ordinaire offre déjà une approximation assez peu éloignée du volume désiré.

On a encore (par la formule) pour le volume du solide engendré par la révolution du segment B*b*C autour de l'axe EF, 4 fois la surface de l'anneau, dont la largeur est *db*, multipliée par un sixième de la hauteur EF ; or, menant les droites *b*C, *b*B, les solides engendrés par la révolution des triangles ***bd*B**, ***bd*C**, en les considérant comme prismes triangulaires continus, auront pour volume la surface de l'anneau ***bd***, leur base commune, par la moitié de la hauteur EF, ou ce qui est la même chose, trois fois la surface de la base annulaire *db–ae* par un sixième de la hauteur EF, ou vol. B*b*C = 3 surf. ***bd*** $\times \frac{1}{6}$ EF, lequel ajouté à celui du cône tronqué composant AC du solide à estimer, fournit une nouvelle approximation encore plus voisine que la première du volume requis. Il reste encore pour compléter le volume que donne la formule $(E+F+4\,ab)\times\frac{1}{6}$ EF, le produit de $\frac{1}{6}$ EF par une fois la surface de l'anneau décrit par ***bd***, et pour couvrir ou rencontrer ce dernier produit on a les solides engendrés par la révolution des segments *bc*C, *bg*B. Maintenant, il est clair que la somme de ces derniers est au solide engendré par le segment B*b*C, dans le rapport près, des surfaces respectives de la somme des segments *b*B, ***bC*** au segment BC ; or ces surfaces sont l'une à l'autre, à très près, comme 1 est à 4 ; d'où il suit que le reste (surf. ***bd*** $\times \frac{1}{6}$ EF) dont on vient de parler, correspondra sensiblement au volume de la somme des solides *b*B, *b*C qui vont à compléter le segment donné ABCD ; donc, etc.

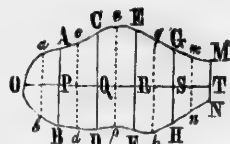
(1532) Remarquons que la différence entre le vol. exact du segment proposé et son volume approximatif par la formule $(E+F+4\,ab)\,\frac{1}{6}$ EF, est toujours en plus, ce qui est dû en partie à ce que, en considérant le solide engendré par la révolution du segment B*b*C autour de l'axe EF comme un prisme continu, (ou comme un anneau solide ayant pour coupe le segment B*b*C) avec une longueur moyenne égale à la demi-somme des circonférences *ab*, *ed*, on prend cette longueur un peu trop grande, puisque le prisme continu dont il s'agit perd plus de sa longueur en C qu'il n'en gagne en B ; ce qui nous porte à observer aussi que puisque l'anneau solide engendré par la révolution du segment B*b*C est plutôt un tronc de prisme continu ou une suite de troncs de prismes, on en aurait assez correctement le volume en faisant **(1095)** le produit de la surface génératrice B*b*C (coupe du prisme par un plan perpendiculaire à ses côtés ou arêtes) par le tiers de la somme des circonférences en B, *b* et C (longueurs respectives des arêtes de l'anneau ou du tronc) et l'on ajouterait encore à l'exactitude du volume à obtenir en multipliant la surface génératrice B*b*C de l'anneau par le cinquième de la somme des cinq circonférences en B, *g*, *b*, *c* et C ou par la somme d'un nombre quelconque de circonférences (prises à des distances égales l'une de l'autre) divisée par le nombre de ces circonférences.



(1533) La règle qu'on vient de donner pour obtenir le volume d'un segment de solide à surface convexe, s'applique également au ***segment d'un solide à surface concave***, la même démonstration pouvant servir dans les deux cas, comme l'indiquent les lettres dans la figure; avec cette réserve seulement que la différence entre le vol. exact et le vol. rapproché sera évidemment en moins au lieu d'être en plus, car dans ce cas la longueur moyenne du tronc de prisme continu ou de l'anneau solide engendré par la révolution du segment B*b*C est moindre que la moyenne à obtenir en faisant entrer en compte les circonférences en B et en C. On aura donc le volume, près, du segment AC, égal à la différence des volumes du tronc de cône AC et de l'anneau solide dû à la révolution du segment B*b*C, c'est-à-dire en faisant le produit du sixième de la hauteur EF par la somme des surfaces des bases AB, DC et de quatre fois la section ***ab*** à demi-distance entre ces bases.



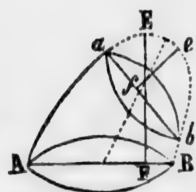
(1534) La même règle donnera encore avec une exactitude suffisante dans la pratique, le volume du ***conoïde*** AEB ***à surface concave***, et souvent on ajoutera indéfiniment à l'exactitude du volume à obtenir par une subdivision continue du corps à estimer, en segments parallèles, de plus en plus petits et de hauteurs égales entre elles. Cependant dans la majorité des cas, il ne sera pas nécessaire de porter le nombre des subdivisions au delà de 3 ou 5 pour s'assurer d'une précision suffisante dans le résultat.



(1535) En general on obtiendra à très près le volume d'un *corps régulier ou irrégulier quelconque* OT en le divisant en tranches ou segments, par des plans parallèles à distances égales l'un de l'autre. L'on fera séparément par la formule prismoïdale $(O + AB + 4\,ab)\,\frac{1}{6}\,OP$, le volume de chacune de ces tranches dont la somme sera le contenu solide du corps proposé. On aura de cette manière pour volume du segment OAB, (surf. O + surf. AB + 4 surf. ab) $\frac{1}{6}$ OP, pour volume de la tranche suivante BC on aura $(AB + CD + 4\,cd)\,\frac{1}{6}$ PQ, et ainsi de suite; d'où il est clair que le vol. entier du solide $=(O + 4\,ab + 2AB + 4cd + 2CD + 4\,ef + 2EF + \text{etc.} + MN) \times \frac{1}{6}\,OP$ ou PQ, etc., c'est-à-dire : à la somme des surfaces des extrémités O, T, du solide donné, ou des bases extérieures de la première et de la dernière tranche, l'on ajoutera deux fois la somme des autres bases AB, CD, etc. de ces deux tranches et des autres tranches composantes, plus quatre fois la somme des sections *ab*, *cd*, *ef*, etc. de ces tranches, pour multiplier ensuite le tout par la sixième partie de la hauteur OP ou PQ, etc. de l'une d'elles ; le résultat sera le volume du

corps proposé, (formule analogue à celle du par. (**1481**) pour obtenir la surface d'une figure plane quelconque.

(**1536**) Il est clair aussi que pour arriver au volume d'un *tronc ou segment quelconque* AB*ab*, *de sphère, de sphéroïde ou de conoïde à bases non parallèles* AB, *ab*, on n'aura qu'à faire séparément le volume du solide entier AB–E et celui du solide partiel *ab–e* pour prendre ensuite la différence de ces volumes. On aura de cette sorte vol. AB *ba* =



(surf. AB + 4 surf. section intermédiaire entre AB et E × $\frac{1}{6}$ EF) moins (surf. *ab* + 4 surf. section intermédiaire entre *ab* et *e* × $\frac{1}{6}$ *e f*).

(**1537**) Faisons maintenant l'application de cette formule générale à la solution des divers problèmes qui y ont trait, (sauf cependant, le prisme ou cylindre, la pyramide ou le cône, le tronc de pyramide ou de cône, et le prismoïde, dont on a déjà traité), et prenons aussi occasion de mettre en regard, dans certains cas, les résultats ainsi obtenus et ceux que fournissent les règles ordinaires, afin de pouvoir en comparer l'exactitude et la somme de travail nécessaire pour y arriver.

PROBLÈME XXXII.

Trouver la surface d'une sphère.

(**1538**) **REGLE I**. *Multipliez* (**1071**) *la circonférence d'un de ses grands cercles par son diamètre.*

REGLE II. *Multipliez* (**1072**) *le carré de son diamètre ou quatre fois le carré de son rayon par* .7854 *et par* 4, *ou de suite par* 3.1416.

Ex. 1. Quelle est la surface d'une sphère dont le diamètre est 7 ?

Rep. 153.9384.

2. Le diamètre d'une sphère est de 24 pouces ; quelle en est la surface ?

Rep. 1809.5616.

3. Combien faudra-t-il de pouces carrés de dorure pour recouvrir une boule sphérique dont la circonférence est de 78.54 pouces ?

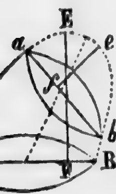
Rep. 78.54 ÷ 3.1416 = 25 = diam. et 78.54 × 25 = 1963.4 p. c.

4. Quelle est la surface de la terre si le diamètre en est 7912 miles ?

Rep. 196,663,355.7504.

5. Combien faudra-t-il de pieds superficiels de plomb ou autre métal pour couvrir un dôme hémisphérique dont le diamètre est de 33 pieds 4 pouces ?

Rep. $33\frac{1}{3} \times 33\frac{1}{3} \times .7854 \times 2 = 1755$ pieds carrés ; car, si la surface de la sphère entière vaut 4 grands cercles, il est clair que celle de l'hémisphère vaut 2 grands cercles.



6. La voûte du rond-point d'une église est en forme d'un quart de sphère dont le rayon est de 15 pieds ; on demande le nombre de verges d'enduits nécessaire pour en revêtir la surface ?

Rep. $30 \times 30 \times .7854 \div 9 = 78.54$ ou $78\frac{1}{2}$ verges ; car, puisque la sphère entière vaut 4 grands cercles, le quart de sphère n'en vaut qu'un.

7. Quel sera, à raison de 5 livres au pied carré, le poids d'une chaudière hémisphérique en cuivre dont la circonférence est de $188\frac{1}{2}$ pouces ?

Rep. $188.5 \div 3.1416 = \text{diam.} = 60$ et $188.5 \times 60 = 11310$ pouces carrés dont la moitié $5655 \div 144 = 39.27$ pieds carrés, cette surface multipliée par 5 (le poids par pied c.) donne 196.35 livres.

(1539) REGLE III. *Considérez la surface de la sphère comme un composé de trapèzes continus ou de zones d'égales largeurs et procédez à la manière du paragraphe* **(1520)**.

Ex. 1. Quelle est la superficie d'un hémisphère dont le diamètre est 263 ?

Rep. La circonférence $= 263 \times 3.1416 = 826.2408$, le quart de circonférence 206.5602 divisé en 5 parties égales, donne pour largeur développée d'une des zones composantes 41.31204. Les diamètres intermédiaires de ces zones obtenus au moyen d'une échelle de 40 unités au pouce, mesurent respectivement, comptant de la base au sommet, 250, 213, 154, et 82 ; la somme de ces diamètres intermédiaires plus la moitié (131.5) du diamètre 263 à la base, est 830.5 ; cette somme $\times$ 3.1416 donne la somme 2609.0988 des circonférences à entrer dans le calcul ; cette dernière $\times$ 41.31204, largeur d'une des zones, donne enfin pour réponse 107,787 unités de surfaces.

REM. Les deux premières règles donnent chacune pour surface de l'hémisphère proposé 108,650.66 unités. La différence entre ces résultats est de 863.5, $863.5 \div 108,650 = .008$ près, c'est-à-dire que le taux d'erreur est de $\frac{4}{5}$ de 1 pour cent à peu près. On en conclut que dans tout cas analogue, il suffira d'augmenter de .008 ou de .01, près, le résultat obtenu par cette règle, pour être très voisin de la surface requise.

Ex. 2. Soit à opérer maintenant avec 10 sections ou zones au lieu de 5, le diamètre de l'hémisphère restant le même ?

Rep. Les 9 diamètres intermédiaires étant comme suit : 260, 250, 234, 213, 186, 154, 119, 82, et 42, leur somme + 131.5 (moitié du diam. 263 à la base) est 1671.5, cette somme $\times 3.1416 = 5251.1844$ pour la somme des circonférences à servir d'elément au calcul proposé ; la largeur d'une des zones composantes sera dans ce cas $\frac{1}{10}$ du quart de circonférence, c'est-à-dire $862.2408 \div 4 \div 10$ ou de suite par $40 = 20.65602$; or, $5251.1844 \times 20.65602$ $= 108,468.57$; on a déjà vu que le résultat exact est 108.650.66 ; la différence de ces résultats n'est plus que 182 qui équivaut à .0017, c'est-à-dire que le défaut n'est plus que du $\frac{1}{6}$ de 1 pour cent.

Ce taux d'erreur ajouté au résultat de tout autre opération analogue don-

nerait donc à peu de chose près, une approximation assez voisine de la vérité.

Ex. 3. Voyons maintenant en quoi l'on ajoutera à la précision du résultat, en opérant la solution du même problème, au moyen d'un nombre additionnel de subdivisions, soit 20 par exemple.

R. p. Les 19 diamètres intermédiaires sont 262, 260, 256, 250, 243, 234, 224, 213, 200, 186, 171, 154, 138, 119, 101, 82, 62, 42, 21; somme des diamètres intermédiaires + le demi-diam. à la base = 3349.5; multipliant par 3.1416 et par 10.32801 (largeur d'une des sections) l'on a 108,679.5 contre 108,650.66 la surface exacte. La différence est dans ce cas en excès au lieu d'être en défaut de la surface voulue, comme elle devait l'être (**1520**) et comme elle le serait en effet si l'on avait calculé les diamètres intermédiaires des zones composantes au lieu de les obtenir graphiquement ou mécaniquement comme on l'a fait à l'aide d'un diagramme en petit sur le papier et d'une échelle de parties égales. Cette différence ou excédant n'est cependant que de 29 unités sur 108,650, soit de .00027 ou moindre que $\frac{1}{40}$ de 1 pour cent; elle est due à ce que l'on ait négligé en mesurant les diamètres intermédiaires, les fractions d'unités qu'on pourrait au besoin faire entrer en compte; mais avouons que dans la pratique un résultat qui comme celui ci ne s'éloignerait de la vérité que de $\frac{1}{3000}$ soit en plus ou en moins, équivaudrait à une exactitude parfaite.

(**1540**) **REM.** Si nous mettons cette troisième règle au nombre de celles dont on peut faire usage pour déterminer la surface d'une sphère ou partie de sphère; ce n'est pas qu'on trouverait à propos d'en faire l'application pour arriver à la surface d'une sphère proprement-dite ou à la solution de tout problème analogue pouvant se résourdre par des règles plus simples et plus directes; mais c'est que dans la pratique, il est assez rare que l'on ait affaire à une sphère parfaite, à une partie de sphère parfaite, à un sphéroïde ou partie de sphéroïde proprement-dit, à un paraboloïde ou hyperboloïde exact, ou en général à un solide de révolution, dont la courbe génératrice soit une exacte section de cône, telle que le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Il est donc évident que dans tous les cas où l'on n'aurait pas à opérer sur un sphéroïde ou conoïde parfait, ou dont l'on ne pourrait établir l'espèce que par un travail préliminaire considérable, il vaudra mieux procéder de suite par la Règle III que de recourir à une autre règle qui n'aurait pas exactement trait, on ne s'appliquerait pas avec précision au problème proposé.

(**1541**) Ajoutons aussi que ***si la surface à estimer au lieu d'être partout d'égale courbure comme celle de la sphère, était, comme celle d'un paraboloïde, etc., de courbure inégale,*** l'on pourrait, avant de procéder à la subdivision en zones d'égales largeurs, diviser d'abord la surface à estimer en deux ou plusieurs parties que l'on subdiviserait ensuite en un moindre

ou plus grand nombre de zones suivant le moins ou plus de courbure dans la partie correspondante de l'arc générateur. L'on calculerait alors séparément les parties d'inégale courbure pour prendre ensuite la somme de ces parties.

(**1542**) *D'ordinaire aussi, le mesureur ou géomètre, ne perdra pas de vue, en s'enquérant du degré de précision à apporter dans l'exercice des détails de son art, l'importance de ne pas dévouer à la solution d'un problème, un travail et un temps que ne justifieraient par les circonstances.* Il serait par exemple oiseux, disons même injuste, que pour établir à un millionième, millième, centième ou à toute autre unité près du résultat exact, une surface ou un volume proposé, on y dévouât un travail qui en fît coûter aux intéressés plus qu'une fraction de la valeur de telle unité. Nous disons, "d'ordinaire," car il est clair qu'il peut y avoir des circonstances, soit dans une question ou cause en litige, où les frais de faire droit aux parties peuvent dépasser et dépassent en effet souvent dans une proportion illimitée la valeur de l'enjeu.

PROBLÈME XXXIII.

Trouver le volume d'une sphère.

(**1543**) **REGLE I.** *Multipliez* (**1075**) *la surface par le tiers du rayon.*

REGLE II. *Cubez* (**1103**, 10°) *le diamètre et multipliez le nombre ainsi trouvé par* $\frac{1}{6}\pi$ *: c'est-à-dire par* 0.5236 *ou le volume d'une sphère dont le diamètre est* 1 ; car (**1084**) les solidités ou volumes de deux sphères quelconques sont comme les cubes de leurs diamètres.

REGLE III. *Multipliez* (**1521**) 4 *fois la surface d'une section de la sphère à distances égales de ses extrémités ou sommets opposés par le sixième de la hauteur perpendiculaire à cette section.* Cette règle, dans le cas de la sphère, est évidemment analogue à la première, car la surface de la sphère vaut 4 grands cercles, le grand cercle est la section de la sphère par un plan passant par le centre c'est-à-dire à distances égales de deux points opposés de sa surface, et le 6ème de la hauteur n'est que le 6ème du diamètre ou le tiers du rayon.

Ex. 1. Quelle est le volume d'une sphère dont le diamètre est 12 ?

Rep. $\overline{12 \times 12 \times 12} \times .5237 = .904.7808$.

2. Si le diamètre moyen de la terre est de 7918.7 milles, quel en est le volume en milles cubes ?

Rep. $(7918.7)^3 \times .5236 = 259,992,792,082.6874908$ m. cub.

3. Une flèche de clocher est terminée par une boule sphérique dont le diamètre est de $2\frac{2}{3}$ pieds; quel en est le volume ?

Rep. $2\frac{2}{3} \times 2\frac{2}{3} = 7\frac{1}{9} = 7.1111111$, $7 \times 2\frac{2}{3} = 18.6666666$, $2\frac{2}{3} \times \frac{1}{9}$ ou $2.6666666 \div 9 = .2962962$, $18.6666666 + .2962962 = 18.9629629 = (2\frac{2}{3})^3$, et $18.9629629 \times .5236 = 9.9290074$ pieds cubes.

4. Quel est le contenu solide d'un boulet de canon d'un diamètre de 10 pouces ?

Rep. $10^3 = 1000$, et $1000 \times .5236 = 523.6$ pouces cubes.

5. Combien faut-il de pouces cubes de poudre à tirer pour remplir un obus dont le diamètre intérieur est de 12 pouces ?

Rep. $12 \times 12 \times .7854 \times 4$ ou $12^2 \times 3.1416 = 452.3904 =$ surface de la sphère et cette surf. $\times \frac{1}{3}$ rayon ou $\frac{1}{6}$ diam., c'est-à-dire par 2, $= 904.6808$ pouces cubes.

6. Combien de pieds cubes contiendra une bouée en forme de sphère d'un diamètre de 10 pieds.

Rep. 523.6 pieds cubes.

7. Une boule en pierre a 3 pieds de diamètre; quel en est le poids, à raison de 150 livres au pied cube ?

Rep. $3 \times 3 \times 3 \times .5236 \times 150 = 2120.58$ livres.

8. Combien de gallons de liqueur (231 pouces cubes au gallon) pourront trouver place dans une chaudière hémisphérique de 10 pieds de diam. ?

Rep. Le contenu du vaisseau en pieds cubes $= 10^3 \times .5236 \div 2 = 261.8$, le nombre de gallons par pied cube $= 1728$ pouces cubes $\div 231 = 7.4805195$, soit $7\frac{1}{2}$, et $261.8 \times 7\frac{1}{2} = 1963\frac{1}{2}$ gallons, ou plus correctement $261.8 \times 7.48 = 1958.26$ gallons.

9. Une voûte hémisphérique de l'epaisseur uniforme d'un pied, mesure 10 pieds de diam. intérieur; combien a-t-il fallu de briques pour le construire, à raison de 20 briques au pied cube ?

Rep. Il est clair que la solidité voulue est égale à la différence des volumes des hémisphères extérieur et intérieur; or, l'lémisphère ext. $= 12^3 \times 5236 \div 2 = 452.39$ pieds cubes, l'hémisphère int. $= 10^3 \times .5236 \div 2 = 261.8$ pieds cubes; la différence de ces volumes est 190.59 pieds cubes et $190.6 \times 20 = 3812$ briques.

10. L'épaisseur d'une bombe est de 5 pouces et sa circonférence extérieure de 62.83 pouces; quel en est le poids, à raison de 480 livres au pied cube ?

Rep. On a pour diam. ext. de la bombe $62.83 \div 3.1416$ 20 pouces; donc le diam. de la partie évidée est 10 pouces; maintenant le volume de la bombe est la différence des volumes des sphères ext. et int. Le vol. de la

sphère ext. $= 20^3 \times .5236 = 4188.8$, le vol. int. $= 10^3 \times .5236 = 523.6$, la différence de ces volumes est 3665.2 pouces cubes; puis, 1 pied cube ou 1728 pouces cubes : 480 livres pesant :: 3665.2 pouces cubes : 1018 livres pesant.

PROBLÈME XXXIV.

Déterminer la surface convexe d'une calotte sphérique ou d'une zone sphérique quelconque.

(1544) REGLE I. *Multipliez* **(1073)** *la hauteur de la zone par la circonférence d'un grand cercle de la sphère; le produit sera la surface voulue.*

REM. 1. Si le diamètre de la sphère n'est pas donné on le trouvera aisément par la méthode du par. **(540)** en divisant le carré du rayon de la base du segment par la hauteur pour avoir le reste du diamètre; le reste ainsi trouvé + la hauteur donnée sera le diamètre voulu de la sphère.

Ex. Le diamètre d'une sphère étant de 42 décimètres, quelle est la surface convexe d'une calotte dont la hauteur est 9 décimètres?

Rep. $42 \times 3.1416 =$ circ. 131.9472 laquelle $\times\ 9 = 1187.5248$ décimètres carrés.

2. Le rayon de la base d'un toit de vide-bouteille en forme de calotte sphérique, est de 10 pieds, la hauteur du toit est de 4 pieds. Combien faudra-t-il de pieds superficiels de plomb ou autre métal pour le revêtir?

Rep. $10^2 \div 4 = 25$, $25 + 4 =$ diam. de la sphère $= 29$, $29 \times 3.1416 =$ circ. 91.1064, puis $91.1064 \times 4 = 364.4256$ pieds carrés.

3. On demande la surface d'un couvercle de chaudière en forme de calotte sphérique dont la circonférence est de 91.1 pouces et la hauteur 10 pouces?

Rep. $91.1 \div 3.1416 = 29 =$ diam. du couvercle dont le rayon est en conséquence de 14.5 pouces; pour avoir le diam. de la sphère dont la calotte fait partie, on a $(14.5)^2 \div 10 = 21.025 =$ le reste du diam. dont la hauteur du couvercle fait partie; donc le diam. voulu $= 21.025 + 10 = 31.025$, ce diam. $\times\ 3.1416 = 97.46814 =$ circ. d'un grand cercle, cette dernière $\times\ 10$ donne 974.6814 pour la surface convexe voulue en pouces carrés.

4. Un dôme hémisphérique dont on a enlevé une calotte pour y asseoir la base de la lanterne qui le couronne, présente en conséquence la forme d'une zone sphérique ou d'un segment sphérique à deux bases; on demande à en déterminer la surface convexe, sa hauteur étant de 9 mètres et le diamètre de la sphère dont il fait partie de 20 mètres?

Rep. $20 \times 3.1416 =$ circ. 62.832 et $62.832 \times 9 = 565.488$ mètres carrés.

REM. Si le rayon ou diam. de la sphère dont une zone fait partie n'est pas connu et que les seules données soient les rayons ou diamètres des bases inf. et sup. du segment et la hauteur ou distance perpendiculaire qui les sépare, le paragraphe **(574)** fournira la méthode d'arriver au rayon voulu ; mais on y parviendrait tout de même et d'une manière plus expéditive et assez exacte dans la pratique par un simple procédé graphique qui permettrait de déterminer de suite le rayon voulu ou diam. de la sphère à l'aide de la même échelle qui aurait servi à fixer sur le papier les proportions et positions relatives des données, le centre du cercle pouvant alors se trouver facilement par tâtonnement, c'est-à-dire par des essais répétés sur la perpendiculaire (prolongée s'il le faut) qui relie les centres des deux cordes données.

5. Les diamètres des bases inf. et sup. d'un toit en forme de segment de sphère mesurent respectivement 16 et 12 mètres, et la hauteur 2 mètres ; quelle est la superficie de la zone qui forme la surface latérale ou convexe du toit.

Rep. On obtient **(574)** soit par calcul ou par construction graphique le diamètre 20 de la sphère dont le segment fait partie. Ce diam. donne pour circonférence 62.832, cette circ. × 2, hauteur du toit, donne pour sa surface convexe 135.664 mètres carrés.

6. Quelle est la surface convexe d'une calotte de $21\frac{2}{5}$ pouces de hauteur enlevée d'une sphère de 6 pieds de diam ?

Rep. 4840.577 pouces carrés.

7. Si le diam. de la terre considérée comme sphère parfaite est de 7970 milles, la hauteur de la zone glaciale sera de 252.361283 milles ; quelle en est la surface ?

Rep. $7970 \times 3.1416 \times 252.361283 = 6{,}318{,}761$ milles carrés.

8. Quelle est la surface de l'une des 10 sections composantes ou compartiments d'une voûte ou d'un dôme en forme de calotte sphérique, le diamètre inférieur de la calotte ou de sa base étant de 40 pieds et sa hauteur de 10 pieds ?

Rep. Le reste du diamètre de la sphère dont la hauteur 10 de la calotte fait partie est **(539)** $(\frac{1}{2}40)^2 \div 10 = 40$, et le diamètre entier par conséquent $= 40 + 10 = 50$, la circonférence $= 50 \times 3.1416 = 157.08$ et la surface entière de la calotte $= 157.08 \times$ la hauteur $10 = 1570.8$; donc la surface de la section proposée est de $1570.8 \div 10 = 157.08$ pieds carrés.

(1545) REGLE II. *Divisez la surface à estimer en zones d'égale largeur, et procédez ensuite à la manière du par.* **(1520)**.

Ex. 1. La circonférence inf. d'une zone sphérique, ou qui a l'air de l'être, mesure 260 pieds, sa circonférence sup. 213 pieds, et deux circonférences intermédiaires équidistantes 250 et 234 pieds, la longueur de l'arc généra-

teur est de 15 pieds, et la largeur développée d'une des trois zones composantes est en conséquence de 5 pieds ; quelle est la surface de la zone entière ?

Rep. ½ 260 + 250 + 234 + ½ 213 = 720.5, cette somme × 5 = 3602.5 p. c. près.

2. La voûte ou le plafond cintré d'une pièce circulaire en forme de calotte sphérique a pour diam. int. 186 décimètres, et pour diamètres intermédiaires de cinq zones composantes 154, 119, 82 et 42 décimètres, la longueur de la courbe génératrice, c'est-à-dire la distance curviligne du centre de la voûte à sa naissance est de 103 décimètres 28 millimètres ; quelle en est la surface concave ?

Rep. 103.28 décimètres ÷ 5 = 20.656 = largeur d'une des zones composantes, ½ diam. inf. = 186 ÷ 2 = 93, 93 + 154 + 119 + 82 + 42 = 490, 490 × 3.1416 = 1539.384 somme des circonférences à entrer dans le calcul, puis 1539.384 × 20.656 = 31,797.5 décimètres carrés ou 317 mètres carrés 97½ décimètres carrés, puisque le mètre carré est de 10 × 10 = 100 décimètres carrés et qu'en reculant de 2 places le point décimal on divise par 100.

PROBLÈME XXXV.

Déterminer la solidité ou le volume d'une calotte sphérique ou d'un segment sphérique quelconque.

(1546) REGLE I. *Multipliez* **(1088)** *la demi-somme des surfaces des bases parallèles par la hauteur du segment ; ajoutez à ce produit le volume d'une sphère dont le diam. soit égal à la hauteur du segment ; la somme de ces deux volumes sera la solidité voulue.*

REM. Quand le segment n'a qu'une seule base, on considère l'autre = 0.

REGLE II. *A la somme des surfaces des bases inf. et sup. du segment, ajoutez 4 fois la surface d'une section à distances égales de ces bases, et multipliez le tout par la sixième partie de la hauteur ; le résultat sera le volume demandé* **(1529)**.

Ex. 1. Quel est le volume d'un segment formant partie d'une sphère dont le diam. est 40, les distances respectives du centre à chacun des plans de section étant 16 et 10 ?

Rep. Il nous faut déterminer tout d'abord les surfaces des bases parallèles du segment donné ; or, les diamètres de ces bases sont des cordes parallèles d'un grand cercle de la sphère, éloignées du centre du cercle, l'une de 16 et l'autre de 10 unités de mesure, les segments du diamètre de grand cercle perpendiculaire à ces cordes sont respectivement, de l'une d'elles, 16 + 20 = 36 et 40 − 36 = 4, de l'autre, 10 + 20 = 30 et 20 − 10 = 10 ; maintenant on a **(540)** 36 × 4 = 144 = le carré de l'une des demi-cordes et 30 × 10 = 300 = le carré de l'autre demi-corde ; ces carrés multipliés chacun

par .7854 et par 4 ou de suite par 3.1416, donnent 452.3904 et 942.48 pour surfaces voulues des bases parallèles. La somme de ces surfaces = 1394.8704, cette somme × 3, la demi hauteur (16 − 10) du segment, ou la demi-somme de ces surfaces × 6 = 4184.6112 = partie du volume requis; le reste du volume requis = 6^3 × .5236 = 113.0976 = vol. d'une sphère dont la hauteur est 6. Ces deux volumes réunis donne 4297.7088 pour la solidité du segment proposé.

2. Le même exemple par la Règle II donne pour surface à demi-distance entre les bases parallèles 33 × 7 = 231 = le carré du rayon de la base ou section intermédiaire, ce carré × 4 donne le carré du diamètre de cette base ou section, et ce dernier carré × .7854 en donne la surface = 725.7096, 4 fois cette surface = 2902.8384 à la quelle ajoutant la somme des surfaces des bases on a 4297.7088 pour le volume requis, car $\frac{1}{6}$ hauteur = 1 et multiplier par 1 ne change pas la valeur du multiplicande.

3. Combien de pieds cubes de liqueur pourra contenir une chaudière hémisphérique d'un diamètre de 10 pieds?

Rep. On a vu (**1528**) que dans l'hémisphère la surface de la coupe ou section intermédiaire également éloignée de la base et du sommet du solide vaut les $\frac{3}{4}$ de la surface de la base ou d'un grand cercle de la sphère; or on a pour surface de la base sup. de la chaudière 10 × 10 × .7854 = 78.54 pieds carrés; mais 4 fois $\frac{3}{4}$ = 3 et trois fois 78.54 + 78.54 = 4 fois 78.54 = 314.16, puis 314.16 × $\frac{1}{6}$ hauteur = 314.16 × 5 ÷ 6 = 261.8 pieds cubes.

REM. Dans le cas de l'hémisphère, comme de la sphère entière, la règle II n'offre aucun avantage, et au contraire, elle donne plus de travail puisqu'il est plus simple pour arriver au résultat voulu de cuber de suite le diam., multiplier ce cube par .5236, et prendre la moitié du produit pour le volume de l'hémisphère.

4. Combien de gallons d'eau pourront trouver place dans un réservoir en forme de calotte sphérique d'un diamètre de 100 pieds et de 20 pieds de profondeur, à raison de 7½ gallons au pied cube?

Rep. Par la première règle, on a le vol. requis = surface de la base du segment (c'est-à-dire la surface sup. du réservoir) × la hauteur (profondeur verticale du réservoir) ÷ 2, plus le vol. d'une sphère ayant pour diamètre cette hauteur; c'est-à dire le vol. requis = (100 × 100 × .7854 × 20 ÷ 2 = 78540) + (20 × 20 × 20 × .5236 = 4188.8) = 82,728.8 pieds cubes × 7.5 = 620,466 gallons.

Rep. Par la deuxième règle, on a d'abord (**540**) pour reste du diam. de la sphère ou du grand cercle dont la hauteur du réservoir fait partie $(\frac{1}{2} 100)^2$ ÷ 20 = 125, 125 + 10 (demi-distance de la surface au fond) = 135, 135 × 10 = 1350 = rectangle des segments du diam. = carré du demi-diam. de la section intermédiaire, ce carré × 3.1416 = 4241.16 = surf. section interm.,

4 fois cette surf. + la surf. de la base du segment = 24,818.64, cette somme × 20 ÷ 6 = 82,728.8 pieds cubes, comme auparavant.

REM. Le choix à faire entre les deux règles pour la solution de ce problème reposera quelquefois sur la nature des données, mais surtout sur le doute qu'il pourrait y avoir quant à l'espèce particulière de la figure à estimer, et l'emploi de cette formule exemptera la nécessité de s'enquérir tout d'abord de la nature exacte du solide proposé. Ainsi, si le réservoir à mesurer était un segment de sphéroïde, un paraboloïde, ou un hyperboloïde ou tout autre figure ressemblant à peu près à celle qu'on vient d'énumérer, la règle II en donnerait dans tous les cas le volume exact, ou à très près, tandis que si l'on traitait comme partie d'une sphère proprement-dite une figure qui ne le serait pas et qu'on la calculât par la règle applicable à la sphère, on pourrait se tromper grièvement dans le résultat.

5. Un bassin dont la forme paraît être celle d'une calotte sphérique, a pour diam. sup. 15 pouces, pour diam. à demi profondeur, 12 pouces, et pour profondeur ou hauteur 7 pouces ; quelle en est la capacité en gallons de 231 pouces cubes ?

Rep. Surface sup. = 15 × 15 × .7854 = 176.715 pouces carrés, surf. intermédiaire = 12 × 12 × .7854 = 113.0976, surf. base + 4 surf. intermédiaire = 629.1054, cette somme × 7 ÷ 6 = 734 pouces cubes près ; divisant par 231 on a 3.18 ou $3\frac{1}{2}$ gallons près pour capacité du vaisseau proposé.

6. Le vide ou l'espace sous un dôme ou plafond cintré d'une pièce circulaire, présente l'aspect d'un segment de sphère à bases parallèles dont les diamètres mesurent respectivement 19.9 mètres et 8.718 mètres, le diamètre du dôme à distances égales de ses bases est de 17.32 mètres ; on demande le nombre de mètres cubes d'air à chauffer, la hauteur étant de 8 mètres ?

Rep. $(19.9)^2 \times .7854 = 396 \times .7854 = 311.02$, $(8.718)^2 = 76$ et $76 \times .7854 = 59.69$, $(17.32)^2 = 300$ et $300 \times .7854 \times 4 = 942.48$, la somme 1313.19 de ces surfaces × 8 ÷ 6 = 1750.92 mètres cubes, ou, ce qui est la même chose et plus simple $\overline{(19.9)^2 + (8.718)^2 + 4\,(17.32)^2} \times .7854 \times 8 \div 6 = \text{vol.}$

7. Un vaisseau en forme de tronc de cône est terminé par un fond qui a l'air d'être une calotte sphérique. Le diamètre inférieur du vaisseau est de 12 pieds, le diamètre intermédiaire de la calotte est de 8.72 pieds, et sa hauteur de 2 pieds ; combien y aura-t-il à ajouter au contenu du corps du vaisseau pour avoir sa capacité entière ?

Rep. $(12)^2 + 4\,(8.72)^2 \times .7854 \times 2 \div 6 = 117.3$ pieds cubes, (où on a pris $(8.72) = 76$) et $117.3 \times 7\frac{1}{2} = 880$ gallons près.

PROBLÈME XXXVI.

Déterminer le volume d'un onglet sphérique, et la surface de la lune qui lui sert de base.

(1547) REGLE I. *Faites d'abord* **(1079)** *la surface, puis le volume de la sphère entière dont l'onglet fait partie. Divisez ensuite cette surface et ce volume par le rapport entre l'angle de l'onglet et 360° ; le résultat sera la surface et la solidité voulues.*

Ex. On demande la surface et le volume d'un onglet de sphère dont l'angle est de 60° et le diamètre 10 ?

Rep. La surface de la sphère entière=**(1538)** $10 \times 3.1416 \times 10 = 314.16$ unités, le rapport de 60° à 360° = $\frac{1}{10}$, donc 314.16÷10=surface voulue= 31.416.

Le volume de la sphère entière=**(1543)** $10^3 \times .5236 = 523.6$, ce vol. divisé par le rapport $\frac{1}{10}$ qu'on vient d'établir, donne 52.36 pour volume de l'onglet proposé.

2. L'un des compartiments de la voûte intérieure ou de la toiture extérieure d'un dôme, présente la figure d'une demi-lune sphérique, le diamètre du dôme est de 100 pieds, et le pourtour en est divisé en 16 parties ou sections par des nervures menées du sommet à la naissance ; on demande la surface d'une des demi-lunes composantes ?

Rep. La surface entière de la sphère dont le dôme fait partie = $100 \times 3.1416 \times 100 = 100^2 \times 3.1416 = 10000 \times 3.1416 = 31{,}416$ pieds carrés, cette surface divisée par 32 puisqu'il y a 32 demi-lunes dans la surface entière, donne pour surface voulue 981¾ pieds carrés.

(1548) REGLE II. *Multipliez la longueur de l'arc qui mesure la largeur de la lune par le diamètre de la sphère dont elle fait partie ; le produit sera la surface voulue. La surface ainsi obtenue (ou telle qu'établie par la première règle) multipliée par le tiers du rayon donnera le volume demandé.*

Ex 1. Combien y a-t-il de mètres carrés de soie dans l'une des sections composantes d'un ballon sphérique dont le diamètre est de 10 mètres, et le nombre des laizes composantes 36.

Rep. La circonférence entière du ballon étant de $10 \times 3.1416 = 31.416$ mètres et le nombre de compartiments 36, il suit que la largeur de la laize sera de 31.416÷36=.872⅔ d'un mètre, puis, .872⅔ × diam. 10 = 8.72⅔ mètres carrés=surface demandée.

2. Il y a à remplacer l'un des 10 onglets composants d'une boule en bois de 30 pouces de diamètre, on demande le volume et la surface convexe de l'onglet.

Rep La circ. de la boule $=30 \times 3.1416 = 94.248$, d'où il suit que la largeur de l'onglet $=94.248 \div 10 = 9.4248$, cette largeur $\times$ diam. 30 donne pour surface de l'onglet $282\frac{3}{4}$ pouces carrés. Le volume = la surface $\times$ le tiers du rayon $=282.744 \times 15 \div 3 = 282.744 \times 30 \div 6 = 282.744 \times 10 \div 2 = 2827.44 \div 2 = 1413\frac{3}{4}$ pouces cubes ou $1413.72 \div 1728$ (nombre de pouces cubes dans un pied cube) $= .82$ près d'un pied cube, soit les quatre cinquièmes d'un pied cube.

3. On demande le nombre de toises (87 pieds cubes anglais à la toise) de maçonnerie dans l'un des 8 compartiments d'une voûte hémisphérique dont le diamètre int. est de 30 pieds et l'épaisseur de la voûte 3 pieds ?

Rep. Il est clair (**1083**) qu'on aura le volume demandé en faisant la différence des demi-onglets composants des hémisphères intérieur et extérieur de la voûte proposée. Or, le diam. int. étant 30, le volume de la sphère $= 30^3 \times .5236 = 14137$, le vol. de la sphère ext. $= 36^3 \times .5236 = 24429$ la différence $(24429 - 14137 = 10292)$ de ces volumes divisée par le nombre (16) des demi-onglets composants de la sphère entière, donne pour volume du compartiment $643\frac{1}{4}$ pieds cubes, divisant ce dernier nombre par 87 on a 7 toises $34\frac{1}{4}$ pieds cubes.

(**1549**) Ou, approximativement, en multipliant la demi-somme des sursurfaces ext. et int. du compartiment par l'épaisseur de la voûte ; on a surface de la sphère int. $30 \times 30 \times .7854 \times 4$ ou $30^2 \times .3.1416 = 2827.44$ dont la moitié 1413.72 est la surface intérieure de la voûte entière, la surface de la sphère ext. $= 36^2 \times .3.1416 = 4071.5136$ dont la moitié 2035.7568 est la surface extérieure de la voûte entière, la somme 3449.4768 de ces surfaces $\div 8$ est la somme des surfaces ext. et int. de la section de voûte à estimer, et cette dernière somme $431.1846 \times 1\frac{1}{2}$ (demi-épaisseur de la voûte) ou la moitié de cette somme multipliée par l'épaisseur entière de la voûte, donne pour contenu cubique du compartiment $646\frac{3}{4}$ pieds cubes, ou 7 toises $37\frac{3}{4}$ pieds cubes.

REM. Nous disons " approximativement," et en effet, le solide à estimer n'est autre chose qu'un tronc de pyramide sphérique compris entre bases parallèles. La pyramide sphérique, comme la pyramide ordinaire, a pour volume (**1082**) le tiers du produit de sa base par sa hauteur ; mais, s'il était vrai que l'on pût arriver au volume d'un tronc de pyramide en multipliant la demi-somme de ses bases parallèles par la hauteur du tronc, il arriverait aussi que l'on obtiendrait correctement le vol. de la pyramide entière égal au demi-produit de sa base par sa hauteur ; car si l'on suppose que la hauteur du tronc augmente indéfiniment, cette hauteur deviendra enfin égale à celle de la pyramide entière, et sa base supérieure cessera par là même d'exister ou deviendra égale à 0 ; dans ce cas la demi-somme des bases opposées sera la demi-base de la pyramide, et la règle donnerait alors

pour volume de la pyramide le demi-produit de sa base par sa hauteur; mais le vol. de la pyramide est au contraire le tiers du produit de sa base par sa hauteur; et la différence entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{6}$; donc l'erreur de la méthode approximative pourrait aller dans un cas extrême jusqu'à $16\frac{2}{3}$ pour cent. Dans l'exemple ci-dessus l'erreur en plus n'est que de $3\frac{1}{2}$ pieds sur 643 pieds ou de $\frac{1}{2}$ pour cent à peu près, et serait encore moindre si le diamètre de la voûte était plus grand relativement à son épaisseur, ou ce qui est la même chose, si la hauteur ou épaisseur du tronc à estimer formait une plus petite partie de la hauteur entière de la pyramide dont le tronc fait partie.

PROBLÈME XXXVII.

Trouver le volume d'un secteur sphérique.

(1550) REGLE. *Après avoir établi par la méthode du prob. 34 la surface de la base du secteur, on multipliera* **(1077)** *cette surface par le tiers du rayon pour avoir le volume demandé.*

Ex. La hauteur de la calotte ou du segment, suivant le cas, qui **(975)** forme la base d'un secteur sphérique, est de $1\frac{1}{2}$ mètres, et le rayon de la sphère dont le secteur fait partie est de 5 mètres; quel est le volume du secteur ?

Rep. La surface de la base=circ. d'un grand cercle × la hauteur du segment, la circ.=diam. $10 \times 3.1416 = 31.416$, $31.416 \times 1.5 = 47.124$ mètres carrés, cette surface × $\frac{1}{3}$ rayon ou par $5 \div 3 = 78.54$ mètres cubes.

2. Quel est le volume d'une bouée en forme de secteur sphérique, la longueur du côté étant de 10 pieds et le diamètre de la base 5 pieds ?

Rep. Avec ces données on obtient d'abord la hauteur de la calotte= $10 - \sqrt{10^2 - 2.5^2} = 10 - 9.6825 = .3175$ d'un pied, la circ. =diam. $20 \times 3.1416 = 62.832$ laquelle × $.3175 = 19.94916$ pieds carrés=surface de la base convexe, cette dernière × $10 \div 3 = 66.497$ pieds cubes.

3. Une tour circulaire dont le diam. int. est de 30 pieds, a pour voûte en pierre de taille un tronc de secteur à bases parallèles dont l'épaisseur est de 5 pieds, la hauteur de la calotte de la voûte est de 10 pieds; quelle est la surface concave et le contenu solide de la voûte ?

Rep. Le vol. du tronc est **(1083)** égal à la différence des secteurs entier et partiel composants=surf. ext. ou de l'extrados × $\frac{1}{3}$ R, moins surf. int. ou de l'intrados × $\frac{1}{3}$ r, où R et r sont les rayons respectifs des sphères ext. et int. dont les secteurs de même nom font partie; or, on obtient d'abord **(540)** pour reste du diamètre du grand cercle dont la hauteur de la voûte fait partie et dont le diamètre de la voûte est une corde, $15^2 \div 10$ (le carré de la demi-corde÷le sinus verse, c'est-à-dire le diam. de la voûte÷sa

hauteur) $=225 \div 10 = 22.5$; alors on a le diam. $= 22.5 + 10 = 32.5$ et le rayon $=16.25$, et l'épaisseur de la voûte étant de 5 pieds, on a pour rayon de l'extrados $16.25 + 5 = 21.25$; maintenant, on aura la surface intérieure de la voûte en faisant la circonférence 102.102 $(=3.1416 \times 32.5)$ et en la multipliant par la hauteur 10, ce qui donnera 1021 pieds carrés pour la surface voulue.

On aura (1074.2°) la surface de l'extrados en faisant $r^2 : R^2$ :: surf. int. : surf. ext. ou $16.25^2 : 21.25^2 :: 1021 : x$, soit $264 : 452 :: 1021 : x = 1748$; enfin le volume demandé $=$ surf. ext. $\times \frac{1}{3}$ R $-$ surf. int. $\times \frac{1}{3} r = (1748 \times 21.25 \div 3) - (1021 \times 16.25 \div 3) = 12382 - 5530 = 6852$ pieds cubes de pierre taillée.

REM I. La règle approximative dont il a été question dans la *rem.* du dernier problème, donnerait dans le cas actuel $\frac{1}{2}(1748 + 1021) \times 5 = 6922$ c'est-à-dire un excédant de 70 pieds cubes, l'erreur étant par conséquent de $1\frac{1}{20}$ pour cent.

4. Un réservoir dont la paroi latérale est une zone de sphère et le fond une surface plane, est revêtu dans toute sa surface concave d'une épaisseur de huit pouces de maçonnerie en briques qui rayonnent vers le centre de la sphère dont le réservoir est un segment. Le diamètre supérieur du réservoir, qui est en même temps celui de la sphère, est de 100 pieds et la profondeur du réservoir ou hauteur de la zone est de 20 pieds. On demande le nombre de briques dans le tronc de secteur sphérique que forme le revêtement latéral du bassin ?

Rep La circ. de la sphère int. ou d'un grand cercle est $100 \times 3.1416 = 314.16$, cette circ. $\times$ la hauteur 20 de la zone intérieure, donne pour surface de cette zone 6283.2 pieds carrés, et le secteur solide dont cette zone est la base ou surface convexe est de $6283.2 \times \frac{1}{3} r = 6283.2 \times 50 \div 3 = 104,720$ pieds cubes ; la surface de la zone ext. du revêtement en brique s'obtient (**1074.2°**) en faisant $100^2 : 101\frac{1}{3}^2 :: 6283.2 : 6451.8687$, cette dernière $\times \frac{1}{3}$ R ou par $\frac{1}{6}(101\frac{1}{3}) = 108,964.894$ pieds cubes $=$ vol. du secteur solide ext., la différence 4244.894 des secteurs int. et ext. est le volume du revêtement en pieds cubes, multipliant par 20 on a 84,898 pour le nombre de briques employées dans l'ouvrage.

REM. II. Dans ce dernier exemple, la somme des surfaces parallèles ext. et int. du revêtement est 12735.0687, cette somme $\times$ la demi-épaisseur, 4 pouces, ou par $\frac{1}{3}$ d'un pied, donne 4245.0229 pieds cubes, $\times 20 = 84900\frac{1}{4}$ briques, ou une différence de $2\frac{1}{4}$ briques seulement dans le résultat ; prouvant par là, comme on l'a déjà dit (**1549**) qu'avec une épaisseur très petite relativement au rayon, on obtient à très près le volume d'un tronc de secteur sphérique, en multipliant sa hauteur par la demi-somme de ses bases parallèles. Cependant, pour ce qui est de la somme de travail à dévouer aux

deux modes de calcul, la seconde méthode n'offre aucun avantage sur la première qu'il vaut mieux alors employer dans tous les cas.

REM. III. On peut aussi dans la pratique (et c'est ce qui se fait quelquefois) lorsque l'épaisseur d'une voûte est uniforme et que le rayon de courbure en est relativement grand, simplifier l'opération et arriver à un résultat assez approximatif en multipliant de suite la surface int. ou ext. de la voûte par son épaisseur. Dans le dernier exemple cette manière de procéder donne, en se servant de la surf. de l'intrados du revêtement en brique, 6283.2 × 8 pouces ou par les $\frac{2}{3}$ d'un pied = 4188.8 pieds cubes × 20 = 83776, ce résultat est en moins de 1122 briques ou de $1\frac{1}{4}$ pour cent. Si l'on prend au contraire la surface ext. 6452 × $\frac{2}{3}$ on a 4301 pieds cubes, ou 86,020 briques, résultat qui est en excès de la vérité de 1122 briques ou de $1\frac{1}{4}$ pour cent comme auparavant.

PROBLÈME XXXVIII.

Trouver la surface d'un triangle sphérique.

(**1551**) **REGLE.** *Faites d'abord la surface de la sphère dont le triangle fait partie, et divisez cette surface par* 8 *pour avoir* (**1193**) *celle du triangle tri-rectangle.*

Faites ensuite (**1200**) *la somme des trois angles, retranchez en* 180° *et divisez le reste par* 90° *; multipliez alors par ce quotient le triangle tri-rectangle et le résultat sera la surface voulue.*

Ex. 1. On demande la surface d'un triangle décrit sur une sphère dont le diamètre est 30 pieds, les angles étant 140°, 92° et 68° ?

Rep. La surface de la sphère entière = diam. 30 × 30 × .7854 × 4 = 30^2 × 3.1416 = 2827.44 pieds carrés dont $\frac{1}{8}$ = 353.43 = surf. du triangle tri-rectangle qui doit entrer comme élément dans le calcul à faire. La somme des trois angles est 300°, 300° − 180° = 120°, 120° ÷ 90° = $1\frac{1}{3}$ et $1\frac{1}{3}$ fois la surf. 353.43 du triangle tri-rect. donne 471.24 la surface voulue.

2. Les angles d'un triangle sphérique équilatéral sont chacun de 120°, et le diam. de la sphère dont le triangle fait partie est de 20 mètres ; quelle est la surface du triangle ?

Rep. 20^2 × 3.1416 ÷ 8 = 157.08 = surf. triangle tri-rect., la somme des angles = 360°, 360° − 180° = 180°, 180 ÷ 90° = 2 et 157.08 × 2 = 314.16 mètres carrés.

3. L'un des 8 compartiments de la surface d'un dôme ou d'une voûte en forme d'hémisphère est un triangle sphérique isocèle dont chacun des angles à la base est un angle droit et dont l'angle au sommet = 360° ÷ 8 = 45°, la longueur de l'arc qui mesure la largeur du compartiment à la naissance du

dôme est de 39.27 et la circonférence entière est en conséquence $=39.27 \times 8 =314.16$, d'où le diam. est 100 ; quelle est la surface du compartiment ?

Rep. La surf. entière de la sphère dont la demi-lune à estimer fait partie $= 100^2 \times 3.1416 = 31416$ unités carrées, le triangle tri-rect. $= 31416 \div 8 = 3927$, la somme des angles excède de 45° deux angles droits, $45° \div 90 = \frac{1}{2}$, donc la surface voulue $= 3927 \div 2 = 1963\frac{1}{2}$ = surface demandée.

D'ailleurs, dans cet exemple où le triangle à estimer forme une partie aliquote connue de la sphère entière, le calcul se simplifie et se réduit à faire la surface de la sphère pour en prendre ensuite la 16ème partie. L'exemple a néanmoins l'avantage de faire voir l'exactitude de la règle (la surf. de la sphère entière 31416 divisée par 16 donnant comme auparavant $1963\frac{1}{2}$ pour surf. convexe de l'onglet proposé) et indique la manière de procéder dans tout autre cas analogue.

4. La somme des trois angles d'un triangle tracé sur la surface de la sphère terrestre, excède (**1416**) d'une seconde (1″) 180°, quelle en est la superficie en supposant que la terre soit une sphère parfaite d'un diamètre de 7912 milles anglais ?

Rep. La surface de la terre $= (7912)^2 \times 3.1416 = 196,663,355.75$, divisant par 8, on a pour surface du triangle tri.-rect. 24.582,919.47 milles carrés ; maintenant $1'' \div 90 = .324000$ et la 324000ème partie du triangle tri. rect. est 75.87321 la surface du triangle proposé en milles carrés.

REM. Il est clair d'après la règle que la surface de tout triangle sphérique de même rayon, c'est-à-dire de tout triangle tracé sur une même sphère a un rapport direct à l'excédant de la somme de ses trois angles sur 180°. Par exemple, si l'excédant sphérique était de 10 secondes au lieu d'une, la surface du triangle serait de 758.7321 milles carrés au lieu de 75.87321 ; de même si l'excès des 3 angles sur 180° n'était que d'un dixième de seconde, la surface du triangle ne serait qu'un dixième de ce qu'elle est pour 1 seconde, savoir : 7.587321. Un excédant d'une minute donnerait pour surface du triangle à estimer un nombre de milles 60 fois plus grand que celui que donne une seconde, c'est-à-dire la 5400ème partie du triangle tri-rect., puisque $324000 \div 60 = 5400$ ou que $90° \times 60 = 5400$; de même 1° donnerait la 90ème partie du triangle tri-rect. et ainsi de suite ; d'où il suit évidemment que dans tout relevé géodésique d'une partie de la sphère terrestre, il suffira, après avoir établi la surface qui correspond par exemple à une seconde ou à un 10ème, 100ème, 1000ème, etc. de seconde, de multiplier cette surface par le nombre de secondes ou de dixièmes de seconde, etc. dans l'excédant de la somme des trois angles d'un triangle quelconque sur 180°, pour avoir de suite la surface de ce triangle, et l'on a vu (**1416,** 3°) la manière d'établir au besoin cet excédant sphérique.

PROBLÈME XXXIX.

Déterminer la surface d'un polygone sphérque.

(1552) RÈGLE. *Trouvez comme dans le dernier problème, le triangle tri-rectangle* (**1201**). *De la somme de tous les angles du polygone soustrayez autant de fois 2 angles droits qu'il y a de côtés moins deux. Divisez le reste par 90° et multipliez le triangle tri-rect. par le quotient ainsi obtenu : le produit sera la surface voulue.*

Ex. 1. Quelle est la surface d'un polygone régulier de huit côtés décrit sur la surface d'une sphère dont le diamètre est 30, chaque angle du polygone étant de 140° ?

Rep. 140° × 8 = 1120° = somme des angles du polygone, 180° × 6 = 1080° = autant de fois 2 angles droits que de côtés moins deux, 1120 − 1080 = 40, 40 ÷ 90 = $\frac{4}{9}$; la surface du polygone proposé sera donc les $\frac{4}{9}$ de celle du triangle tri-rect., la surface de la sphère = 30 × 30 × 3.1416 = 3.1416 × 900 = 2827.44 laquelle ÷ 8 = 353.43 = surf. du triangle tri-rect., cette dernière × 4 ÷ 9 = 157.08 la surface voulue du polygone.

2. On demande la superficie d'un polygone irrégulier de 7 côtés décrit sur une sphère de $8\frac{1}{2}$ mètres de rayon, la somme des angles étant de 1080° ?

Rep. Surface de la sphère = 17^2 × 3.1416 = 907.9224 dont la huitième partie 113.4903 est la surface du triangle tri-rect., 1080° − 5 fois 180° = 180°, 180° ÷ 90° = 2 et 113.4903 × 2 = 226.9806 surface du polygone proposé.

3. La somme des 15 angles d'un polygone de triangulation géodésique est 2340° 1′ 50″, quelle est la surface du polygone en milles carrés, en supposant que le diamètre de la terre à l'endroit du relevé soit de 7912 milles anglais, c'est-à-dire en supposant que l'opération trigonométrique ait eu lieu sur une sphère de ce diamètre ?

Rep. On a, comme dans le dernier problème, pour surface correspondant à un excédant de 1″, 75.87321 milles carrés, et on a vu que la surface à estimer est en rapport direct avec le nombre d'unités dans l'excédant donné ; or, la somme des angles est dans cet exemple 2340° 1′ 50″ laquelle diminuée de 13 fois 180° ou de 2340° laisse pour excédant 1′ 50′ ou 110″ ; la surface voulue sera donc de 110 fois 75.87321 c'est-à-dire 8346.0531 milles carrés.

(1553) REM. La supposition qu'on vient de faire semble indiquer que la terre n'est pas dans toute son étendue de même courbure, c'est-à-dire de même rayon ou diamètre, ou qu'elle n'est pas une sphère parfaite, et en effet le globe terrestre est un sphéroïde dont l'aplatissement vers les pôles est d'à peu près $\frac{1}{300}$ du diam. à l'équateur ou d'environ 26 milles ; or les surfaces de deux sphères de rayons différents ou de deux parties homologues quelconques de ces sphères sont entre elles (**1074**, 2°) comme les carrés des rayons de ces sphères.

Soit donc à trouver le rapport des surfaces de deux figures semblables tracées sur la sphère terrestre, l'une en un endroit ou le diamètre est de 7912, l'autre dans une latitude ou ce diamètre est de 7930 milles, on fera $7912^2 : 7930^2 :: 1 : 1.0045552$, multipliant par ce dernier nombre les 8346.0531 milles carrés du dernier exemple, on obtient 8384.071 milles carrés pour surface du même polygone en un endroit ou le diamètre de la terre serait de 7930 au lieu de 7912, c'est-à dire une différence de 38 milles carrés, quantité qui quoique relativement petite, eu égard à la surface totale de l'étendue de territoire embrassé dans le relevé, n'en est pas moins très grande en elle même, équivalente qu'elle est à celle d'une ville ou d'un canton de plus de 6 milles de diamètre ; ce qui fait voir l'importance d'avoir égard aux dimensions relatives de chaque partie de la sphère terrestre dans les opérations à faire pour en déterminer la surface.

PROBLÈME XL.

Déterminer le volume d'une pyramide sphérique quelconque.

(1554) REGLE. *Trouvez d'abord par les règles précédentes la surface de la base de la pyramide donnée ; multipliez ensuite* (**1082**) *cette surface par le tiers de la hauteur de la pyramide, c'est à-dire par le tiers du rayon de la sphère dont la pyramide fait partie et le résultat sera le volume demandé.*

Ex. 1. Quel est le volume d'une pyramide sphérique dont la base est de 10 mètres carrés et la hauteur 30 mètres? **Rep.** 100 mètres cubes.

2. Parmi les parties composantes d'un polyèdre à cuber, se trouve une pyramide sphérique ou une partie de sphère bornée par des plans se rencontrant au centre de la sphère dont la pyramide fait partie; quel en est le volume, le rayon étant de 15 pouces et la surface du triangle ou polygone qui en constitue la base de 100 pouces? **Rep.** 500 pouces cubes.

3. On a à faire une voûte ou partie de voûte dont le rayon int. ou de l'intrados soit de 30 pieds, l'épaisseur de la voûte 3 pieds et la forme celle d'un polygone irrégulier dont l'aire ou superficie int. est de 100 pieds carrés ; quel en est le volume ?

Rep. Le vol. à estimer est un tronc de pyramide sphérique à bases parallèles ; ce volume est égal (**1083**) à la différence des volumes des pyramides entière et partielle ou ext. et int. composantes. On aura donc pour le vol. voulu, l'expression (surf. ext. $\times \frac{1}{3}$ R) – (surf. int. $\times \frac{1}{3} r$) ; il y a donc a trouver la surf. ext. qui doit concourir au calcul à faire ; à cet effet on a (**1074,** 2°) $30^2 : 33^2 :: 100 : 121 =$ surf. de l'extrados ; maintenant, $(121 \times 11) - (100 \times 10) = 1331 - 1000 = 331$ pieds cubes de maçonnerie.

4. Quel est le poids d'un fragment d'obus ou de bombe dont le diam. int. est 10 pouces, l'épaisseur 5 pouces, et les surfaces int. et ext. ou concave et convexe 60 et 240 pouces carrés, les plans de section du fragment étant dirigés vers le centre de la sphère dont le solide à estimer fait partie, et le poids de la fonte étant à raison de 480 livres au pied cube ?

Rep. $(240 \times 10 \div 3) - (60 \times 5 \div 3) = 800 - 100 = 700$ pouces cubes, le pied cube $= 12 \times 12 \times 12 = 1728$ pouces cubes, d'où on obtient le poids demandé en faisant $1728 : 480 :: 700 : 194\frac{1}{2}$ livres.

PROBLÈME XLI.

Trouver la surface ou le volume d'un polyèdre régulier quelconque.

(1555) REGLE I. Pour la surface, *calculez la surface de l'une de ses faces composantes, et multipliez* **(1118)** *cette surface par le nombre de faces dans le polyèdre proposé.*

Pour le volume : *Multipliez* **(1124)** *la surface du polyèdre par le tiers du rayon de la sphère inscrite, c'est-à-dire par le tiers de la perpendiculaire abaissée du centre sur l'une des faces du solide ; le produit sera le volume demandé.*

REM. On a vu **(1132** et **1134)** que pour déterminer dans le cas du dodécaèdre et de l'Icosaèdre, le rayon de la sphère inscrite, il faut premièrement trouver l'angle formé par deux des faces adjacentes de ces solides, et on a indiqué la manière d'établir cet angle. On peut aussi, au moyen du même angle, calculer la perpendiculaire dans chacun des trois autres polyèdres (dont celle de l'exaèdre est d'ailleurs égale au demi-côté de ce corps) ou obtenir cette perpendiculaire par la méthode du par. **(1128)** ou **(1131)** suivant le cas.

(1556) Il est bon de calculer et de disposer sous forme de tableau, comme on l'a fait **(1440)** pour les polygones réguliers, les surfaces et volumes des cinq polyèdres ayant pour côté l'unité, afin de se servir ensuite au besoin de ces surfaces et volumes, pour déterminer la surface ou le volume de tout autre polyèdre régulier quelconque de même nom.

Tableau des polyèdres réguliers dont le côté est 1.

NOMS.	N°. DE FACES.	ANGLES DES FACES.	SURFACES.	VOLUMES.
Tétraèdre	4	70° 31′ 42″	1.7320508	0.1178513
Hexaèdre	6	90°	6.0000000	1.0000000
Octaèdre	8	109° 28′ 18″	3.4641016	0.4714045
Dodécaèdre	12	116° 33′ 54″	20.6457288	7.6331189
Icosaèdre	20	138° 11′ 23″	8.6602540	2.1816950

(1557) REGLE II. 1°. **Pour la surface** : *carrez le côté du polyèdre donné et multipliez ensuite ce carré par la surface du polyèdre de même nom dont le côté est* 1.

Car, les surfaces des polyèdres semblables sont composées d'un même nombre de polygones semblables, et ces polygones ou leurs sommes sont entre eux (**556**) comme les carrés de leurs côtés homologues.

2°. **Pour le volume** : *cubez le côté du polyèdre donné et multipliez ensuite ce cube par le volume du polyèdre de même nom dont le côté est* 1.

Car, les polyèdres semblables sont composés d'un même nombre de pyramides semblables et ces pyramides ou leurs sommes sont entre elles (**1070**) comme les cubes de leurs côtés homologues.

Ex. 1. Quelle est la surface d'un tétraèdre dont le côté est 12 ?

Rep. $12 \times 12 \times 1.7320908 = 249.4153152$.

2. La surface d'un hexaèdre ou cube dont le côté est 30 ?

Rep. 5400

3. On demande la surface d'un octaèdre dont le côté est 10 ?

Rep. $10 \times 10 \times 3.4641016 = 346.41016$.

4. Déterminer la surface d'un dodécaèdre dont le côté est 3 ?

Rep. $3^2 \times 20.6457288 = 185.8115592$.

5. Quelle est la surface d'un icosaèdre dont le côté est 20 ?

Rep. $8.660254 \times 20^2 = 3464.1016$.

6. Quel est le volume d'un tétraèdre dont le côté est 15 ?

Rep. $15^3 \times 0.1178513 = 397.748$.

7. Le volume d'un cube dont le côté est 12 ? **Rep.** 1728.

8. Si le côté d'un octaèdre est 10, quel en est le volume ?

Rep. 471.4045.

9. Le côté d'un dodécaèdre 2 est : quelle en est la solidité ?

Rep. 61.3049512.

10. Quel est le volume d'un icosaèdre dont le côté est 20 ?

Rep. 17453.56.

11. L'on a terminé un monument par une boule ou couronnement en pierre taillée ayant la forme d'un dodécaèdre dont l'arête ou le côté mesure $13\frac{1}{2}$ pouces : on demande le volume du bloc de pierre en pieds cubes et sa surface en pieds carrés ?

Rep. la surface $= 13.5 \times 13.5 \times 20.6457288 = 3762.6840738$ pouces carrés. L'on obtiendrait tout de même cette surface sans l'aide de celle du tableau, en faisant séparément par la méthode du par. (**1441**) la surface d'un des polygones composants et en multipliant ensuite par 12 l'élément ainsi

obtenu ; ainsi l'aire ou surface d'un pentagone dont le côté est 1 = 1.7204774, multipliant par 182.25 (carré du côté donné) l'on a pour superficie d'une des faces du polyèdre proposé 313.55700615 pouces carrés ; puis, multipliant par 12 (nombre de faces du dodécaèdre) l'on a comme auparavant 3762.6840738 pouces carrés, ce qui prouve aussi l'exactitude du multiplicateur du tableau. Maintenant on n'a qu'à diviser le nombre de pouces qu'on vient de trouver par 144 (les pouces carrés dans un pied carré) pour avoir 26 pieds carrés 18.684 pouces carrrés, la surface demandée.

Rep. Le volume $= 13.5 \times 13.5 \times 13.5$ ou $(13.5)^3$ ou $2460.375 \times 7.6331189 = 18780.3349$ pouces cubes, divisant par 1728 (nombre de pouces cubes dans un pied cube) on a 10.87 près pieds cubes.

PROBLÈME XLII.

Étant donné le diamètre d'une sphère, trouver le côté de l'un quelconque des polyèdres ré͜guliers, qui puisse être inscrit dans la sphère, circonscrit à la sphère, ou qui soit égal à la sphère.

(1558) **REGLE**. *Multipliez le diamètre donné par le nombre qui, dans la table suivante, répond à la demande, et le produit sera le côté du polyèdre voulu.*

Il suffit de ce que l'on a déjà dit à l'endroit des polyèdres réguliers (pages 423 à 427) pour faire comprendre de suite comment on a pu calculer cette table.

Le diamètre d'une spère étant 1, le côté d'un	*Capable d'être inscrit dans la sphère, est*	*Capable d'être circonscrit à la sphère, est*	*Egal en volume à celui de la sphère, est*
Tetraèdre.......	0.8164966	2.4494897	1.6439480
Hexaèdre.......	0.5773503	1.0000000	0.8059958
Octaèdre.......	0.7071068	1.2247447	1.0356300
Dodécaèdre.....	0.3568221	0.4490279	0.4088190
Icosaèdre.......	0.5257309	0.6615845	0.6214433

Ex. L'on veut refondre en forme d'un cube parfait d'égal volume, un boulet de canon dont le diam. est de 10 pouces ; quel sera la longueur du côté de l'exaèdre voulu ? **Rep.** $0.8059958 \times 10 = 8.059958$ pouces.

2. De combien diminuera-t-on le poids d'une sphère en pierre de 5 pieds de diamètre, en le réduisant au plus grand polyèdre régulier de 20 côtés qu'on puisse en tirer, le poids de la pierre étant supposé égal à 150 livres par pied cube ?

Rep. Le vol. de la sphère donnée $= 5^3 \times .5236 = 65.45$ pieds cubes ou

65.45 × 150 = 9817½ livres pesant. Le côté de l'icosaèdre voulu sera, d'après la règle, 0.5257309 × 5 = 2.6286545 ; cubant ce dernier nombre, on a 18.163 et multipliant ce cube par le volume 2.181695 du polyèdre de même nom dont le côté est 1, on a pour le volume de la sphère réduite en icosaèdre 39.626 pieds cubes ou 39.626 × 150=5943.9 livres pesant ; la différence 3873.6 livres est le poids demandé.

PROBLÈME XLIII.

Étant donné le côté de l'un des cinq polyèdres réguliers, trouver le diamètre d'une sphère qui puisse être inscrite dans le polyèdre, circonscrite au polyèdre ou qui lui soit égal en volume.

(**1559**) **REGLE**. *Faites la proportion suivante : le nombre respectif de la table ci-dessus, sous le titre " inscrit, " " circonscrit, " " égal, " est à* 1, *comme le côté du polyèdre donné est au diamètre de la sphère inscrite, circonscrite ou égale, suivant le cas.*

En d'autres termes : le côté du polyèdre inscrit, circonscrit ou égal (suivant le cas) de la table, est au diam. 1 de sa sphère circonscrite, inscrite ou égale, comme le côté du polyèdre donné est au diam. de sa sphère circonscrite, inscrite ou égale.

Ex. 1. Le côté d'un icosaèdre est 2.62865, on veut le réduire en une sphère du plus grand diamètre possible, quel sera ce diamètre ?

Rep. .6615845 : 1 :: 2.62865 : 3.973, près, le diamètre voulu. La surface de l'icosaèdre donné est (**1441**) 2.62865 × 2.62865 × .4330127 × 20 = 59.842355, cette surf. × 3.973 ÷ 6 (c'est-à-dire par le sixième du diam. ou tiers du rayon de la sphère inscrite) donne pour le volume de l'icosaèdre 39.6259 pieds cubes ou 39.626, comme dans l'exemple 2 du problème précédent, chacun des deux résultats étant de cette manière une vérification de l'exactitude de l'autre et en même temps une preuve de l'exactitude des facteurs du tableau.

2. On demande quel sera le diamètre du boulet de canon qu'on pourra obtenir en faisant refondre une masse de fer en forme d'un octaèdre de 12 pouces de côté ?

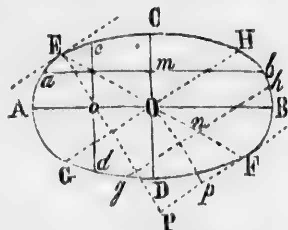
Rep. 1.03563 : 1 :: 12 : 11.58715, c'est-à-dire, le diam. du boulet sera de 11.6 pouces près.

PROBLÈME XLIV.

Trouver le volume d'un sphéroïde quelconque.

(1560) REGLE I. *Multipliez l'axe fixe par le carré de l'axe de révolution et le produit par* .5236 : *le résultat sera le volume demandé.*

REM. Il est clair que cette règle est en tout analogue à celle que l'on donne (**1086, 1543**) pour établir le volume d'une sphère ; et en effet, le sphéroïde, comme la sphère, vaut les $\frac{2}{3}$ de son cylindre circonscrit ; car l'on démontre en " sections coniques " que si l'on a A*o* : *o*O dans l'ellipse :: A*o* : *o*O dans le cercle, l'on aura aussi *oc* : OC dans l'ellipse :: *oc* : OC dans le cercle ; de là, puisqu'on peut (**1009**) regarder la sphère et le sphéroïde comme composés chacun d'une infinité de tranches minces ou de surfaces superposées engendrées par la révolution d'un même nombre d'ordonnées *oc* perpendiculaires à l'axe fixe AB des deux solides, et que ces surfaces composantes sont entre elles comme les carrés des rayons générateurs, il est évident que les deux solides seront aussi entre eux comme les carrés (**104**) de ces ordonnées, ou, ce qui est la même chose, comme les surfaces des bases ou sections correspondantes des cylindres de même hauteur AO circonscrits à ces solides.



Ce que l'on vient de dire du sphéroïde allongé AB et de sa sphère circonscrite, s'entend également du sphéroïde aplati CD et de sa sphère inscrite, car, quel que soit le rapport de O*m* à *m*C dans chacun de ces deux derniers solides, on aura entre *am* et AO de l'un le même rapport qu'entre *am* et AO de l'autre.

(1561) REGLE II. *Multipliez* (**1521**) 4 *fois la surface d'une section quelconque* (AB, CD, GH, etc.) *passant par le centre* (O) *du sphéroïde, par* $\frac{1}{6}$ *de la hauteur perpendiculaire* (CD, AB ou EP, etc.) *du solide correspondant à telle section.*

Car, **en premier lieu,** pour ce qui est du sphéroïde engendré par la révolution de la demi-ellipse ACB autour de son axe AB, les facteurs dans les deux règles se réduisent aux mêmes. En effet la première règle donne pour volume AB × CD × CD × .5236 et la seconde règle donne CD × CD × .7854 × 4 × $\frac{1}{6}$ AB ; si ces expressions sont égales ou équivalentes, l'on doit avoir (en négligeant les facteurs AB, CD, communs aux deux formules) .7854 × 4 × $\frac{1}{6}$ = .5236 ; or .7854 × 4 = 3.1416 et 3.1416 ÷ 6 = .5236 ; donc, etc.

En second lieu, la section AB du même sphéroïde est une ellipse égale en tout à l'ellipse ACBD et sa surface est (**1469**) = AB × CD × .7854 ;

si la seconde règle est correcte, l'on aura donc AB × CD × .7854 × 4 × $\frac{1}{6}$ CD = AB × CD × CD × .5236 ; et en effet en éliminant les facteurs AB, CD et CD qui sont communs aux deux expressions, il reste encore .7854 × 4 × $\frac{1}{6}$ = .5236 ; donc, etc.

En troisieme lieu, il est à démontrer que 4 surf. section GH × $\frac{1}{6}$ EP est encore égale à CD^2 × AB × .5236 ; or, les sections coniques enseignent que quels que soient les axes ou diamètres conjugés (*) GH, EF dont on se sert, les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse et dont les côtés sont parallèles à ces axes conjugés sont tous égaux en surface au rectangle AB × CD ; mais (**1421**) la surface du parallélogramme ayant pour côtés GH, EF est GH × EF × sin. nat. angle EOG ou EFP = GH × EP. La surface de la section GH = (car toute section d'un sphéroïde est une ellipse) GH × CD × .7854 et l'on vient de voir que GH × EP = AB × CD ; donc GH × CD × .7854 × 4 × $\frac{1}{6}$ EP = AB × CD × CD × .5236, CD étant commun aux deux formules, AB × CD = GH × EP et .7854 × 4 × $\frac{1}{6}$ = .5236 ; donc, etc.

REM. Dans le cas du sphéroïde aplati engendré par la révolution de la demi-ellipse DAC autour de l'axe CD, la preuve est analogue à celle que l'on vient de donner.

Ex. 1. Quel est le volume d'un ellipsoïde allongé dont l'axe de révolution est 60, et l'axe fixe 80 ?

Rep. 60 × 60 = 3600, 3600 × 80 = 288000, 288000 × .5236 = 150796.8 unités de volume.

2. Avec les mêmes données, quel sera le volume du sphéroïde aplati ?

Rep. 80 × 80 = 6400, 6400 × 60 = 384000, 384000 × .5236 = 201062.4 unités de volume.

3. Un sphéroïde allongé a pour axes 100 et 200 : quelle en est la solidité ?

Rep. 100^2 × 200 × .5236 = 1,047,200 = le volume demandé. Maintenant, soit EF dans cet exemple un diamètre quelconque = 166, on aura son conjugé GH = $\sqrt{AB^2 + CD^2 - EF^2}$ (car l'on démontre en " sections coniques " que la somme des carrés de toute paire de diamètres conjugés est égale à la somme des carrés du grand et du petit axe) = 149.81322, 4 surf. GH = GH × CD × .7854 × 4 = 47065.3212. Puisque AB.CD = EF.GH × sin. nat. EOG, on obtient sin. nat. EOG = AB.CD ÷ EF.GH = 20000 ÷ 24869 = .8042141 = 53° 32′, et .8042141 × 166 = EP = 133.49954, et 47065.3212 × 133.49954 ÷ 6 = 1,047,199.8, la différence .2 entre les deux résultats se rapportant aux décimales qu'on a négligées dans le calcul.

4. Si les deux axes de la terre sont entre eux comme 304 et 303 quel sera

---

(*) Le diam. GH, conjugé de EF, est celui qui est parallèle à la tangente PF à l'ellipse au point F, où le diam. EF rencontre la courbe.

le volume du sphéroïde (il est aplati, le diam. polaire étant moindre que le diam. équatorial) et de combien ce volume différera-t-il de celui d'une sphère sur le grand axe ?

Rep. Le vol. du sphéroïde $= 304 \times 304 \times 303 \times .5236 = 14661872.3328$
le volume d'une sphère sur le grand axe $= 14710261.3504$
et la différence de ces volumes est 48389.0176.

PROBLÈME XLV.

Déterminer le volume d'un segment quelconque de sphéroïde à une seule ou à deux bases parallèles, perpendiculaires ou non, aux axes du solide.

(**1562**) **REGLE.** *A la somme des surfaces des bases du segment, ajoutez* 4 *fois la surface d'une section à demi-distance entre elles et multipliez le tout par* $\frac{1}{6}$ *de la hauteur du segment : le produit sera le volume demandé.*

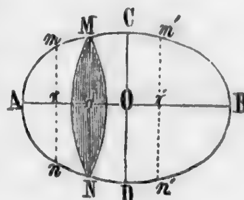
En premier lieu, pour ce qui est du demi-sphéroïde (dont on peut d'ailleurs obtenir le volume en faisant celui du sphéroïde entier pour en prendre ensuite la moitié) on a vu (**1560**) que surf. section *cd* : surf. section CD dans le sphéroïde :: surf. section *cd* : surf. section CD dans la sphère ; or il a été démontré (**1428**) que dans la sphère, surf. *cd* à demi-distance entre A et O $= \frac{3}{4}$ surf. CD ; donc aussi dans le sphéroïde, surf. $cd = \frac{3}{4}$ surf. CD ; donc surf. CD + 4 surf. $cd = 4$ surf. CD, et par le dernier problème, vol. ACD $= 4$ surf. CD $\times \frac{1}{6}$ AO ; donc vol. ACD = (surf. CD + 4 surf. *cd*) $\times \frac{1}{6}$ AO.

Maintenant, pour le demi-sphéroïde dont la base AB est une ellipse= ACBD et dont la section *ab* est aussi une ellipse semblable à la base, (car toutes sections parallèles quelconques du sphéroïde sont des ellipses semblables) on a encore surf. *ab* : surf. AB :: surf. *ab* : surf. AB dans la sphère, car *ab* : AB : *ab* : AB dans les deux solides et (**104**) $ab^2 : AB^2 :: ab^2 : AB^2$ dans les deux solides, et les surfaces des ellipses semblables, comme de toutes autres figures semblables, sont entre elles comme les carrés de leurs diamètres ou autres lignes homologues ; donc surf. ellipse $ab = \frac{3}{4}$ surf. ellipse AB ; or, vol. demi-sphéroïde ACB = par le dernier problème 4 surf. AB $\times \frac{1}{6}$ CO ; donc aussi le même volume = (surf. AB + 4 surf. *ab*) $\times \frac{1}{6}$ CO.

REM. 1. C'est encore une propriété de l'ellipse que tout diamètre EF de cette figure bissecte toute corde ou double-ordonnée *gh* parallèle au diamètre conjugé GH, ce qui donne $nh = ng$ et l'on démontre que de même que l'on a (sections coniques) AB : CD :: $\sqrt{Ao.oB} : oc$, et CD : AB :: $\sqrt{Cm.\ mD} : mb$, de même on a aussi EF : GH :: $\sqrt{En.\ nF} : nh$ et par suite que *nh* : OH :: *mb* : OB :: *oc* : OC quand O*n*, O*m* et O*o* ont à OF, OC et OA

ou à nF, mC et oA le même rapport. On aura donc surf. section $gh = \frac{3}{4}$ surf. section GH et comme il est déjà demontré que vol. demi-sphéroïde GFH $= \frac{1}{3}$ (4 surf. GH $\times \frac{1}{6}$ EP) on aura aussi vol. GFH $=$ (surf. GH $+ 4$ surf. gh) $\times \frac{1}{6}$ Op ou par $\frac{1}{6}$ EP $\div 2$.

En second lieu, pour ce qui est de tout segment de sphéroïde autre que le démi-spheroïde, il suffit de ce que l'on vient de dire et de la démonstration qu'on a donnée au par. (**1529**) de l'exactitude de la règle dans le cas d'un segment quelconque de sphère, pour faire comprendre aussi son exactitude dans le cas actuel ; ce qui dispensera aussi d'ajouter sans nécessité aux dimensions déjà volumineuses de ce traité.



Ex. 1. Quel est le volume d'un segment MNA de sphéroïde à une seule base MN perpendiculaire à l'axe fixe AB, la hauteur Ao du segment étant de 10 unités et les longueurs des axes AB $=100$, CD $=60$?

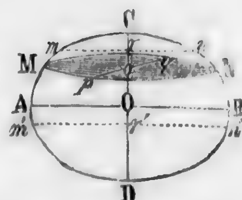
Rep. AB : CD :: $\sqrt{\text{A}o.\ o\text{B}}$: oM, d'où oM $=18$ et MN $=36$; $rm =$ Ar.$rb \times$ CD $\div$ AB $=13.0766985$ et $mn = 26.153397$; surf. MN $+ 4$ surf. $mn = (\text{MN}^2 + 4\ mn^2) \times .7854$, $\text{MN}^2 = 1296$, $mn^2 = 684$ à très près, $(1296 + 4 \text{ fois } 684) \times .7854 = 3166.7328$, multipliant par $\frac{1}{6}$ Ao, ou par $\frac{1}{6}$ 10, on a 5277.888 unités de volume dans le segment proposé.

2. On demande la solidité d'un segment MNB de sphéroïde par un plan MN perpendiculaire à l'axe fixe AB, oB étant $= 90$ et AB, CD 100 et 60 respectivement ?

Rep. Si $m'\ r'$ n'est pas donné on le trouve $=$ Ar'.r'B $\times$ CD $\div$ AB (puisque AB : CD :: $\sqrt{\text{A}r\,.\,r'\text{B}}$: $r'm'$ ou 100 : 60 :: $\sqrt{55 \times 45}$: $r'm'$) $= 29.8496208$ ou $m'n'$ $= 59.6992416$, $\text{MN}^2 + 4\ m'n'^2 \times .7854 \times \frac{1}{6}$ oB $=$ vol. MNB $= 183218.112$; la somme 188,496 de ces volumes et le volume du sphéroïde entier ACBD, car (**1560**) $60 \times 60 = 3600$, $3600 \times 100 = 360{,}000$ et $360{,}000 \times .5236 = 188{,}496$, ce qui prouve aussi l'exactitude de la règle de ce problème.

REM. II. Dans les deux derniers exemples on a supposé les axes AB et CD connus ; mais cette connaissance n'est aucunement essentielle, puisque les diamètres intermédiaires mn, $m'n'$ sont supposés connus ou que d'ailleurs on peut les obtenir directement en mesurant, dans la pratique, ces diamètres ; et c'est là l'un des avantages de la règle de ce problème, qu'elle ne requiert pas que l'on sache à quel sphéroïde appartient le segment à estimer.

3. Un segment MNC de sphéroïde par un plan MN perpendiculaire à l'axe de révolution CD, et dont la base est par conséquent une ellipse, a pour hauteur oC 12 unités, les axes AB, CD étant respectivement 100 et 60 : quel est le contenu solide du segment ?



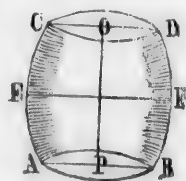
Rep. CD : AB :: $\sqrt{Co.oD}$: oM ou 60 : 100 :: $\sqrt{48 \times 12}$: 40, et parce que les sections parallèles MN, AB sont semblables, on a AB : CD :: MN : pq diamètre conjugé de la base elliptique MN du segment donné ; donc $pq = 60 \times 80 \div 100 = 48$ et surf. $MpNq = 80 \times 48 \times .7854$; puisque $oC = 12$ on a $rC = 6$ et $rD = 54$, 60 : 100 :: $\sqrt{54 \times 6}$: $30 = rm$, le diam. conjugé de $rm = 18$ (car 100 : 60 :: 30 : 18) et la surface de la section $mn = 60 \times 36 \times .7854$; cela posé, on a vol. MNC=(surf. MN. + 4 surf. mn) $\times \frac{1}{6}$ oC $= MN^2 + 4\ mn^2 \times .7854 \times 2 = 19603.584$ unités de volume.

4. Quel est le volume de l'autre segment de même sphéroïde ?

Rep. On a $r'D = oD - \frac{1}{2} oC = 24$, et $r'C = 36$, d'où l'on obtient comme auparavant $m'n' = 97.9796$; l'autre diam. ou axe de l'ellipse $mn' = 58.78776$; d'où surf. $m'n' = 4523.904$ et surf. MN + 4 surf. $m'n' = 21111.552$, cette somme $\times \frac{1}{6}$ 48 ou par $8 = 168892.416$ le volume demandé.

Les deux segments réunis donnent 188,496 qui est en effet le volume du sphéroïde entier comme on l'a vu à l'endroit du 2ème exemple.

5. Quelle est la solidité d'un segment ou tronc central AD de sphéroïde dont les bases parallèles sont des cercles égaux de 40 pouces de diamètre, le plus grand diamètre du tronc = 50 pouces et la hauteur ou distance entre les bases parallèles 18 pouces ?

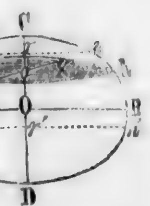


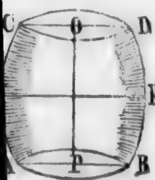
Rep. (Surf. AB + surf. CD + 4 surf. EF) $\times \frac{1}{6}$ OP= $(40^2 + 40^2$ (ou 2 fois 40^2) + 4 fois $50^2) \times .7854 \times 3 =$ 31101.84 pouces cubes ou 18 pieds cubes près.

6. Les diamètres respectifs des bases parallèles d'un tronc de sphéroïde sont 10 et 20, le diam. d'une section à distances égales de ces bases est 30 et la hauteur du tronc est 40 : quel est le volume ?

Rep. $(10^2 + 20^2 + 4$ fois $30^2) \times .7854 \times 40 \div 6 = 3220.14 \times 40 \div 6 = 64402.8$ pouces cubes.

7. L'une des parties composantes d'un cul-de-lampe adossé à un mur, présente la forme d'un demi-segment ou tronc de sphéroïde à bases parallèles elliptiques. Les diamètres des ellipses ou plutôt des demi-ellipses inf. et sup. mesurent respectivement 30 et 39 pouces, le diamètre intermédiaire est 36 et les trois demi-diamètres conjugés ou saillies du cul-de-lampe mesu-





rent 10, 13 et 12 pouces, la hauteur du tronc est 18 pouces; quel en est le volume?

Rep. $(30 \times 10 + 39 \times 13 + 4 \text{ fois } 36 \times 12) \times .7854 \times 3 = 59729.67$ pouces cubes ou 3.4 pieds cubes près.

8. L'on désire savoir combien il y a de gallons (231 pouces cubes au gallon) dans une barrique de vin dont la longueur est 40 pouces et les diamètres au centre et à chaque extrémité 32 et 24 pouces?

Rep. $(2 \text{ fois } 24^2 + 4 \text{ fois } 32^2) \times .7854 \times 40 \div 6 = 27478.5$ pouces cubes, divisant par 231 on a 119 gallons à moins d'une septier près.

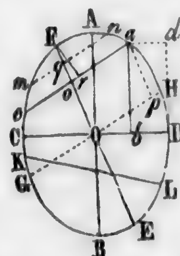
9. Dans un vaisseau incliné, dont la forme paraît être celle d'un demi-sphéroïde, se trouve une quantité de liqueur, la plus grande profondeur de la liqueur est 15 pouces, les diamètres respectifs de sa surface elliptique sont 48 et 36 pouces et les diamètres correspondants de l'ellipse parallèle intermédiaire entre la surface et le fond sont de 30 et $22\frac{1}{2}$ pouces; quelle est la quantité de liqueur dans le vaisseau?

Rep. $(48 \times 36 + 4 \text{ fois } 30 \times 22.5) \times .7854 \times 2.5 = 8694.378$ pouces cubes, soit $37\frac{5}{8}$ gallons près.

PROBLÈME XLVI.

Déterminer le volume d'un tronc de sphéroïde à bases non parallèles.

(1563) REGLE. *Faites le volume du segment de sphéroïde à une seule base dont le tronc donné fait partie, faites aussi le volume de la calotte qui manque au tronc donné pour compléter le segment; la différence de ces volumes sera celui du tronc proposé.*



Ex. 1. Soit à trouver le volume de la partie CD*ae* d'un sphéroïde compris entre un plan CD passant par le centre perpendiculairement à AB et un autre plan quelconque *ea* non parallèle au premier.

Rep. Il nous faut à cet effet déterminer l'axe inconnu AB du sphéroïde dont la hauteur AO du segment CDA fait partie. Ayant mesuré une ordonnée quelconque *ab* et les abscisses C*b*, *b*D ou plutôt $dD = ab$, $ad = bD$ et $Cb = CD - bD$, on fera (sections coniques) $\sqrt{Cb.bD} : ab :: CD : AB$ et on aura le vol. de $CDA = 4 \text{ surf. } CD \times \frac{1}{6} AO$. L'on mesurera ensuite *ae*, OH parallèle à *ae*, *o*O menée du centre au point milieu *o* de *ae* (*o*O formant partie du diam EF le conjugé de GH) et l'abscisse *p*H de l'ordonnée *ap* parallèle et égale à *o*O; avec ces données, l'on fera $\sqrt{Gp.pH} : ap :: GH : EF$; on aura alors *o*F et par suite la perpendiculaire

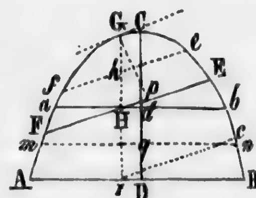
Fr, comme au par. (**1561 Ex. 3**). Il reste à établir le diam. mn d'une section intermédiaire entre ae et le sommet F de la calotte aeF ; or l'on aura mq ou nq moitié (**1562. REM. 1.**) de mn en faisant EF : GH :: $\sqrt{\text{E}q.q\text{F}} : mq$. Enfin on aura le volume demandé CDae = ($\overline{4 \text{ surf. CD}} \times \frac{1}{6}$ Ao) . moins ($\overline{\text{surf. } ae + 4 \text{ surf. } mn} \times \frac{1}{6}$ Fr).

2. Si le solide à estimer était le tronc KLae, l'on opérerait pour la calotte KLB comme on l'a fait pour eaF et la somme des volumes de ces calottes distraite de celui du sphéroïde entier ACBD, il resterait le volume du tronc proposé.

PROBLÈM XLVII.

Trouver la solidité d'un paraboloïde droit ou oblique ou d'un tronc ou segment quelconque de paraboloïde compris entre bases parallèles, perpendiculaires, ou non, à l'axe du solide.

(**1564**) **REGLE.** *A la somme des surfaces des bases opposées, ajoutez 4 fois la surface d'une section intermédiaire à demi-distances entre elles ; multipliez le tout par $\frac{1}{6}$ de la hauteur du corps à estimer et le produit sera le volume demandé.*



En effet, la parabole génératrice ABC est une courbe telle que les abscisses sont proportionnelles aux carrés des ordonnées, c'est-à-dire qu'on a toujours cd : CD :: db^2 : DB , et il en est de même pour tout autre paire ou système d'axes ou de diamètres conjugés EF, GH qui donnent encore Gh : GH :: fh^2 : FH^2 ; donc si C$d = \frac{1}{2}$ CD, db^2 sera $= \frac{1}{2}$ DB^2 et de même si G$h = \frac{1}{2}$ GH, l'on aura $eh^2 = \frac{1}{2}$ EH^2 ; or l'on démontre que le volume du paraboloïde vaut la moitié de son cylindre circonscrit, c'est-à-dire que ce vol. = surf. base AB × $\frac{1}{2}$ CD, ou vol. FEG = surf. base EF × $\frac{1}{2}$ Gp ; mais si $bd^2 = \frac{1}{2}$ BD^2 on a surf. $ab = \frac{1}{2}$ surf. AB (puisque les sections parallèles ab, AB sont des cercles et que les figures semblables sont entre elles comme les carrés de leurs lignes homologues) et surf. AB + 4 surf. ab = 3 surf. AB ; donc surf. AB × $\frac{1}{2}$ CD = 3 surf. AB × $\frac{1}{6}$ CD = (surf. AB + 4 surf. ab) × $\frac{1}{6}$ CD. De même surf. base elliptique EF = 2 surf. base elliptique semblable ef et surf. EF × $\frac{1}{2}$ Gp = (surf. EF + 4 surf. ef) × $\frac{1}{6}$ Gp.

En second lieu, Soit ABba un segment quelconque de paraboloïde à bases parallèles, l'on démontre que le volume s'obtient en multipliant par

la hauteur dD du tronc, la demi-somme des surfaces de ses bases parallèles ; or à cause de $Cd : Cq : CD :: db^2 : qn^2 : DB^2$, il est clair que la surf. intermédiaire mn est moyenne arithmétique entre surf. AB et surf. ab ; d'où il suit que surf. AB + surf. ab + 4 surf. mn = 6 surf. mn ; donc le vol. de AB ba = (surf. AB + surf. ab + 4 surf. mn) × $\frac{1}{6}$ dD.

REM. Dans le cas du paroboloïde ou du tronc de paraboloïde proprement dit, il est clair que cette règle n'offre aucun avantage et au contraire il est plus simple d'arriver de suite au volume désiré en faisant le produit de $\frac{1}{2}$ CD par surf. AB, ou de $\frac{1}{2}$ Gd par surf. EF, ou de $\frac{1}{2}$ dD par la somme des surfaces de AB et de ab, suivant le cas ; mais c'est que dans la pratique il est rare que les solides à estimer soient parfaitement géométriques, et elles le seraient, qu'on ne le saurait pas sans un travail préliminaire qu'il vaudrait autant dévouer de suite au calcul du vol. requis d'après la règle qu'on en donne ici ; tandis que si (**1531, 1540**) l'on prenait pour un paraboloïde, un solide qui fût au contraire un segment ou tronc de sphéroïde ou d'hyperboloïde, ou qui ressemblât seulement à ces solides sans pouvoir s'identifier avec aucun d'eux, la règle de ce problème est celle qui offrirait les garanties d'une exactitude très voisine de la vérité.

Ex. 1. Quel est le volume d'un paraboloïde droit dont la hauteur est 84, et le rayon de la base 24 ?

Rep. diam. 48 × 48 × .7854 × $\frac{1}{2}$ 84 = 76001.5872 le vol. requis.

2. Quelle est, en gallons de 231 pouces cubes, la capacité d'un chaudron parabolique dont la profondeur est 36 pouces et le diamètre 60 pouces ?

Rep 60^2 × .7854 × 18 ÷ 231 = 50,893.92 pouces cubes ÷ 231 = 220.32 ou 220$\frac{1}{3}$ gallons près.

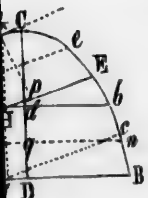
3. Une voûte qui a l'air d'être parabolique, a 60 mètres de hauteur, le diamètre de sa base est 40 mètres et son diamètre intermédiaire est 28 mètres 285 millimètres ; quel est le volume de l'espace renfermé ?

Rep. (40^2 + 4 fois 28.285^2) × .7854 × 60 ÷ 6 = 37,699.2 mètres cubes.

4. Dans un vaisseau incliné qui peut être un paraboloïde ou un segment de sphéroïde, se trouve une quantité de liqueur dont la surface est en conséquence une ellipse ayant pour diamètres 50 et 30 pouces, la plus grande profondeur de la liqueur est de 18 pouces et l'un des diamètres (le moindre) de la section elliptique prise au milieu de cette profondeur est de 22.5 pouces : quel est le volume du contenu ?

Rep. La section intermédiaire étant semblable à la base ou surface, on aura son grand diamètre en faisant 30 : 50 :: 22.5 : 37.5 ; le volume = (50 × 30 + 4 fois 22.5 × 37.5) × .7854 × 3 = 11486 pouces cubes.

5. L'une des parties composantes d'un solide à estimer, paraît être un tronc de conoïde parabolique à bases parallèles, les circonférences respectives



de ses deux bases circulaires et d'une section à demi-distances entre elles, sont 182.2, $94\frac{1}{4}$, 145.15 pouces et la hauteur est 48 pouces ; quel en est le volume en pieds cubes ?

Rep. Divisant chacune de ces circonférences par 3.1416 l'on obtient pour diamètres des sections respectives 58, 30 et 46.2 pouces, ce qui donne pour volume $(58^2 + 30^2 + 4 \text{ fois } 46.2^2)\ .7854 = 10054.5$, et $10054.5 \times 48 \div 6$ c'est-à d. par $8, = 80{,}436$ pouces cubes, $\div 1728 = 46.55$ pieds cubes.

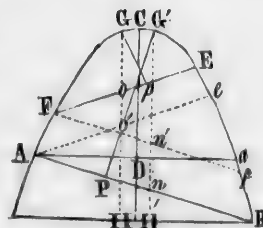
PROBLÈME XLVIII.

Déterminer le volume d'un tronc quelconque ABEF de paraboloïde droit ABC, à bases non parallèles.

(1565) REGLE. *Faites, par le dernier problème, les volumes respectifs du paraboloïde entier* ABC *dont le tronc fait partie, et du paraboloïde partiel ou calotte* EFG *qui manque au tronc donné pour compléter le paraboloïde entier : la différence de ces solidités sera le volume demandé.*

Soit ABEF (fig. du dernier problème) une section du tronc donné par un plan perpendiculaire au centre D de sa base ; prenez sur l'axe Dd de la section une longueur quelconque Dd, mesurez DB, db et puisque (**1564**) l'on a $CD : Cd :: DB^2 : db^2$, faites (**96, div.**) $CD - cd : cd :: DB^2 - db^2 : db^2$, ou ce qui est est la même chose, $DB^2 - db^2 : db^2 :: Dd : dC$, ce qui donnera pour hauteur de la parabole génératrice $dD + dC = DC$. Maintenant, par le point milieu H de EF, menez HG parallèle à DC (car dans la parabole le centre est infiniment éloigné et tout diamètre GH, c'est-à-dire toute bissectrice GH des cordes ou doubles ordonnées parallèles EF, ef, rc, est en conséquence parallèle à l'axe CD), mesurez Hr quelconque, HE et rc et faites, comme auparavant $rc^2 - HE^2 : HE^2 :: Hr : HG$; avec HG et l'angle GHp ou GHE, l'on trouve facilement (**1561.3**) la hauteur perpendiculaire Gp de la calotte FGE, pour faire ensuite les volumes respectifs des conoïdes entier et partiel et leur différence, ce qui résoudra le problème.

RÉM. Si le **tronc** à estimer ABEF est celui **d'un paraboloide oblique ;** menez entre A et F une droite quelconque Ae parallèle à FE, bissectez en o', o ces doubles ordonnées et menez Goo'H qui passera par le sommet G de la calotte FEG ; menez ensuite Ff parallèle à AB, bissectez ces parallèles en n', n et menez le diamètre G$'n'$ nH$'$ qui rencontrera le sommet G$'$ du paraboloïde oblique ABG$'$; l'on calcu-

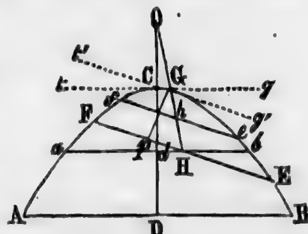


lera, comme auparavant, les hauteurs G′P, Gp des conoïdes entier et partiel, à l'aide des angles GoE, G′nA et des droites Go et G′n dont on établira les longueurs comme il a déjà été dit, et on aura le volume du tronc = vol. ABG′ − vol. FEG = surf. AB × $\frac{1}{3}$G′P − surf. EF × $\frac{1}{3}$ Gp. Pour avoir au besoin CD, l'on mènera d'un point quelconque entre A et F une droite Aa perpendiculaire à GH ou à G′H′, la perpendiculaire CD, où AD = aD, sera l'axe voulu.

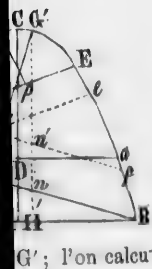
PROBLÈME XLIX.

Trouver le volume d'un hyperboloïde droit ou oblique, ou d'un tronc quelconque d'hyperboloïde, compris entre des bases parallèles, perpendiculaires, ou non, à l'axe de révolution.

(15[illegible]) **REGLE.** *A la somme des surfaces des bases opposées du solide, ajoutez 4 fois la surface d'une section à demi-distances entre elles, multipliez le tout par $\frac{1}{6}$ de la hauteur et le produit sera le volume voulu.*



Dans le cas de l'hyperboloïde droit ABC ou du tronc AB ba d'hyperboloïde droit à bases parallèles, cette règle est, en d'autres termes, celle même qu'enseigne le "calcul dif. et int." et puisque le diam. intermédiaire est ici essentiel au calcul à faire, il est à démontrer comment on peut l'obtenir quand il ne se trouve pas au nombre des données nécessaires. L'hyperbole est telle que son centre est en O en dehors de l'enceinte de la courbe, et comme dans le cercle, l'ellipse et la parabole, de même dans l'hyperbole tout diamètre OG, OC prolongé bissecte la corde ou double ordonnée AB, ab, EF, ef parallèle à la tangente tg, $t'g'$ menée par le point C ou G où tel diamètre rencontre la courbe. Il suit de là que pour déterminer le centre de l'hyperbole, il n'y a qu'à mener et à bissecter en Dd, Hh, deux paires de parallèles quelconques AB, ab, EF, ef, et à prolonger en dehors de la figure les droites Dd, Hh reliant les points de section, jusqu'à leur rencontre en O qui sera le centre voulu, ou, si la direction OD de l'axe est connue, l'intersection de cet axe par la droite Hh prolongée déterminera le centre voulu. Maintenant, par la nature de l'hyperbole, l'on démontre en "sections coniques" que $2\text{OC.CD} + \text{CD}^2 : 2\text{OC.C}d + \text{C}d^2 :: \text{DB}^2 : db^2$, ou que $2\text{OG.GH} + \text{GH}^2 : 2\text{OG.G}h + \text{G}h^2 :: \text{HE}^2 : he^2$; voilà donc comment on obtient le diam. intermédiaire ab ou ef en prenant Cd = dD ou Gh = hH′ suivant le cas.



Ex. 1. La hauteur CD d'un hyperboloïde droit ABC est 10 pouces, et AD le rayon de sa base est 12 pouces, le diamètre intermédiaire *ab* est 15.8745 pouces : quel est le volume ?

Rep. $(24^2 + 4 \text{ fois } 15.8745^2) \times 10 \div 6 = 2073.454691$ pouces cubes.

2. Un vaisseau qui paraît être un conoïde hyperbolique droit, a pour hauteur ou profondeur 50 pouces, pour diam. sup. 104 pouces et pour diam. intermédiaire 68 pouces : quelle en est la capacité en gallons à vin ?

Rep. $104^2 \times .7854 = 8494.8864$ = surf. de la base supérieure, 4 fois $68^2 \times .7854 = 68^2 \times .3.1416 = 14526.7584$, la somme de ces surfaces est 23021. 6448, cette somme $\times \frac{1}{6}$ 50 ou, ce qui est la même chose $\times$ 50 et le produit $\div 6 = 191847.04$ pouces cubes, $\div 231 = 830\frac{1}{2}$ gallons.

3. Combien y a-t-il de mètres cubes d'espace sous une voûte qui a l'air d'être hyperbolique et dont la hauteur est de 15 mètres, le diamètre de la base 32 mètres et le diam. intermédiaire 20 mètres ?

Rep. 5152.224 mètres cubes.

4. Une chaudière en forme d'hyperboloïde, contient une certaine quantité de liqueur; l'on demande combien il faudra encore de gallons pour la remplir, la partie du vaisseau à combler ayant par conséquent la forme d'un tronc d'hyperboloïde à bases parallèles; les diamètres de ces bases sont 24 et 32 pouces, le diam. intér. 28.1708 et la hauteur du tronc 20 pouces ?

Rep. $(24^2 + 32^2 + 4 \text{ fois } 28.1708^2) \times .7854 \times 20 \div 6 = 12499\frac{1}{3}$ pouces cubes ou 54.108 gallons, ou 7.2334 pieds cubes.

5. L'une des parties composantes d'un cul-de-lampe ou autre objet à estimer, présente l'apparence d'un tronc d'hyperboloïde dont la hauteur est 12 pouces, le petit diam. 6 pouces, le grand diam. 10 pouces et le diam. interm. $8\frac{1}{2}$ pouces : quel en est le volume ? **Rep.** 667.59 pouces cubes.

REM. Pour l'hyperboloïde oblique ou le segment d'un hyperboloïde droit par un plan non perpendiculaire à l'axe, le "calcul" enseigne à obtenir le volume en faisant la proportion suivante : GH + 2GO : : $\frac{2}{3}$ GH + 2GO : : $\frac{1}{2}$ cylindroïde de même base et hauteur : volume requis.

6. Soit à cuber un hyperboloïde EFG dont le grand axe EF de la base elliptique mesure 78 unités et son diamètre conjugé 69.2, soit OG=41.7, GH=19.8, Gp=15.8 ; l'on a vu que pour trouver *ef* il y a à faire 2GO.GH + GH^2 : 2GO.Gh + Gh^2 : : HE^2 : he^2, ou (ce qui (**73, Ax.**) est la même chose) : : EF^2 : ef^2, c'est-à-dire, en chiffres, 2043.36 : 923.67 : : 6084 : 2750.18 = ef^2 d'où *ef*=52.44217 ; maintenant la section parallèle *ef* étant une ellipse semblable à EF, on aura surf. *ef* en faisant EF^2 : ef^2 : : surf. EF : surf. *ef* ou 6084 : 2750.18 : : 4239.275 : 1916.3=surf. *ef*; enfin (surf. EF + 4 surf. *ef*)

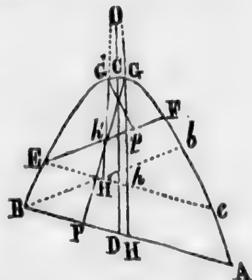
$\times \frac{1}{6}$ Gp = volume EFG, ou (4239.275 + 4 fois 1916.3) × 15.8 et ÷ 6 = 31,348.4508 unités de volume dans le solide à estimer. Pour preuve, la règle donnée dans la remarque qui précède cet exemple donne 103.2 : 96.6 : : 33490.2723 : 31,348.4525, la différence $\frac{17}{313484333}$ ou .00000005 étant due aux décimales négligées.

PROBLÈME L.

Déterminer le volume d'un tronc quelconque ABEF d'hyperboloïde à bases AB, EF non parallèles.

(1567) REGLE. *Faites séparément les volumes respectifs de l'hyperboloïde entier* ABG *et de l'hyperboloïde partiel* EFG, *et prenez la différence de ces volumes qui sera la solidité voulue.*

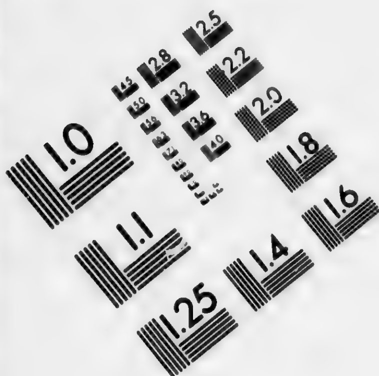
Menez Bb parallèle à EF, Ee parallèle à AB, bissectez ces deux paires de parallèles et par les points de bissection menez les droites HO, H′O dont l'intersection en O sera le centre de la courbe génératrice. Par les points d'intersection G, G′ menez les perpendiculaires GP, G′p aux bases AB, EF et le volume demandé sera (surf. AB + 4 surf. section intermédiaire entre AB et G) × $\frac{1}{6}$ GP, moins (surf. EF + 4 surf. sect. inter. entre EF et G′) × $\frac{1}{6}$ G′p.



REM. I. Pour fixer la direction de l'axe CD de révolution : du centre O avec un rayon quelconque, intersectez les côtés opposés de la courbe, joignez ces intersections par une ligne droite, et OD menée perpendiculaire du centre O sur cette dernière sera la direction voulue.

REM. II. Pour trouver les points G et G′, c.-à-d. les facteurs GP, G′p et les autres éléments nécessaires au calcul des surf. des sections intermédiaires et des volumes des solides entier et partiel, on a vu (**1566**) que $2\text{OG.GH} + \text{GH}^2 : 2\text{OG.G}h + \text{G}h^2 :: \text{AB}^2 : e\text{E}^2$, ce qui donne (**96. div.**) $(2\text{OG.GH} + \text{GH}^2) - (2\text{OG.G}h + \text{G}h^2) : 2\text{OG.G}h + \text{G}h^2 :: \text{AB}^2 - e\text{E}^2 : e\text{E}^2$. Dans cette proportion, on connaît $(2\text{OG.GH} + \text{GH}^2) - (2\text{OG.G}h + \text{G}h^2) = 2\text{H}h.h\text{O} + \text{H}h^2$ (comme une simple esquisse de $2\text{OG.G}h + \text{G}h^2$ superposée à $2\text{OG.GH} + \text{GH}^2$ le fait voir de suite); on connaît aussi $\text{AB}^2 - e\text{E}^2$ et $e\text{E}^2$; c'est-à-dire, 3 termes pour trouver le 4ième $2\text{OG.G}h + \text{G}h^2$; maintenant (**359**) $h\text{O}^2 - (2\text{OG.G}h + \text{G}h^2) = \text{GO}^2$, $\sqrt{\text{GO}^2} = \text{GO}$, HO − GO = GH et à l'aide de GH et de l'angle GHB on détermine GP, etc., etc.





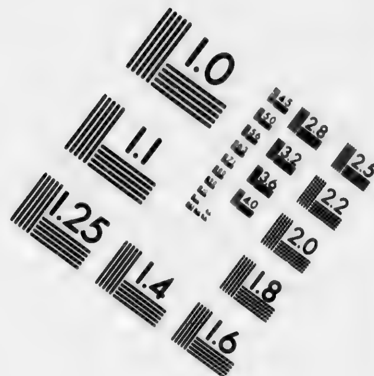
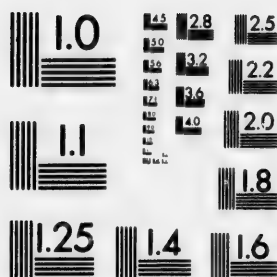
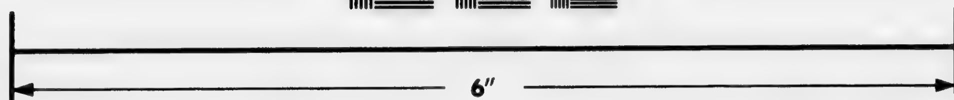
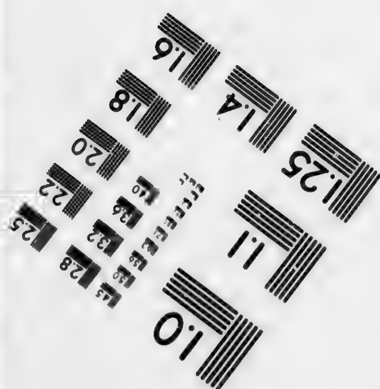
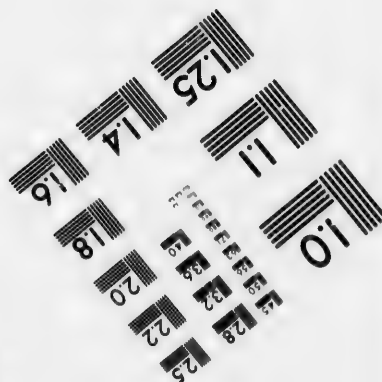


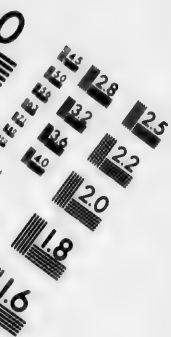
IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)










2.8
2.5
3.2
2.2
3.6
2.0
1.8
1.6

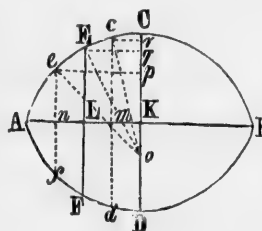

1.1
1.0

PROBLÈME LI.

Déterminer le volume près, d'un fuseau quelconque, soit circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

(1568) **REGLE**. *Divisez le demi-fuseau* (ACD *ou* BCD) *en deux sections ou tranches parallèles* (AEF, ECDF) *d'épaisseur ou hauteur* (AL, LK) *égale ou à peu près égale, par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution* (AB) *de la courbe génératrice* (ACB *ou* ADB)*; faites séparément le volume de chacune de ces tranches, en ajoutant à la somme des surfaces de leurs bases parallèles ou opposées,* 4 *fois la surface d'une section* (*ef, cd*) *également éloignée de ces bases, et multipliez le tout par* $\frac{1}{6}$ *de la hauteur de la tranche ; faites ensuite la somme des volumes des deux tranches composantes et doublez le résultat pour le volume près, du fuseau proposé.*

(1569) Ex. 1. On demande le vol. pres, d'un fuseau circulaire (c.-à-d. engendré par la révolution d'un arc de cercle) dont la longueur AB est 48, et le diam. CD 36 ?



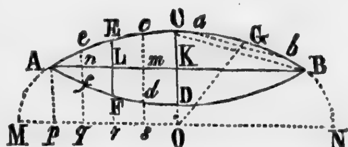
Rep. Si les diamètres intermédiaires EF, *ef*, *cd* ne sont pas donnés ou qu'on ne puisse les obtenir directement par le mesurage du solide à estimer, il sera facile de les déterminer par le calcul; ainsi on aura tout d'abord le rayon *o*C de l'arc ACB par la méthode du par. (**540**) : $24^2 \div 18 = 32 =$ le reste du diam. dont CK fait partie, le diam. $= 32 + 18 = 50$ et le rayon par conséquent $= 25$. Maintenant on aura *op*, *oq* et *or* respectivement égaux aux racines carrées des différences entre le carré du rayon et les carrés de *ep*, E*q* et *cr*, ce qui est évident ; or, si l'on suppose AL$=$KL on aura A*n*$=$*n*L$=$L*m*$=$*m*K, ou $cr = 6$, $Eq = 12$, $ep = 18$, $op^2 = oe^2 - ep^2 = 625 - 324 = 301$ dont la $\sqrt{}$ est 17.349352 de laquelle retranchant $oK = 7 = 25 - 18$ il reste K*p* ou $en = 10.349352$ et par conséquent *ef* ou $2en = 20.698704$ ou soit 20.6987, car, comme la différence de volume d'après cette règle est toujours en plus, on peut négliger au moins les dernières décimales ; de la même manière on trouve diam. $EF = 29.863$ et $cd = 34.5386$.

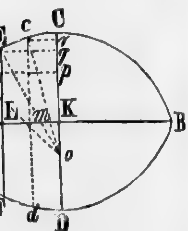
Le volume de $FC = (DC^2 + 4\,cd^2 + EF^2) \times .7854 \times \frac{1}{6}$ KL ou par $2 = 10931.82$, le volume de $efA = (EF^2 + 4\,ef^2) \times .7854 \times 2 = 4092.72$, ces volumes ajoutés l'un à l'autre et le tout $\times$ 2 ,donne pour volume du fuseau entier 30049 unités cubiques.

REM. Le volume exact du fuseau du dernier exemple est 29916.6714, c.-à.d. que le volume rapproché excède de $\frac{132}{29916}$ ou de .0044 (moins d'un demi-centième) le volume réel, ce qui équivaut d'ordinaire dans la pratique à une exactitude parfaite ou suffisante au moins, eu égard au travail additionnel qu'il faut donner au calcul d'après les règles ordinaires ; et d'ailleurs

comme on l'a déjà dit (**1137, 1534**) on peut avec la règle ici donnée porter la précision à tel degré qu'on voudra par une subdivision du demi-fuseau en tranches plus nombreuses et dont les côtés s'approchent davantage de la ligne droite.

(1570) Ex. 2. Trouver le volume pres, d'un fuseau elliptique (c'est-à-dire engendré par la révolution d'un arc d'ellipse autour d'une corde perpendiculaire à l'un de ses axes) dont la longueur AB est 80 décimètres, le plus grand diam. CD 24 décimètres et un diam. EF également éloigné de A et CD 18.99094 décimètres ?





Rep. Soit AECGB la courbe génératrice ; pour en trouver le centre, menez (**1562, R. I.**) deux cordes parallèles quelconques BC, *ab* et par les points milieux de ces cordes menez une droite GO qui intersectera CD, prolongé s'il le faut, en O centre de l'ellipse. Soit maintenant CO = 30, l'on a un diam. de l'ellipse = 2CO, une ordonnée AK ou KB = $\frac{1}{2}$ AB = 40, une abscisse CK ou segment du diam. = 12 et par conséquent l'autre segment = 2CO − CK = 60 − 12 = 48 pour trouver (**1562, R I.**) l'autre diamètre MN de l'ellipse en faisant $\sqrt{CK\times(2CO-CK)}$: KB :: 2CO : MN ou $\sqrt{12\times48}$.40 :: 60 100 = MN, MN étant le moindre ou le plus grand diam. de l'ellipse, suivant que le rectangle des segments est plus grand ou moindre que le carré de l'ordonnée ou perpendiculaire KB.

Pour avoir *ef*, on fera d'abord la proportion MN : 2CO ou (ce qui est la même chose) MO : CO :: $\sqrt{Mq.qN}$: *qe* ou 50 : 30 :: $\sqrt{20\times80}$: *eq* = 24 et comme *nq* = KO = CO − CK = 30 − 12 = 18, on aura *en* = 24 − 18 = 6 et diam. *ef* = 2*en* = 12 ; on trouvera de même *cs* = 29.39412, *cs* − *ms* = 11.39412 = *cm* et 2*cm* = diam. *cd* = 22.78824. Si EF n'était pas donné on le déterminerait tout de même.

Diam. EF	18.99094^2 =	360.6558
4 Diam. *cd*	22.78824^2 =	2077.2155
Diam. CD	24.00000^2 =	576.0000
	Somme =	3013.8713
	×	.7854
	Produit =	2367.0935
	×	40
	÷6)	94683.74
	Quotient =	15780.62
		= 2 vol. ECDF

Diam. EF	18.99094^2 =	360.6558
4 Diam. *ef*	12.00000^2 =	576.0000
	Somme =	936.6558
	×	.7854
	Produit =	735.649465
	×	40
	÷6)	29425.9786
	Quotient =	4904.32976
		= 2 vol. EFA

vol. 2 FC =	15780.62
vol. 2 EFA =	4904.33
vol. AB =	20684.95

La somme 20,684.95 de ces volumes est celui du fuseau proposé et ne diffère que de 57 unités en plus, ou du quart de 1 pour cent, du vol. exact 20628.34 dont le calcul par les règles ordinaires exige un travail bien plus considérable, et offre par suite de la diversité des opérations à faire (telles que détaillées dans un énoncé de 16 lignes de texte) beaucoup plus d'occasions de se tromper, comme c'est d'ailleurs toujours le cas, plus ou moins, quand le procédé à suivre n'est pas tellement simple et directe qu'on puisse sans effort se rendre compte, en poursuivant les détails du calcul, de la raison d'être de chacun d'eux. Voici l'énoncé dont il s'agit.

1°. *De trois fois le carré du diamètre au centre* (CD) *soustrayez quatre fois le carré du diamètre* (EF) *entre le milieu et l'extrémité ; aussi, de quatre fois ce dernier diamètre, retranchez trois fois le diamètre au centre ; et un quart du quotient provenant de la division de la première différence par la dernière, donnera la distance centrale* (OK).

2°. *Trouvez par la méthode du par.* (**1562**, **R. I.**) *l'axe de l'ellipse et par la méthode du par.* (**1473**) *la surface du segment générateur* (ACB).

3°. *Divisez trois fois la surface ainsi trouvée, par la longueur* (AB) *du fuseau, et soustrayez du quotient le diamètre au centre ; multipliez alors le reste par quatre fois la distance centrale, et retranchez en le produit du carré du diamètre au centre ; ce dernier reste multipliée par le tiers de la longueur du fuseau et le produit de nouveau par* 1.57079, *donnera le volume du fuseau.*

Le calcul à faire d'après cet énoncé est d'au moins deux à trois pages, et cela sans même y comprendre les détails des multiplications, divisions etc. ; tandis que tout ce qui est essentiel à l'énoncé de la règle ici donnée se résume en ces mots : *Multipliez la sixième partie de la hauteur de chacune des tranches composantes par la somme des surfaces de ses bases plus quatre fois la surface d'une section à demi-distance entre elles ; la somme des volumes ainsi obtenus sera le volume du fuseau à très près ;* et comme, dans la pratique, l'on obtient d'ordinaire les diamètres nécessaires *ef*, EF, *cd*, CD par un mesurage direct de ces diamètres ou de leurs circonférences respectives, tout le calcul à faire se réduit, sauf les multiplications, à celui que l'on vient d'indiquer au bas de la dernière page.

(1571) Ex. 3. Trouver le vol. d'un fuseau parabolique, (c'est-à-dire engendré par la révolution d'une parabole ACB ou ADB autour d'une double ordonnée AKB perpendiculaire à l'axe CK) dont la longueur AB est 60 et le plus grand diam. CD 34 ?

Rep. Dans le cas de la parabole et des distances égales A*n*, *n*L, L*m*,

*m*K, les diamètres intermédiaires *ef*, EF, *cd*, s'ils ne sont point donnés sont des plus aisés à déterminer puisque comme on l'a vu (**1564**) les abscisses ou segments C*p*, C*q*, C*r*, de l'axe sont comme les carrés des ordonnées correspondantes *ep*, E*q*, C*r* et que quand ces ordonnées sont des multiples ou sous-multiples égaux l'une de l'autre, les segments ou abscisses sont aussi de simples multiples ou sous-multiples de l'axe entier CK; or (**215**) à cause de $Eq = \frac{1}{2}$ AK on aura $Eq^2 = \frac{1}{4}$ AK^2 et par conséquent $Cq = \frac{1}{4}$ CK, on aura de même $Cr = \frac{1}{4}$ C*q* ou $\frac{1}{16}$ CK et $Cp = \frac{9}{16}$ CK puisque *ep*:AK :: 3:4 et que $3^2 : 4^2$ :: 9:16 ; l'on trouvera donc de cette manière $Cq = 17 \div 4 = 4.25$, C*r* $4.25 \div 4$ ou $17 \div 16 = 1.0625$, $Cp = \frac{9}{16} 17 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 8.5 + 1.0625 = 9.5625$, d'où l'on obtient diam. $ef = 2pK = 14.875$, $EF = 2Kq = 25.5$, $cd = 2Kr =$ 31.875 ; maintenant vol. AEF = (surf. EF + 4 surf. *ef*) $\times \frac{1}{6}$ AL = $(EF^2 + 4\,ef^2)$ $\times .7854 \times \frac{1}{6}$ AL = $(25.5^2 + 4$ fois $14.875^2) \times .7854 \times 2\frac{1}{2}$ ou de suite par 5 (puis qu'il y a deux conoïdes ou segments égaux dans le fuseau à estimer) = 6033.1 unités cubiques ; le volume du tronc FC = $(34^2 + 4$ fois $31.875^2 + 25.5^2)$ $\times .7854 \times 2\frac{1}{2}$ ou par 5 pour avoir 2FC = 23052.7 unités cubiques ; la somme 29085.8 de ces volumes est la solidité du fuseau proposé ; elle ne diffère de la solidité exacte 29053.4 que de 32 unités, c'est-à-dire de $\frac{32}{29053}$ ou .0011 soit $\frac{1}{9}$ de 1 pour cent en plus.

REM. Quelque compliquées que soient les règles ordinaires pour le volume des fuseaux circulaire et elliptique, la règle pour le fuseau parabolique est au contraire fort simple ; elle consiste seulement à multiplier le carré du diamètre central par la longueur du fuseau et le produit de nouveau par .418879 $(= 3.14159 \div 7\frac{1}{2})$; mais il y a toujours ceci à considérer que si le fuseau n'était pas proprement dit parabolique cette dernière règle pourrait être assez loin de fournir un volume exact, tandis que par la règle générale qu'on trouve ici pour tous les solides élémentaires, on n'a pas à s'occuper tout d'abord de la nature du solide à estimer, si ce n'est toutefois quand il y a lieu de déterminer par le calcul les diamètres intermédiaires dont on a besoin.

(1572) Ex. 4. Un **fuseau** ABCD qui a l'apparence d'être **hyperbolique** (c.-à-d. engendré par la révolution d'une hyperbole ACB ou ADB autour d'une corde ou double ordonnée AKB perpendiculaire à son axe CK ou KD) et dont le plus grand diamètre CD = 71 pouces, mesure 106 pouces en longueur AB, et ses diamètres intermédiaires pris en 3 endroits *m*, L, *n*, équidistants l'un de l'autre et chaque distance égale au quart de la demi-longueur AK du fuseau, sont respectivement $ef = 26.8$, $EF = 49$, $cd = 65.4$: quel en est le volume ?

Rep. $(CD^2 + 4\ cd^2 + EF^2) \times .7854 \times \frac{1}{6}$ LK et $(EF^2 + 4\ ef^2) \times .7854 \times \frac{1}{6}$ AL, ou ce qui est la même chose, puisque AL=LK, volume $= (CD^2 + 4\ cd^2 + 2EF^2 + 4\ ef^2) \times .7854 \times \frac{1}{6}$ LK ou AL ou par $\frac{1}{6}$ LK ou AL pour avoir de suite le volume du fuseau entier$=(71^2 + 4$ fois $65.4^2 + 2$ fois $49^2 + 4$ fois $26.8\ ) \times .7854 \times 53 \div 6 = 206.914$ pouces cubes ou 119.742 pieds cubes.

Pour trouver Op ou Cp et par suite $pK = CK - Cp = en = \frac{1}{2}$ diam. interm. ef, on a d'abord $AK^2 : ep^2 :: 2OC.CK + CK^2 : 2OC.Cp + Cp^2$, puis, comme on l'a dit (**1567, REM. II.**) $(2OC.CK + CK^2) - (2OC.Cp + Cp^2) = 2Kp.pO + Kp^2$; or, il est clair (**359**) que $2Kp.pO + Kp^2 + pO^2 = KO^2$; d'où, $pO^2 = KO^2 - (2Kp.pO + Kp^2)$ ou $pO^2 = KO^2 - (\overline{2OC.CK + CK^2} - \overline{2OC.Cp + Cp^2})$ et $Op = \sqrt{Op^2}$. On aura de même qo en trouvant d'abord $2OC.Cq + Cq^2 = \frac{(2OC.CK + CK^2) \times Eq^2}{AK^2}$ et en extrayant ensuite la racine carrée de la différence ou du reste $KO^2 - (\overline{2OC.CK + CK^2} - \overline{2OC.Cq + Cq^2})$ puis il viendra $Or = \sqrt{KO^2 - (\overline{2OC.CK + CK^2} - \overline{2OC.Cr + Cr^2})}$, et par suite les autres diamètres nécessaires EF, cd. On a déjà fait voir que pour trouver le centre O, et par conséquent OC ou OK et il n'y a qu'à mener et à bissecter deux cordes parallèles quelconques cB, Cb de la courbe génératrice pour relier ensuite ces points de bissection par une droite dont le prolongement intersectera l'axe (prolongé s'il le faut) de la courbe en un point O qui sera le centre voulu.

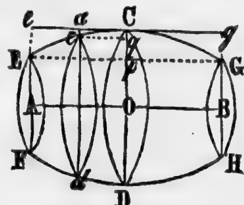
(1573) REM. Si l'on a dévoué à l'étude du fuseau un espace un peu considérable ce n'est pas que ce solide proprement dit s'offre très souvent à l'estimation du mesureur; mais c'est afin d'en venir à la considération du tronc de fuseau qui fait le sujet du problème suivant et qui se présente tous les jours sous les mille et une formes et dimensions variées de fûts et futailles, barils et barriques, tonnes, boucaults, poinçons, quarts etc, comme on en fait usage pour contenir et transporter le tabac, le sucre, la fleur, le lard, l'huile, la melasse, la bière, l'eau-de-vie, le vin, les liqueurs en général et mille autres substances capables de s'adapter à la forme de ces vaisseaux.

PROBLÈME LII.

Déterminer le volume du tronc central d'un fuseau quelconque, c'est-à-dire d'un tronc ou segment de fuseau dont les bases opposées et parallèles EF, GH sont également éloignées d'un plan CD parallèle aux bases et passant perpendiculairement par le centre o de l'axe du fuseau dont le tronc fait partie.

(1574) REGLE. *A la surface de l'une* EF *des deux bases égales, ajoutez celle d'une section parallèle* CD *prise au centre du tronc et* 4 *fois la surface d'une section parallèle intermédiaire cd également éloignée du centre o et de la base* A, *et multipliez le tout par* $\frac{1}{6}$ *de la hauteur, longueur ou épaisseur du tronc : le résultat sera le volume demandé.*

REM. Il est à peine nécessaire de dire que pour obtenir par le calcul le diamètre intermédiaire *cd*, on a C*p* égal à la demi-différence entre les diamètres CD, EF et qu'on trouve ensuite C*q* et par suite *cd* = CD − 2C*q*, de la même manière que dans les divers cas du dernier problème. Si c'est une futaille dont on a à estimer la capacité on en obtiendra le diamètre intérieur CD en introduisant par la bonde une échelle de pouces ou d'autres parties égales. On aura le diam intermédiaire *cd* en mesurant la distance *ac* entre la futaille et une tringle ou règle rectiligne *eg* tangente en C, pour faire ensuite *cd* = CD − 2*ac*. De la longueur entière mesurée en dehors, on distraira ensuite la somme des épaisseurs des deux fonds, pour la longueur intérieure ou hauteur à entrer dans le calcul. Pour avoir *eg* tangente en C, il est clair qu'on n'aura qu'à voir à ce que *e*E = *g*G ou A*e* = B*g* ; enfin, *eg* longueur extérieure de la futaille serait la distance interceptée sur la droite *eg* par deux autres droites H*g*, F*e* appuyant sur les fonds parallèles de manière à rencontrer *eg*. L'on arriverait encore **(1444)** aux surfaces voulues des sections respectives CD, *cd*, EF en mesurant à l'extérieur de la futaille les circonférences de ces sections dont il y aurait à distraire la double épaisseur des douves multipliée par 3.1416 ou par $3\frac{1}{7}$.



Ex. 1. Quel est le volume du tronc central d'un fuseau circulaire dont la longueur est 40 pouces, le plus grand diam. 36, le plus petit 16, et le diam. intermédiaire 31.826 pouces ?

Rep. (surf. CD + 4 surf. *cd* + surf. EF) × $\frac{1}{6}$ 40 = (36 + 4 fois $31.826^2 + 16^2$)

× .7854 × 40 ÷ 6 = 29,340 pouces cubes qui n'excède que de .0028 ou d'un peu plus que le quart de 1 pour cent le volume exact 29,257.3 pouces cubes.

2. La longueur d'un tronc de fuseau circulaire est 3 pieds 4 pouces, le diamètre au centre 2 pieds 8 pouces, le diam. extrême 2 pieds et le diam. intermédiaire 30.0588; quel en est le volume ?

Rep. 27,301 pouces cubes contre 27,287½ pouces cubes le volume exact, ou un excédant de .0005 ou de $\frac{1}{20}$ de 1 pour cent.

3. On demande la capacité d'un vaisseau en forme de tronc de fuseau circulaire, la longueur 50 pouces, les moindre et plus grand diamètres 25 et 35 pouces et le diam. interm. 32.574 ?

Rep. 39,887 pouces cubes ÷ 1728 = 23.083 pieds cubes, contre 39,782 pouces cubes ou 23.022 pieds cubes, soit un excédant de .0026 ou du quart près de 1 pour cent.

4. La zone centrale d'un fuseau circulaire mesure 3 pieds en longueur, les diamètres extrêmes sont 2 pieds et 16 pouces et le diam. interm. calculé est 22.0722 : quelle en est la solidité ?

Rep. 13,104 pouces cubes ou 7.58327 pieds cubes, le volume exact d'après les règles ordinaires étant 13,090. 4 pouces cubes ou 7.57546 pieds cubes, soit une erreur en plus de .00103 ou $\frac{1}{10}$ de 1 pour cent.

5. Quelle est la capacité d'un boucault dont la longueur est de 5 pieds, les diamètres extrêmes 50 et 30 pouces et le diam. interm. 45.394 ?

Rep. 91,439.89 pouces cubes, contre 91,302.75 le vol. exact, la différence en plus étant de .0015 ou de $\frac{1}{7}$ de 1 pour cent.

6. Une barrique qui paraît former partie d'un fuseau elliptique a 28 pouces en longueur, son plus grand diam. est de 24 pouces, le diam. à la tête 21.6 et le diam. interm. 23.40909 pouces : quelle en est la capacité en gallons à vin de 231 pouces cubes au gallon ?

Rep. $(24^2 + 21.6^2 + 4 \text{ fois } 23.40909^2) \times .7854 \times 28 \div 6 = 11{,}855.2$ pouces cubes, contre 11,854.75 le vol. exact, l'excédant n'étant dans ce cas que de .000005 ce qui montre que la barrique proposée est à très près un tronc de sphéroïde, la règle donnant alors comme on l'a vu (**1562**) le volume exact. La capacité demandée en gallons est 51.316.

7. Combien de gallons contiendra une tonne de courbure elliptique dont le grand diam. est 32 pouces, le petit diam. 24 pouces, le diam à 10 pouces de la tête 30.15756 pouces et la longueur 40 pouces ?

Rep. 27,425.7 pouces cubes ou (÷ 231) 118.726, soit 118¾ gallons près ; la capacité exacte est 27,419.6 pouces cubes, la différence en plus n'étant que de 6 pouces cubes ou d'un 40ème de gallon.

8. La zone centrale d'un fuseau parabolique est de 36 pouces en longueur,

son diamètre au centre est aussi de 36 pouces, celui de la tête 20 pouce est le diam. interm. 32 pouces ; quel en est le contenu solide en pieds cubes ?

Rep. 27,294 pouces cubes, contre 27,233.9 vol. exact, ou un excédant de .0022, soit une erreur en plus de $\frac{1}{5}$ de 1 pour cent. En pieds cubes le volume est 15.795 contre 15.76.

9. Déterminer la capacité d'une tonne dont la longueur est de 40 pouces, les grand et petit diamètres 32 et 24 pouces et le diam. interm. 30 pouces ?

Rep. $(32^2 + 24^2 + 4$ fois $30^2) \times .7854 \times 40 \div 6 = 27,227.2$ pouces cubes ou 117.87 gallons près ; le volume exact est 27,210.5 pouces cubes, soit une erreur de .00062 ou $\frac{1}{16}$ de 1 pour cent, équivalent à $\frac{1}{14}$ de gallon ou un peu plus que 1 septier.

10. Combien y a-t-il de pieds cubes dans un boucault dont le diam. au centre est 5 pieds, à la tête 3 pieds, son diam. intermédiaire 4.5 pieds et sa longueur 7 pieds ?

Rep. 105.3745, contre 105.19124 le vol. exact, ou un excédant de $\frac{1}{6}$ de 1 pour cent.

11. Combien pourra-t-on faire entrer de gallons de sel dans un baril vide de fleur dont la hauteur est 25 pouces, le diam. inf. ou sup. 17 pouces, le plus grand diam. 20 pouces et le diam. interm. entre le fond et le centre 19.3 pouces ?

Rep. $(17^2 + 20^2 + 4$ fois $19.3^2)$ ou $2179 \times .7854 \times 25 \div 6 = 7130$ pouces cubes, divisant par 231 on a 30 gallons 1 pot et 3 chopines près ou $(\div 2339)$ 3 $\frac{1}{20}$ minots près.

12. On a trois variétés de futailles dans lesquelles les diamètres extrêmes sont 24 et 32 pouces, dans l'une le diam. interm. est 30.2 pouces, dans une autre ce diam. mesure 30 pouces et dans la troisième 29.2 pouces, la longueur est 42 pouces, quel est le contenu de chaque futaille en gallons impériaux de 277.274 pouces cubes au gallon ?

Rep. $(24^2 + 32^2 + 4$ fois $30.2^2) \times .7854 \times 42 \div 6 \div 277.274 = 104.06$ contre 104, dif. $= \frac{1}{20}$ gallon.

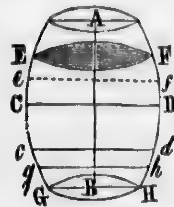
$(24^2 + 32^2 + 4$ fois $30^2) \times .7854 \times 42 \div 6 \div 277.274 = 103.106$ contre 103, dif. $= \frac{1}{10}$ gallon.

$(24^2 + 32^2 + 4$ fois $29.2^2) \times .7854 \times 42 \div 6 \div 277.274 = 99.35$ contre 99.3, dif. $= \frac{1}{20}$ gallon.

PROBLÈME LIII.

Trouver le volume près, d'un tronc de fuseau quelconque EFHG ou cdGH, à bases parallèles perpendiculaires à l'axe du fuseau.

(1575) **RÈGLE** *Faites séparément les volumes de chacune des tranches* EFDC, GHDC *situées de côtés opposés du centre ou plus grand diam.* CD *du tronc donné, en ajoutant à la somme des bases* CD, EF CD, GH *de chacune d'elles quatre fois la surf. d'une section intermédiaire ef, cd, et multipliez ces sommes par un sixième de la hauteur des tranches respectives ; la somme de ces volumes sera le volume demandé.*



REM. Il est clair que si le tronc est latéral comme *cd*HG ou qu'il ne s'étende pas au-delà du centre CD, on n'aura qu'une seule opération à faire pour en déterminer le volume = (surf. *cd* + surf. GH + 4 surf. *gh*) $\times \frac{1}{6}$ *o*B.

Ex. 1. L'une des parties composantes d'un cul-de-lampe présente la forme d'un tronc latéral de fuseau. Ses trois diamètres sont 24, 30 et 32 pouces et sa hauteur 21 pouces : quel en est le volume.

Rep. $(24^2 + 32 + 4 \text{ fois } 30^2) \times .7854 \times 21 \div 6 = 14,294$ pouces cubes ou 8.272 pouces cubes.

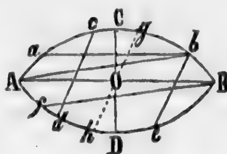
2. Une tonne placée debout et dont la hauteur est de 42 pouces et le diam. sup. 24 pouces, contient du vin jusqu'aux trois quarts de sa hauteur ; la capacité entière de la tonne est de 104 gallons impériaux (277.274 pouces cubes au gallon) combien reste-t-il de gallons dans la tonne ?

Rep. Ici, puisque le volume entier du tronc de fuseau à estimer est connue, alors, au lieu de faire séparément les volumes des 2 tranches composantes du tronc pour en prendre la somme, on n'aura qu'à cuber la partie vide de la tonne pour en soustraire ensuite le volume de celui de la tonne entière. Le diam. de la tonne à la hauteur ou se trouve le vin est de 30.2 pouces et le diam. intermédiaire entre ce dernier et la tête est de 27.6. Donc le vol. du tronc à déduire est $(24^2 + 4 \text{ fois } 27.6^2 + 40^2) \times .7854 \times \frac{1}{4} 42 \div 6 = 6233$ pouces cubes $\div 277.274 = 22\frac{1}{2}$ gallons près, il reste donc dans la tonne $104 - 22\frac{1}{2} = 81\frac{1}{2}$ gallons.

PROBLÈME LIV.

Déterminer le volume près, d'un tronc de fuseau quelconque (Adc, aCb, Aob) à une seule base parallèle ou non à l'axe (AB) du fuseau ou à son diamètre (CD) ou le volume d'un tronc (ABba, dcbe, AbBf) à bases parallèles inclinées ou non aux axes du solides.

(1576) **REGLE.** *A la somme des surfaces des bases parallèles ou opposées (s'il n'y a qu'une base, on considère l'autre=o) du tronc, ajoutez 4 fois la surface d'une section également éloignée de ces bases et multipliez le tout par un sixième de la hauteur du tronc ou segment.*

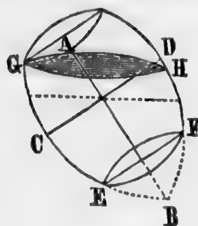


REM. Si le tronc donné contient le centre O du fuseau dont il fait partie, menez par le centre une section gOh parallèle aux bases et calculez séparément chacune des parties composantes du tronc pour en faire ensuite la somme; mais si les bases parallèles Ab, fB sont à distances égales du centre O, alors il est clair qu'on n'aura qu'une seule opération à faire, pour doubler ensuite le résultat.

PROBLÈME LV.

Déterminer le volume près, d'un tronc de fuseau quelconque EFHG à bases non parallèles.

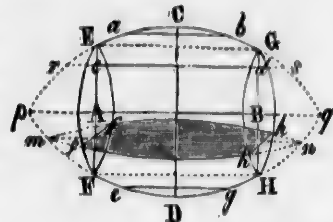
(1577) **REGLE.** *Faites par le dernier problème les volumes respectifs des deux segments de fuseau à une seule base* GHB, EFB *dont le tronc donné fait partie; la différence de ces volumes sera le volume demandé.*



REM. Une tonne ou futaille inclinée contenant de la liqueur et qu'on ne voudrait pas déranger pour en faciliter le jaugeage présentera quelquefois à l'estimation du mesureur un volume de cette sorte.

PROBLÈM LVI.

Évaluer le contenu d'une tonne ou futaille couchée et qui n'est qu'en partie pleine.



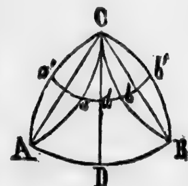
(1578) REGLE. *Si la liqueur dans la tonne n'atteint pas les têtes ou fonds* EF, GH *du vaisseau, comme en eg ou* FH, *on en estimera le contenu par la méthode de l'avant dernier problème, et de même si la liqueur dépasse ces fonds, comme en* EG *ou ab, on estimera de la même manière le segment* ECG *ou aCb pour diminuer d'autant le contenu de la tonne entière. Si la surface de la liqueur est en* AB, *axe de la tonne, il est clair qu'on aura le contenu* AFDHB=CEFD=½ FG. *Si au contraire la surface est en cd ou en fh, l'on estimera d'abord par la méthode de l'avant dernier problème, le tronc de fuseau rsq*D*pr ou mn*D (*suivant le cas*) *dont le segment correspondant de la tonne fait partie, pour en soustraire ensuite les onglets ou sortes de pyramides hnh*H, *fmf*F *ou les solides crp*F, *dsq*H *composés des demi-conoïdes* A*Fp*, B*Hq et des troncs rc*A*p, sd*B*q dont ou aura assez correctement les volumes par la règle générale de la somme des bases parallèles p*A, *rc + quatre fois la section interm. multipliée par un sixième de la hauteur.*

PROBLÈME LVII.

Déterminer le volume près, d'un conoïde convexe ou concave Aa'Cb'B, AaCbB terminé par une base convexe ou sphérique ADB.

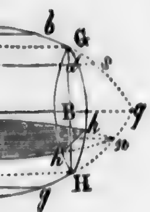
(1579) REGLE I. *A la surface de la base convexe* (ADB) *ajoutez 4 fois celle d'une section convexe parallèle a'db', adb également éloignée de la base et du sommet et multipliez la somme par un sixième de la hauteur* CD *du solide.*

Il suffit de ce que l'on a déjà dit (**1077, 1531**) à l'endroit du secteur sphérique et du conoïde ordinaire, pour faire comprendre de suite que l'on doive arriver par cette règle à une détermination assez correcte du volume du solide proposé.



REM. Si la hauteur CD était inégale à AC ou BC, c'est-à-dire plus grande ou moindre que AC ou BC, il y aurait évidemment à augmenter le vol. du conoïde proposé, ou à le

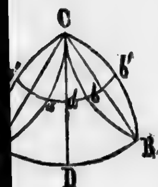
oouchée et



nu de la tonne
la tonne, il est
au contraire la
thode de l'avant
rant le cas) dont
r en soustraire
ou les solides
les troncs rcAp,
règle générale
section interm.

onvexe ou
ne base

e (ADB) ajoutez
alement éloignée
un sixième de la



proposé, ou à le

diminuer de la différence des volumes des calottes respectives ADB ayant pour rayons CD=AC ou BC et CD > ou < AC ou BC, suivant le cas.

De même, si la base du conoïde était concave, on ferait le vol. du conoïde correspondant à base plane, pour en soustraire ensuite le vol. de la calotte évidée.

REGLE II. *Faites d'abord* (**1550**) *le volume du secteur sphérique composant* ADB–C, *puis* (**1532**) *le volume du tronc de prisme continu dont le segment générateur* AoCa'A *ou* BoCb'B *est la coupe ; la somme de ces volumes sera la solidité requise.*

PROBLÈME LVIII.

Déterminer le volume d'une voûte quelconque dont l'épaisseur n'est pas uniforme.

(**1580**) **REGLE.** *Faites séparément* (*page* 431) *par les problèmes précédents, les volumes des solides* (*c'est-à-dire des prismes ou cylindres, demi-sphères, demi-sphéroïdes, ou conoïdes, ou des calottes ou segments de ces solides*) *extérieur et intérieur composants, pour en prendre ensuite la différence, qui sera le contenu solide de la voûte proposée.*

PROBLÈME LIX.

Déterminer le volume d'un prismoïde ou d'un cylindroïde quelconque.

(**1581**) **REGLE.** *A la somme des surfaces des deux bases parallèles, ajoutez quatre fois la surface d'une section ou coupe également éloignée de ces bases, et multipliez le tout par un sixième de la hauteur du corps ; le résultat sera le volume demandé.*

REM. I. On dit (**1102**) que " le prismoïde est un solide ayant pour bases parallèles, des figures planes quelconques à côtés parallèles." Cette définition n'exclut pas l'égalité des côtés parallèles ; donc, *tout prisme ou cylindre* (*prisme infinitaire*) *est en même temps un prismoïde.*

La définition n'exclut pas la proportionnalité des côtés parallèles ; donc, *tout tronc de pyramide ou de cône* (*tronc de pyramide infinitaire,*) *à bases parallèles, est un prismoïde.*

La définition n'assigne pas non plus des limites à l'inégalité des côtés parallèles ; donc, chacun des côtés de l'une des bases parallèles peut diminuer indéfinitivement et jusqu'à devenir enfin = 0 ; cette base se réduira donc aussi à zéro ou à un seul point, comme dans le cas de la pyramide ; donc, *la pyramide ou le cône* (*pyramide infinitaire*) *est aussi un prismoïde.*

Si la somme de tous les côtés, moins un, de l'une des bases, devient égale au côté ainsi excepté, cette base ne sera plus qu'une ligne ou arête parallèle au plan de l'autre base, comme dans le cas du coin; donc, *tout coin ou autre solide ayant pour l'une de ses bases une figure plane quelconque et par l'autre base une ligne parallèle à la première, est encore un prismoïde.*

(1582) Il semblerait que dans cette manière de réduire à une simple ligne une figure plane quelconque, l'on ait négligé le parallélisme nécessaire des côtés opposés; mais il n'en est pas ainsi, car si la base à réduire est un rectangle par exemple, les deux côtés perpendiculaires au côté excepté deviennent chacun $=0$; la somme des côtés moins un, est le côté du rectangle parallèle au côté excepté, et qui, lorsque les côtés perpendiculaires deviennent nuls, finit par s'approcher du côté excepté de manière à ne former avec ce dernier qu'une seule et même ligne ou arête. Si la base à réduire est un polygone quelconque, il y aura, ou non, dans le périmètre de cette base, un côté parallèle au côté excepté; si il y a un côté qui lui soit parallèle, ce côté pourra diminuer ou augmenter de manière à devenir de longueur égale à celle du côté excepté, et tous les autres côtés devenant chacun$=0$, les deux côtés parallèles se réuniront pour n'en faire qu'un seul; s'il n'y a pas dans la base sur laquelle on opère un côté parallèle au côté excepté, l'on interposera entre deux des côtés de cette base, un côté qui soit la parallèle voulue, car de même qu'un côté du prismoïde peut, sans affecter la définition, devenir égal à 0, de même un côté d'abord égal à zéro peut prendre du développement, et cela dans une proportion quelconque comme dans une direction quelconque.

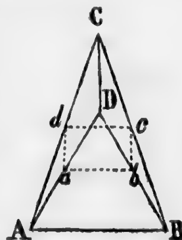
(1583) Il est clair que si l'une des deux bases peut de figure quelconque devenir ligne, il en est de même de l'autre base qui peut aussi de figure quelconque devenir ligne. Si les deux lignes qui forment maintenant les bases opposées sont parallèles l'une à l'autre, il est clair que le solide aura cessé d'exister ou sera devenu égal à zéro ou à une simple surface; mais si les lignes ou arêtes qui servent de bases opposées au corps dont il s'agit ne sont pas parallèles entre elles, quoique cependant dans des plans parallèles l'un à l'autre, le solide n'aura pas cessé d'existe[r], donc, *un prismoïde peut être tel que ses bases opposées soient toutes deux de simples lignes ou arêtes.*

(1584) Disons pour résumer qu'*un prismoïde peut avoir pour bases parallèles : deux figures quelconques égales ou semblables, deux figures quelconques inégales ou non semblables, une figure quelconque et une ligne parallèle au plan de cette figure, une figure quelconque et un point, deux lignes quelconques non parallèles, mais situées dans des plans parallèles l'un à l'autre ;* savoir, par exemple : deux carrés égaux ou inégaux; un carré et un rectangle quelconque; deux rectangles ou parallélogrammes quelconques; deux polygones quelconques égaux ou semblables, inégaux ou dissemblables, dont les côtés de l'un correspondent soit à des côtés parallèles ou à des points angulaires de l'autre; un carré, rectangle

ou autre polygone et un cercle ou ellipse (polygone infinitaire) ; un cercle et une ellipse quelconque ou deux ellipses quelconques (ce dernier prismoïde à bases parallèles curvilignes se distingue quelquefois sous le nom de *cylindroïde*) ; un carré, rectangle, parallélogramme, polygone, cercle, ellipse et une ligne ; un carré, rectangle, parallélogramme, polygone, cercle, ellipse et un point ; deux lignes de longueurs quelconques non parallèles. (*)

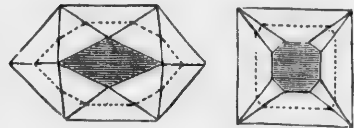
(**1585**) **REM II**. Il y a à considérer maintenant l'espèce ou la nature de la figure servant de section ou de coupe intermédiaire entre les bases opposées du prismoïde à estimer. Ainsi, il est clair que si les bases opposées sont des rectangles à côtés parallèles, la section parallèle intermédiaire sera aussi un rectangle ou un carré ; si les deux bases sont des parallélogrammes à côtés parallèles, la section sera aussi un parallélogramme ; si les bases sont un carré, rectangle, parallélogramme et une ligne parallèle à l'un des côtés de tel rectangle, etc., la section sera encore, dans le 1er cas un rectangle, dans le second cas un rectangle ou un carré, dans le troisième cas un parallélogramme ; si les bases sont une figure quelconque et un point, la section sera une figure semblable à la base et égale (**1525**) en surface au quart de la base ; si les deux bases sont des lignes perpendiculaires (**907**) l'une à la direction de l'autre, la section sera un carré ou un rectangle ; si les bases sont des lignes non perpendiculaires l'une à la direction de l'autre, la section sera un losange ou parallélogramme.

(**1586**) Rien de plus facile dans tous ces cas que de déterminer la surface de la section intermédiaire dont les multiplicateurs ou facteurs sont chacun moyen arithmétique entre les côtés parallèles des bases opposées ou entre les côtés ou arêtes et points ou sommets opposés suivant le cas. Par exemple, dans le prismoïde AB–CD où chacune des bases est une simple ligne ou arête AB, CD et dont la surface

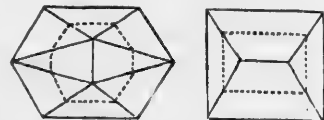


(*) Toutes ces formes se rencontrent dans la pratique, et celà surtout à l'endroit des toitures diversifiées d'édifices de toutes sortes. Une tour ou tourelle carrée par exemple, sera assez souvent terminée par un toit couronné d'une plate-forme octogone ou circulaire, ou ce sera la tour qui aura pour plan par terre un cercle, et pour plate-forme du toit un carré ou autre polygone, ou encore ce sera deux carrés dont les côtés de l'un sont parallèles aux diagonales de l'autre : voilà pour le prismoïde dont les bases parallèles sont des figures quelconques. Si un édifice dont la coupe horizontale est un carré, rectangle ou polygone, est recouvert d'un toit terminé par un faîte plus ou moins long, on aura le prismoïde dont l'une des bases est une figure quelconque et l'autre base une ligne. Il n'est pas rare non plus de trouver parmi les parties composantes d'un toit ou autre objet à évaluer des prismoïdes de l'espèce de celui du par. (**1586**) c.-à d. dont les bases AB, CD soient toutes deux de simples lignes, sans que la surface de la coupe ou section intermédiaire *abcd* en ait moins pour cela une valeur très réelle et facile à déterminer. Dans ce dernier cas le facteur "4 surf. *abcd*" = AB × CD, (**1586**), d'où, le vol. = AB × CD × hauteur ÷ 6.

est en conséquence nulle, on a pour section intermédiaire le carré, rectangle ou parallélogramme *abcd* dans lequel $Ab = \frac{1}{2}$ AB + D ou $= \frac{1}{2}$ AB, puisque D = 0, de même $dc = \frac{1}{2}$ AB $= ab$, et $ad = \frac{1}{2}$ CD $= bc$; d'où, surface section $abcd = ab \times ad$ ou $\frac{1}{2}$ AB $\times \frac{1}{2}$ CD si c'est un rectangle, ou (**1421**) $= ab \times ad$ $\times$ sin. nat. angle *bab* si c'est un parallélogramme.



(1587) Si l'une des bases est un polygone quelconque et que l'autre base soit aussi un polygone quelconque, et si toutes les faces latérales du prismoïde sont des triangles, c'est-à-dire si chacun des côtés dans l'une des bases correspond à un point dans l'autre base, le nombre de côtés dans la coupe intermédiaire sera égal à la somme des nombres de côtés dans les deux bases.

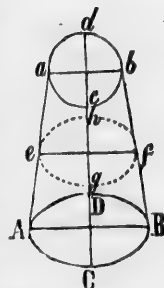


(1588) Si l'une des bases est une figure rectiligne quelconque, et que l'autre base soit une ligne non parallèle aux côtés de cette première, le nombre de côtés dans la coupe interm. sera égal au nombre des côtés de la base plus 2; et si la ligne ou l'un des côtés, ou plus d'un, de la figure qui forme l'une des bases, est parallèle à l'un ou à plus d'un des côtés de l'autre base, le nombre de côtés de la section interm. pourra varier indéfiniment suivant le cas, mais sera néanmoins toujours aisé à déterminer à l'aide d'une simple esquisse de la fig.

Le résumé qu'on vient de faire peut encore se simplifier, s'abréger ou se traduire comme suit, savoir: ***Le prismoïde ou cylindroïde** (**prismoïde infinitaire**) **est un solide à bases parallèles dont les plans** (**faces latérales**) **passant par les côtés ou arêtes de l'une des bases, sont terminés par des points ou par des côtés ou arêtes parallèles dans l'autre base.***

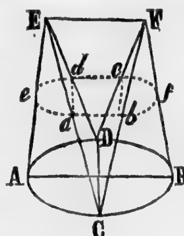
En d'autres termes: ***Le prismoïde ou cylindroïde est tel que toutes ses faces latérales sont des, ou que sa surface latérale peut se décomposer en triangles ou trapèzes rectilignes, c.-à-d. à surfaces planes, ou en parties capables de se développer en surfaces planes.***

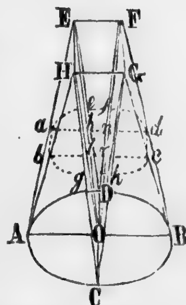
Ajoutons que tout prismoïde peut se décomposer, si l'une de ses bases est (fig. du par. **1590**) une figure quelconque et l'autre base une ligne, en deux pyramides et un prismoïde élémentaire ayant pour bases des lignes, (fig. du par. **1586**); si ses deux bases sont des figures quelconques, en quatre pyramides ayant leurs bases deux à deux dans les bases opposées du solide, et un prismoïde ayant pour bases des lignes; ou, à volonté, en pyramides, coins, etc., et prismoïdes à bases linéaires, suivant la manière d'opérer la division du solide par des plans dont on peut varier le nombre et la position.



(1589) Si l'une des bases est par exemple un cercle ou ellipse et l'autre base une ellipse, la base interm. sera aussi une ellipse dont on aura le diam. $ef = \frac{1}{2}(AB + ab)$ et le diam. $gh = \frac{1}{2}(CD + cd)$.

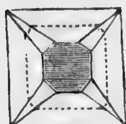
(1590) Si l'une des bases est un cercle ou ellipse AB et l'autre base une ligne EF, la base interm. *abfcde* sera une figure mixtiligne dont les parties *ab* et *cd* seront des droites parallèles à EF, et les parties *aed*, *bfc* des figures semblables **(1033)** à CAD, CBD. Pour calculer la surface de la section interm., on a **(1033, 520)** *ab* et *dc* chacun $= \frac{1}{2}$ EF, *ad* et *bc* chacun $= \frac{1}{2}$ CD, et comme les parties composantes ACD–E, BCD–F du prismoïde sont évidemment des pyramides à bases mixtilignes, on aura **(1525)** la surface $aed = \frac{1}{4}$ surf. ADC, surf. $bfc = \frac{1}{4}$ surf. BCD ; c'est-à-dire qu'on aura surf. section $ef = ab$ ou dc ou $\frac{1}{2}$ EF $\times ad$ ou bc ou $\frac{1}{2}$ CD $+ \frac{1}{4}$ surf. AB, et si EF n'est pas parallèle à AB ou perpendiculaire à la direction de DC on multipliera de plus **(1421)** le produit *ab. bc* par le sin. nat. de l'angle *bad*, ou l'on substituera au facteur *ad* ou *bc* la largeur perpendiculaire du parallélogramme *ab cd*.

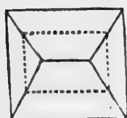




(1591) Si l'une des bases est un cercle ou ellipse AB et l'autre un carré ou rectangle EG, le prismoïde donné se décomposera en : 1°, un prismoïde EFGH–CD (ayant pour bases **(1585)** un carré ou rectangle et une ligne, et pour section interm. un rectangle *efgh* où $ef = gh = \frac{1}{2}$ EF ou GH, et $eg = fh = \frac{1}{2}$ EH $+ \frac{1}{2}$ CD) ; 2°, deux prismoïdes AO–EH et BO–FG (ayant chacun pour bases des lignes AO, EH et BO, FG et **(1585)** pour base interm. un rectangle *ablk* où $ab = kl = \frac{1}{2}$ EH et *ak* ou $bl = \frac{1}{2}$ AO, et *nrcd* où *nr* ou $cd = \frac{1}{2}$ FG et *nd* ou $rc = \frac{1}{2}$ OB) ; 3°, quatre pyramides AOC–H, AOD–E, BOC–G et BOD–F (ayant chacune pour coupe interm. une figure *blg*, *aek*, *rch* et *ndf* respectivement égale en surface au quart de la base correspondante AOC, AOD, BOC et BOD, ou leur somme égale en surface au quart de la base AB.

(1592) Il est clair d'après les quelques prismoïdes ou cylindroïdes dont on vient de traiter que ces corps peuvent varier indéfiniment leurs formes, mais il suffira des considérations précédentes pour indiquer la manière de procéder dans chaque cas à la détermination de la surface intermédiaire à entrer comme élément dans le calcul du volume à établir ; ou si c'est nécessaire, pour déterminer tout d'abord si le solide proposé est, ou non, un prismoïde ou cylindroïde tel qu'on en puisse estimer le volume par la règle générale ici donnée.





Ex. 1. Une tenture ou ciel-de-lit dont la base sup. est un cercle ou une ellipse de la surface d'un mètre, et la base inf. un rectangle de la surface de 3 mètres, a pour section intermédiaire une figure mixtiligne dont la surface est de deux mètres, la hauteur ou distance perpendiculaire entre les bases parallèles est de $2\frac{1}{2}$ mètres ; on demande le volume de l'espace ou de l'air compris entre les rideaux ?

Rep. $(1+3+4$ fois $2)\times 2.5\div 6=5$ mètres cubes.

2. Une tente à camper dont le sommet ou la base sup. est un faîte, c'est-à-dire une simple ligne ou arête ayant 2 verges en longueur, et dont la base inf. est composée d'un rectangle de 2×3 verges et de deux demi-cercles de 3 verges de diam., a 2 verges de hauteur ; quel en est le volume ?

Rep. Dans cet exemple il est clair que le prismoïde à cuber est composé d'un coin à arêtes égales (c'est-à-dire (**1100**) d'un prisme triangulaire) et de deux demi-cônes. La surface de la base de la tente est composée de celle du rectangle $=3\times 2=6$ verges carrées, et de celle de deux demi-cercles, c.-à-d. d'un cercle de 3 verges de diam., $=3\times 3\times .7854 = 7.0686$ verges carrées, en tout 13.0686 verges carrées ; la surface de la coupe intermédiaire est égale à la moitié du rectangle à la base plus le quart (**1590**) des deux demi-cercles, et vaut en conséquence $3+1.76715=4.76715$. La surface de la base sup. étant nulle dans le cas actuel, le vol.$=$(surf. base $+\,4$ surf. interm.) $\times$ hauteur$\div 6$, $=(13.0686+4$ fois $4.76715)\times\frac{1}{6}$ hauteur$=32.1372\times 2\div 6=10.7124$ verges cubes.

REM. Si la surface ext. du ciel-de-lit ou de la tente des deux derniers exemples, au lieu d'être tendue, c.-à-d. plane ou capable de se développer (**1140**) en surface plane, était concave ou non tendue, on n'en aurait pas moins le vol. voulu, au moins à très près (**1533-4**) par la même règle (**1581**).

Ex. 3. Un observatoire dont le plan par terre est un octogone de 100 mètres en surface, est couronné d'un toit ayant pour sommet une plate-forme circulaire dont la surface est de 25 mètres, la surface de la section intermédiaire est de 56 mètres ; quel est le volume de l'espace qu'occupe le toit dont la hauteur est de 6 mètres ?

Rep. $100+25+4$ fois $56=349$ mètres cubes.

PROBLÈME LX.

Déterminer le volume exact d'un corps irrégulier quelconque de petites dimensions ou d'un corps composé de plusieurs parties élémentaires de dimensions et formes différentes.

(**1593**) **REGLE. Si c'est la capacite d'un vase ou vaisseau quelconque que l'on veut estimer,** *l'idée nous vient assez généralement d'arriver au résultat désiré en déterminant le nombre de*

fois que tel vaisseau peut donner place au contenu de tel autre vaisseau de forme élémentaire dont on connaît le volume.

(**1594**) Mais **si c'est le volume de la substance meme du vaisseau etc., que l'on desire evaluer**, la manière de s'y prendre ne se suggère pas tout d'abord à l'esprit de quiconque veut opérer cette évaluation.

REGLE Si le volume a estimer est celui d'une substance non absorbante, *on le plongera dans un vaisseau rempli d'eau ou de tout autre liquide dont on mesurera le déplacement au moyen d'un autre vaisseau de capacité connue ; ou si le premier vaisseau est assez grand et que la forme en soit rectangulaire ou cylindrique et de facile jaugeage, l'on y mettra d'abord assez de liquide pour couvrir l'objet à mesurer ; ayant alors remarqué la hauteur du niveau de l'eau dans le vase, on y plongera l'objet dont il s'agit et l'on remarquera de nouveau le niveau du liquide ; si l'on suppose maintenant que chaque fraction de mètre, pouce, ligne ou autre unité de la hauteur du vase contenant corresponde à un mètre, pied, pouce ou ligne, etc., cubique, on n'aura qu'à compter le nombre de telles unités dans la hauteur du niveau déplacé de l'eau pour avoir de suite le volume de l'objet proposé.*

Si le corps est absorbant, *l'on se servira par exemple de sable ou de tout autre substance fluide de cette sorte, dont on pourra niveler la surface au moyen d'une tige ou tringle à arète rectiligne.*

L'on arriverait de cette manière au volume des corps les plus diversifiés du règne aminal, végétal ou minéral et des mille et un objets bruts ou manufacturés qu'on a tous les jours sous les yeux et dont il serait souvent impossible d'estimer les volumes par les règles ordinaires de la géométrie.

Il est bon de rappeler aussi que l'on peut arriver par une simple proportion au volume d'un corps en en comparant le poids avec celui d'un autre corps de même substance et de volume déterminé, c'est-à-dire par le système des poids spécifiques qui enseigne en même temps à revenir du volume d'un corps à son poids : ce qui fera le sujet du problème suivant.

Ex. 1. Le poids d'un bloc irrégulier de pierre est de 13 livres 7 onces ; on demande à déterminer à l'aide du morceau donné le poids près d'un pied cube de cette pierre ?

Rep. Il y a tout d'abord à cuber le bloc de pierre ; à cet effet soit un vase rectangulaire de 10 pouces carrés ou de 100 pouces en superficie horizontale, et dont la hauteur est divisée en pouces et centièmes de pouces ; ayant mis assez d'eau dans le vase pour couvrir la pierre à cuber, je note la hauteur de l'eau que je trouve de 8.53 pouces, je plonge ensuite la pierre dans le vaisseau et je note de nouveau la hauteur de l'eau qui est maintenant de 9.89 pouces ; la différence de ces hauteurs est de 1.36 pouces. Puisque le vase est de 10×10 pouces, il est clair que chaque pouce de sa

hauteur correspond à 100 pouces cubes et par conséquent, chaque centième de pouce de telle hauteur, à un pouce cube; donc la hauteur observée 1.36 pouces du niveau déplacé de l'eau correspond à 136 pouces cubes; donc le volume de la pierre est de 136, et on aura maintenant le poids du pied cube en faisant 136 : 215 onces (poids de la pierre) :: 1728 pouces cubes (c.-à-d. un pied cube) : 2732 onces, ou, divisant par 16, $170\frac{3}{4}$ livres, le poids demandé.

2. Dans un vase cylindrique tel que chaque pouce de sa hauteur correspond à 1 pouce cube d'espace ou de volume, on a plongé un lingot d'argent qui a déplacé de 73 centièmes de pouce le niveau du liquide dans le vase; on demande le volume du lingot ? **Rep.** .73 d'un pouce cube.

3. Ayant rempli d'eau un vaisseau quelconque, on y a plongé un objet dont on désire connaître le volume; on a recueilli dans un autre vaisseau, l'eau renversée dont la quantité est de 3 gallons 1 pot et 1 septier; quel est le volume de l'objet proposé, le gallon dont on s'est servi étant de 231 pouces cubes ?

Rep. 1 gallon + 1 pot + 1 septier = $231 + 115\frac{1}{2} + 14\frac{7}{16} = 360\frac{15}{16}$ pouces cubes.

4. On demande le volume d'une substance absorbante placée dans un vaisseau de un pied carré qu'on a rempli de sable; après en avoir enlevé l'objet à évaluer, on trouve que la hauteur uniforme du sable dans le vaisseau qu'on a d'abord nivelé à cet effet, est de .3 d'un pied, la hauteur du vaisseau étant de 1.5 pieds ?

Rep. $1.5 - .3 = 1.2$ pieds = hauteur du niveau déplacé du sable, et comme le vaisseau est de 1 pied carré en coupe horizontale, il suit que le volume de l'objet proposé est de 1.2 pieds cubes.

5. Dans un vaisseau en forme de tronc de cône se trouve une quantité de liquide dont le diam. à la surface est de 10 pouces; on y plonge un objet qui augmente de 9 pouces la hauteur ou profondeur du liquide dans le vaisseau et qui donne à sa surface déplacée un diamètre de 14 pouces; on demande le volume du corps proposé ?

Rep. Le volume d'eau déplacée, qui est en même temps celui de l'objet, est celui d'un tronc de cône dont les bases parallèles mesurent respectivement 10 et 14 pouces et dont la hauteur est de 9 pouces; ce vol. = (**1516**) $(10^2 + 14^2 + 4 \text{ fois } 12^2) \times .7854 \times 9 \div 6 = 872 \times .7854 \times 1.5 = 684.8688 \times 1.5 = 1027.3032$ pouces cubes.

PROBLÈME LXI.

Déterminer le volume ou le poids d'un corps ou d'une substance quelconque, par comparaison du volume ou poids de tel corps, avec celui d'un corps ou substance de même nature dont on connaît à l'avance le poids et le volume.

(1595) REM. Le poids d'un pied cube d'eau à la température de 40° Fahrenheit (à laquelle à peu près l'eau atteint sa plus grande densité) est de 1000 *onces avoir-du-poids*, près, ou de $62\frac{1}{2}$ livres (poids Anglais) et l'on appelle poids ou gravité spécifique d'un corps ou d'une substance quelconque, le poids d'un volume de tel corps ou de telle substance égal à celui de l'eau prise pour point de départ; d'où il résulte que si l'on connaît d'avance le poids d'un pied cube par exemple de chacune des différentes substances qu'on peut être appelé à estimer ou à mesurer, tel que consigné dans la table qui va suivre, l'on déterminera de suite par une simple proportion le volume de tout autre poids ou quantité de la même substance ou le poids de tout autre volume de telle substance, par les règles suivantes.

(1596) REGLE. Pour determiner le volume d'un corps d'apres son poids; *faites la proportion : le poids spécifique du corps proposé est à* (:) *son poids en onces ou en livres, etc., comme* (::) 1 *pied cube ou* 1728 *pouces cubes, est au* (:) *volume du corps en pieds ou en pouces, suivant le cas.*

Ex. 1. Le poids d'une bombe ou d'un boulet en fonte de fer ou d'un fragment quelconque de tel solide pèse 45 livres: on demande le volume du corps proposé ?

Rep. On voit par la table des poids spécifiques (page 102 des tables) que le poids du fer coulé ou de la fonte est de 450 livres près, au pied cube; on aura donc le volume demandé en faisant 450 livres : 1728 pouces cubes :: 45 livres : 172.8 pouces cubes.

2. On demande le volume d'une statue de marbre dont le poids est de 1000 livres, la gravité spécifique du marbre dont la statue est tirée étant de 170 livres près au pied cube ?

Rep. 170 livres : 1 pied cube :: 1000 livres : 5.9 pieds cubes près.

3. Une quantité de sable pèse 13 livres: quel en est le volume ?

Rep. D'après la table, la gravité spécifique du sable est de 1.520, c'est-à-dire 1.520 fois le poids d'un volume égal d'eau ou de 1520 onces au pied cube (puisque le poids d'un pied cube d'eau est de 1000 onces); on fera donc 1520 onces : 1728 pouces cubes :: $(13 \times 16 =)$ 208 onces : $x = \frac{1728 \times 208}{1520} = 236\frac{1}{2}$ pres pouces cubes.

4. Le poids d'une défense ou dent d'éléphant est de 25 livres ; quel en est le volume ?

Rep. L'ivoire est de 1825 onces au pied cube ; on aura donc le volume de la dent en faisant 1825 : 1 :: (25 livres ou) 400 onces : .22 près d'un pied cube ou 1825 onces : 1728 pouces cubes :: 400 onces : 378.74 pouces cubes.

5. On demande à déterminer par avance le poids probable d'une grille en fonte de fer qui doit être coulée d'après un modèle sculptée en bois de pin dont le poids est de 7 livres ?

Rep. On aura d'abord le volume du modèle en pin en faisant d'après la règle (le pin étant censé dans ce cas de 25 livres au pied cube) 25 livres : 1 pied cube :: 7 livres : .28 d'un pied cube. Maintenant, comme le volume de la fonte sera aussi = .28 d'un pied cube et que le poids de la fonte est de 450 livres au pied cube, on aura le poids de la grille proposée = 450 × .28 = 126 livres.

(1597) REGLE. Pour determiner le poids d'un corps d'apres son volume ; *faites la proportion : un pied cube est au* (:) *volume du corps proposé, comme* (::) *sa gravité spécifique est à* (:) *son poids.*

Ex. 1. Le volume d'un monceau de neige sur le toit d'un édifice est de 7000 pieds cubes, le poids d'un pied cube de cette neige, refoulée qu'elle est et rendue lourde par la pluie, etc., est de 30 livres : on demande le poids total dont le toit est affecté ? **Rep.** 7000 × 30 = 210,000 livres.

2. Quel est le poids d'un lingot d'or pur coulé dont les dimensions sont de 3 pouces par $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ pouces ?

Rep. Le volume $= 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ pouces cubes ; la gravité spécifique de l'or pur est de 19.258 ; la règle donne, 1 pied cube ou 1728 pouces cubes : $2\frac{1}{4}$ pouces cubes :: 19.258 : $x = \frac{19.258 \times 2.25}{1728} = 25.07552$ onces.

3. On désire connaître le poids d'une tinette de beurre dont le volume, obtenu d'après la règle de l'article (**1516**), est de 1830 pouces cubes ?

Rep. Le poids spécifique du beurre est de .940 de celle de l'eau, c'est-à-dire de 940 onces au pied cube, on aura donc le poids voulu $= \frac{1830 \times 940}{1728} = 995\frac{1}{2}$ onces, $\div 16 = 62$ livres $3\frac{1}{2}$ onces.

4. Quel est le poids près d'un plançon de chêne anglais demi-sec dont le volume est de 150 pieds cubes ?

Rep. Le chêne demi-sec, d'après la table, est de 66 livres près au pied cube, d'où le poids voulu, est de 150 × 66 = 9900 livres.

5. Quel est le poids près d'une caisse de livres reliés dont le volume est de 15 pieds cubes ?

Rep. 15 pieds cubes × 43 livres près = 645 livres.

PROBLÈME LXII.

Déterminer le poids spécifique d'un corps ou substance quelconque.

(1598) REGLE I. *cubez et pesez le corps proposé, pour faire ensuite la proportion : le volume du corps est à (:) son poids en onces, comme (::) un pied cube de tel corps, est au (:) poids d'un pied en onces, c'est-à-dire, en séparant trois chiffres pour décimales, à sa gravité spécifique.*

Ex. 1. Quelle est le poids spécifique du noyer noir sec, si un échantillon de ce bois dont les dimensions sont de 11 × 7 × .9 pouces, pèse 24 onces ?

Rep. 11 × 7 × .9 = 69.3 pouces cubes = vol. du corps proposé ; maintenant, d'après la règle 69.3 pouces : 24 onces :: 1728 pouces : 598 onces ou 37.4 livres ; la gravité spécifique voulue est donc de .598 de celle de l'eau dont le poids est de 1000 onces au pied cube.

2. Un morceau irrégulier de craie dont on a pu obtenir le volume, 432 pouces cubes, par la méthode de l'exemple 4 de l'avant dernier problème, pèse 43½ livres : on demande la gravité spécifique de cette substance ?

Rep. 432 pouces : 1728 pouces :: 43½ livres : 174 livres ; d'où la gravité spécifique voulue est de 174 × 16 = 2784 onces ou 2.784 fois le poids d'un égal volume d'eau.

3. Un bateau ou ponton de 100 pieds par 20 × 10 pieds et dont le volume total est en conséquence de 20,000 pieds cubes, a requis pour le construire 5000 pieds cubes de pin blanc demi-sec dont on estime le poids à 40 livres au pied cube, 500 pieds cubes d'orme estimé à 50 livres au pied cube, et 5000 livres pesant de chevilles en fer : on demande quel sera le tirant d'eau du bateau proposé ?

Rep. Le poids du pin = 5000 × 40 = 200,000 livres, le poids de l'orme = 500 × 50 = 25,000, le fer 5000 livres ; le poids total du bateau est en conséquence de 230,000 ; le poids moyen ou la gravité spécifique du ponton est de 230,000 livres ÷ 20,000 pieds cubes = 11.5 livres au pied cube, c-à-d. de 11.5 × 16 = 184 onces au pied cube, soit .184 du poids d'un même volume d'eau. La hauteur du ponton est de 10 pieds ; donc le tirant d'eau sera .184 de la hauteur du ponton ou 1.84 pieds, c.-à-d. 1 pied 10 pouces et .96 de pouce = 1 pied 11 pouces près.

4. De combien pourra-t-on charger le ponton ou bateau du dernier exemple, sans le faire sombrer ou caler au-delà de sa surface supérieure ?

Rep. Puisque l'eau pèse 62.5 livres au pied cube et que le volume total du ponton est de 20,000 pieds cubes, le poids total de l'eau que devra déplacer le ponton avant que de caler à l'affleurement de l'eau est de 20,000 ×

62.5=1,250,000 livres, or le poids du bateau n'est que de 230,000 livres ; d'où il suit qu'on pourra encore sans faire sombrer le bateau le charger d'un poids égal ou presque égal à la différence entre 1250,000 livres et 230,000, c.-à-d. 1020,000 liv

(1599) **REGLE II. S corps a estimer est plus pesant que l'eau ;** *pesez d'abord .. corps dans l'air puis dans l'eau, au moyen d'une balance hydrostatique ; la différence entre les résultats sera le poids perdu dans l'eau, ou le poids d'une quantité d'eau égal en volume au corps. Faites alors la proportion : comme le poids perdu dans l'eau (:) est au poids du corps dans l'air, (::) de même la gravité spécifique de l'eau, (:) est à la gravité spécifique du corps.*

Ex. 1. Un morceau d'étain pèse 183 livres, son poids dans l'eau n'est que de 158 livres : quelle est la gravité spécifique de l'étain ?

Rep. 183 − 158 = 25 : 183 :: 1000 : 7320 = gravité spécifique demandée.

2. Un bloc de granit pèse 21 onces dans l'air et seulement 13 onces dans l'eau : quelle est la gravité spécifique du granit ? **Rep.** 2625.

(1600) **REGLE III. Si le corps a estimer est moins pesant que l'eau ;** *attachez au corps proposé par un fil dont le poids soit relativement nul, un autre corps plus lourd ou pesant que l'eau, de manière que les deux pris ensemble puissent pénétrer ou s'enfoncer dans l'eau ; ayant préalablement pesé chaque corps dans l'air, et le plus pesant dans l'eau, pesez alors dans l'eau le corps composé, et du poids perdu par le corps composé, soustrayez le poids perdu par le corps plus lourd tel que pesé seul ; le reste est le poids perdu par le corps léger. Alors : le poids perdu par le corps léger dans l'eau, (:) est au poids de ce corps dans l'air, (::) comme la gravité spéciffque de l'eau ; (:) est à la gravité spécifique du corps.*

Ex. 1. A un morceau d'orme qui *dans l'air* pèse 15 grains, on a attaché un morceau de cuivre dont le poids est de 18 grains *dans l'air* et de 16 grains *dans l'eau*, et le composé *dans l'eau* ne pèse que 6 grains : quelle est la gravité spécifique de l'orme ?

Rep. 18 − 16 = 2 = le nombre de grains perdus par le cuivre *dans l'eau.*

18 + 15 − 6 = 27 = le nombre de grains perdus par le composé *dans l'eau.*

27 − 2 = 25 = le nombre de grains perdus par l'orme *dans l'eau.*

25 : 15 :: 1000 : 600 = la gravité spécifique de l'orme.

2. Un morceau de cuivre, pesant dans l'air 27 onces et dans l'eau 24 onces, est attaché à un morceau de liége qui pèse dans l'air 6 onces, et le composé ne pèse dans l'eau que 5 onces : quelle est la gravité spécifique du liége ? **Rep.** 0.240.

PROBLÈME LXIII.

Déterminer la quantité de chaque ingrédient ou élément dans un composé de deux substances ou éléments.

(1601) REGLE. *Trouvez d'abord le poids spécifique du composé, mélange ou alliage, et de chacun des éléments composants, et multipliez la différence de chaque deux de ces trois poids spécifiques par le troisième. Faites alors : le plus grand produit, (:) est à chacun des autres produits, (::) comme le poids de l'alliage, (:) est au poids de chaque ingrédient.*

Ex. 1. Une masse d'or et argent pèse 63 onces, et sa gravité spécifique est 16126 : quelle est la quantité de chaque ingrédient, la gravité spécifique de l'or étant 19640, et celle de l'argent 11091 ?

Rep. (19640 − 11091) × 16126 = 137,861,174. Alliage.
(19640 − 16126) × 11091 = 38,973,774. Argent.
(16126 − 11091) × 19640 = 98,887,400. Or.
137,861,174 : 98,887,400 :: 63 : 45 onces 3 gros 19 grains d'or.
137,861,174 : 38,973,774 :: 63 : 17 onces 16 gros 5 grains d'argent.

2. Une masse de cuivre et or pèse 48 onces, et sa gravité spécifique est 17150, la gravité spécifique de l'or est 19640 et celle du cuivre 9000 : quelle est la quantité de chaque élément du mélange ?

Rep. L'or = 42 onces 2 gros 2 $\frac{20178}{45619}$ grains, le cuivre = 5 onces 17 gros 21 $\frac{25448}{45619}$ grains.

3. Un alliage d'argent et cuivre pèse 60 onces, sa gravité spécifique étant de 10535 : on demande le poids de chaque ingrédient, leurs gravités spécifiques respectives étant 11091 et 9000 ?

Rep. 46 onces 7 gros 9 $\frac{1232397}{1468579}$ grains d'argent, 13 onces 12 gros 14 $\frac{236182}{1468579}$ grains de cuivre.

4. Un alliage de cuivre et étain pèse 112 livres et sa gravité spécifique est 8784 : quelle est la quantité de chacun des ingrédients du mélange, leurs gravités spécifiques respectives étant 9000 et 7320 ?

Rep. 100 livres de cuivre, 12 livres d'étain.

5. On demande le poids de l'or, dans un composé de quartz et or dont la gravité spécifique est 3500, celle de l'or étant 19640 et celle du quartz 3000 ?

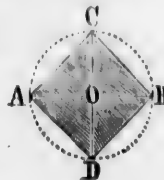
Rep. 19640 − 3000 = 16640, 16640 × 3500 = 58,240,000 = Facteur pour le corps composé.
19640 − 3500 = 16140, 16140 × 3000 = 48,420,000 = Facteur pour le quartz.
3500 − 3000 = 500, 500 × 19640 = 9,820,000 = Facteur pour l'or.

58240000 : 9820000 :: 100 : 16.8612638 — onces d'or; si ce résultat est correct, le poids du quartz doit être égal à la différence entre le poids de l'or et celui du mélange, et en effet 58240000 : 48420000 :: 100 : 83.1387362 + onces de quartz; la somme de ces nombres = 100; donc, etc.

PROBLÈME LXIV.

Déterminer le volume du plus grand plançon, ou morceau de bois écarri qu'on puisse tirer d'un billot rond ou d'un arbre abattu ou sur-pied.

(1602) REGLE. *Multipliez le diamètre de l'arbre ou billot par le demi-diamètre, et ce produit par la longueur : ce résultat sera le volume demandé.*



En effet, il est clair que le diam. AB multiplié par le demi-diam. OC (ou $\frac{1}{2}$ AB) donne pour produit la surface du carré inscrit ABCD, c.-à-d. la surface d'une coupe, du plançon à évaluer, par un plan perpendiculaire à sa longueur, et cette surface multipliée par la longueur du billot donne **(1490)** la solidité requise.

REM. Cette règle suppose que le diam. de l'arbre est partout le même ou que l'on se sert d'un diam. moyen, tel que pris au milieu de la longueur, et c'est ce qui se fait d'ordinaire lorsqu'il n'y a pas trop de différence entre les diamètres des extrémités opposées; mais pour être précis **(1542)** il faut comme on l'a déjà dit **(1498)** ajouter à la somme des surfaces des extrémités du plançon ou de l'arbre à évaluer quatre fois la surface d'une section prise au centre et multiplier le tout par la sixième partie de la longueur, ou, ce qui est la même chose, multiplier la somme des surfaces par la longueur entière et prendre la sixième partie du résultat.

Ex. 1. La circonférence d'un billot, dont la longueur est de 12 pieds, est de 6.28 pieds, déduction faite de l'écorce s'il y a lieu : combien y aura-t-il de pieds cubes de bois dans le plançon écarri qu'on pourra en tirer ?

Rep. La circ. 6.28 correspond à un diam. 2, la coupe du plançon sera donc de $2 \times 1 = 2$ pieds carrés en surface, et comme la longueur est 12, le volume sera 24 pieds cubes.

2. Un arbre dont la hauteur est de 50 pieds, a pour diam. sup. 30 pouces, et pour diam. inf. 36 pouces; pour diam. interm. 33 pouces : quel est le volume du morceau de bois carré qu'on pourra en tirer.

Rep. Surf. petit bout $= 2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$ pieds $= 3.125$ pds. sup., surf. gros bout $= 3 \times 1\frac{1}{2} = 4.5$ pds. sup., surf. intermédiaire $= 2.75 \times 1.375 = 3.78125$, 4 surf.

interm. $= 15.125$, la somme des surf. $= 22.75$ et cette somme $\times 50 \div 6 = 189.6$ pieds cubes.

3. On a mesuré en 5 endroits à peu près équidistants au moyen d'un compas d'épaisseur, le diam. d'un arbre irrégulier qu'on vient d'abattre ; ces diamètres sont respectivement 39, $39\frac{1}{2}$, 38, $37\frac{1}{2}$ et 36 pouces, et la longueur de l'arbre 40 pieds : quel sera son volume après qu'on l'aura écarri ?

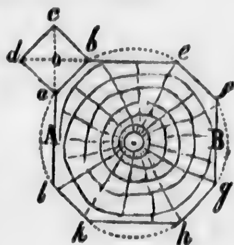
Rep. La somme des diamètres 190 pouces $\div 5 = 38$ pouces $=$ diam. moyen $= 3\frac{1}{6}$ pieds, $3.166 \times 1.583 = 5.012$ près $=$ surf. de la section, multipliant cette dernière par la longueur 40, on a $200\frac{1}{2}$ pieds cubes.

PROBLÈME LXV.

Cuber un plançon AB qui n'est qu'en partie écarri, ou dont les arêtes ou angles sont à faux bois.

(1603) **REGLE** *Faites le carré du diam.* AB *du plançon et de ce carré, retranchez celui du diam. ab de l'aubier, la différence de ces carrés multipliée par la longueur du plançon, sera la solidité requise.*

En effet, il est clair que la surface qui manque à chacun des quatre angles, coins ou arêtes du plançon, pour compléter le carré AB, est le triangle *abo*, ou un triangle égal à *abo*, lorsque, comme on le suppose, $ef = gh = kl = ab$; or le carré sur *ab* vaut 4 *abo* ; donc, etc.



REM. I. Si les côtés *ab*, *ef* etc. ne sont pas égaux entre eux, on pourra prendre le quart de la somme de ces quatre côtés pour un diam. moyen *ab*, ou pour plus grande précision, on fera séparément les carrés de *ab*, *ef*, etc. et le quart de la somme de ces carrés sera, ou la somme des quarts de ces carrés sera la quantité près à distraire du carré AB pour avoir la superficie nette de la coupe du plançon.

REM. II. Observons ici comme dans le dernier problème que si le plançon n'est pas dans toute sa longueur d'égal calibre, il y aura à en prendre la coupe vers le milieu de sa longueur, et c'est d'ordinaire ce que l'on fait (**1542**) ou, l'on déterminera plusieurs coupes ou sections du plançon pour en prendre la moyenne, ou enfin l'on fera la somme des surfaces des extrémités opposées plus quatre fois celle de la section intermédiaire pour multiplier ensuite le tout par la longueur et prendre la sixième partie du résultat.

REM. III. Il y a lieu aussi d'observer qu'on peut arriver à la surface de tout octogone régulier ou de l'espèce de celui de la fig. de cet article, en soustrayant du carré de la distance perpendiculaire AB qui sépare deux

quelconques de ses côtés parallèles, le carré de l'un *ab* des côtés adjacents à ces premiers.

Ex. 1. Un pilier à huit pans a 3 pieds de largeur ou épaisseur AB, le côté *ab* du chamfrein rabattu *aob* est de 6 pouces: quel est le volume du pilier, sa longueur ou hauteur étant de 10 pieds ?

Rep. $(3 \times 3) - (.5 \times .5) = 8.75$ pieds superficiels, et $8.75 \times 10 = 87.5$ pieds cubes = vol. demandé.

2. Un plançon dont les arêtes sont à faux bois, mesure 30 pouces en carré et 30 pieds en longueur, la moyenne des côtés *ab*, *ef*, etc. du faux bois est de 9 pouces; quel est le volume du plançon ?

Rep. (30×30) moins $(9 \times 9) = 919$ pouces carrés = surface de la coupe du plançon = 6.382 pieds à très près, et $6.382 \times 30 = 191.46$ pieds cubes.

3. On a réduit à 30 pouces en carré au gros bout un arbre dont le diam. était à cet endroit de 36 pouces, au petit bout le diam. 30 pouces a été réduit à 25 pouces, le faux bois, aubier ou défaut d'équarissage *ab* est de 7 et 6 pouces respectivement aux deux extrémités, tel qu'obtenu par un mesurage direct du morceau de bois à cuber, ou au moyen d'une esquisse faite d'après une échelle de parties égales: quel est le volume du plançon, sa longueur étant de 60 pieds.

Rep. Surf. au gros bout $= (30 \times 30) - (7 \times 7) = 851$ pouces carrés, surf. au petit bout $= (25 \times 25) - (6 \times 6 = 589$ p. c., la surface intermédiaire

$$\left(\frac{30+25}{2} \times \frac{30+25}{2}\right) - \left(\frac{7+6}{2} \times \frac{7+6}{2}\right) = (27\tfrac{1}{2} \times 27\tfrac{1}{2}) - (6\tfrac{1}{2} \times 6\tfrac{1}{2}) = 27.5^2 -$$

$- 6.5^2 = 756.25 - 42.25 = 714$; $851 + 589 + 4$ fois $714 = 4296$ pouces carrés, divisant par 144 on a 29.833 pieds carrés, multipliant par $\frac{1}{6}$ longueur ou par 10 on a 298.33 pieds cubes.

Rep. Surf. section au centre = 714 pouces carrés, $714 \div 144 = 4.4983$ pieds carrés, $4.9583 \times 60 = 297.498$ pieds cubes, c.-à-d. égal au vol. exact à moins d'un pied près, ou à moins d'un 300ème près, ou à moins du tiers près de 1 pour cent, exactitude suffisante (**1542**) dans la pratique.

REM. IV. Une comparaison des deux réponses du dernier probleme, indique suffisamment que la pratique ordinaire des mesureurs de bois, qui prennent les dimensions d'un plançon au milieu de sa longueur, pour multiplier ensuite la surface de la coupe en cet endroit par la longueur du plançon, afin d'en obtenir ainsi le volume, est, à tout considérer (**1542**), sanctionnée par les circonstances.

TABLE

DE

LOGARITHMES DES NOMBRES

DE 1 À 10,000.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1	0.000000	26	1.414973	51	1.707570	76	1.880814
2	0.301030	27	1.431364	52	1.716003	77	1.886491
3	0.477121	28	1.447158	53	1.724276	78	1.892095
4	0.602060	29	1.462398	54	1.732394	79	1.897627
5	0.698970	30	1.477121	55	1.740363	80	1 903090
6	0.778151	31	1.491362	56	1.748188	81	1.908485
7	0.845098	32	1.505150	57	1.755875	82	1.913814
8	0.903090	33	1.518514	58	1.763428	83	1.919078
9	0.954243	34	1.531479	59	1.770852	84	1.924279
10	1.000000	35	1.544068	60	1.778151	85	1.929419
11	1.041393	36	1.556303	61	1.785330	86	1.934498
12	1.079181	37	1.568202	62	1.792392	87	1.939519
13	1.113943	38	1.579784	63	1.799341	88	1.944483
14	1.146128	39	1.591065	64	1.806180	89	1.949390
15	1.176091	40	1.602060	65	1.812913	90	1.954243
16	1.204120	41	1.612784	66	1.819544	91	1.959041
17	1.230449	42	1.623249	67	1.826075	92	1.963788
18	1.255273	43	1.633468	68	1.832509	93	1.968483
19	1.278754	44	1.643453	69	1.838849	94	1.973128
20	1.301030	45	1.653213	70	1.845098	95	1.977724
21	1.322219	46	1.662758	71	1.851258	96	1.982271
22	1.342423	47	1.672098	72	1.857333	97	1.986772
23	1.361728	48	1.681241	73	1.863323	98	1.991226
24	1.380211	49	1.690196	74	1.869232	99	1.995635
25	1.397940	50	1.698970	75	1.875061	100	2.000000

N. B. Dans les neuf dernières colonnes de chaque page de la table suivante, à l'endroit où les premiers chiffres se changent de 9's en 0's, on a remplacé ces 0's par des points, pour mieux fixer l'œil et pour indiquer qu'à partir de là il faut prendre sur la ligne plus basse les deux premiers chiffres du Logarithme dans la seconde colonne.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
100	000000	0434	0868	1301	1734	2166	2598	3029	3461	3891	432
101	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
102	8600	9026	9451	9876	.300	.724	1147	1570	1993	2415	424
103	012837	3259	3680	4100	4521	4940	5360	5779	6197	6616	419
104	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	.361	.775	416
105	021189	1603	2016	2428	2841	3252	3664	4075	4486	4896	412
106	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	408
107	9384	9789	.195	.600	1004	1408	1812	2216	2619	3021	404
108	033424	3826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	400
109	7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	.207	.602	.998	396
110	041393	1787	2182	2576	2969	3332	3755	4148	4540	4932	393
111	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8850	389
112	9218	9606	9993	.380	.766	1153	1538	1924	2309	2694	386
113	053078	3463	3846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524	382
114	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	.320	379
115	060698	1075	1452	1829	2206	2582	2958	3333	3709	4083	376
116	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815	372
117	8186	8557	8928	9298	9668	..38	.407	.776	1145	1514	369
118	071882	2250	2617	2985	3352	3718	4085	4451	4816	5182	366
119	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	363
120	079181	9543	9904	.266	.626	.987	1347	1707	2067	2426	360
121	082785	3144	3503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004	357
122	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552	355
123	9905	.258	.611	.963	1315	1667	2018	2370	2721	3071	351
124	093422	3772	4122	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562	349
125	6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	..26	348
126	100371	0715	1059	1403	1747	2091	2434	2777	3119	3462	343
127	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871	340
128	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	.253	338
129	110590	0926	1263	1599	1934	2270	2605	2940	3275	3609	335
130	113943	4277	4611	4944	5278	5611	5943	6276	6608	6940	333
131	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	.245	330
132	120574	0903	1231	1560	1888	2216	2544	2871	3198	3525	328
133	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781	325
134	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	..12	323
135	130334	0655	0977	1298	1619	1939	2260	2580	2900	3219	321
136	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403	318
137	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564	315
138	9879	.194	.508	.822	1136	1450	1763	2076	2389	2702	314
139	143015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818	311
140	146128	6438	6748	7058	7367	7676	7985	8294	8603	8911	309
141	9219	9527	9835	.142	.449	.756	1063	1370	1676	1982	307
142	152288	2594	2900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032	305
143	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061	303
144	8362	8664	8965	9266	9567	9868	.168	.469	.769	1068	301
145	161368	1667	1967	2266	2564	2863	3161	3460	3758	4055	299
146	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022	297
147	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968	295
148	170262	0555	0848	.141	1434	1726	2019	2311	2603	2895	293
149	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291
150	176091	6381	6670	6959	7248	7536	7825	8113	8401	8689	289
151	8977	9264	9552	9839	.126	.413	.699	.985	1272	1558	287
152	181844	2129	2415	2700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
153	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239	283
154	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	..51	281
155	190332	0612	0892	1171	1451	1730	2010	2289	2567	2846	279
156	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623	278
157	5899	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382	276
158	8657	8932	9206	9481	9755	..29	.303	.577	.850	1124	274
159	201397	1670	1943	2216	2488	2761	3033	3305	3577	3848	272
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
160	204120	4391	4663	4934	5204	5475	5746	6016	6286	6556	271
161	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
162	9515	9783	..51	.319	.586	.853	1121	1388	1654	1921	267
163	212188	2454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
164	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
165	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
166	220108	0370	0631	0892	1153	1414	1675	1936	2196	2456	261
167	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
168	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
169	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	.193	256
170	230449	0704	0960	1215	1470	1724	1979	2234	2488	2742	254
171	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
172	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
173	8046	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	..50	.300	250
174	240549	0799	1048	1297	1546	1795	2044	2293	2541	2790	249
175	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266	248
176	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
177	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	.176	245
178	250420	0664	0908	1151	1395	1638	1881	2125	2368	2610	243
179	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	255273	5514	5755	5996	6237	6477	6718	6958	7198	7439	241
181	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
182	260071	0310	0548	0787	1025	1263	1501	1739	1976	2214	238
183	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582	237
184	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
186	9513	9746	9980	.213	.446	.679	.912	1144	1377	1609	233
187	271842	2074	2306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
188	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232	230
189	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	278754	8982	9211	9439	9667	9895	.123	.351	.578	.806	228
191	281033	1261	1488	1715	1942	2169	2396	2622	2849	3075	227
192	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
193	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
194	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	223
195	290035	0257	0480	0702	0925	1147	1369	1591	1813	2034	222
196	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
197	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
198	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
199	8853	9071	9289	9507	9725	9943	.161	.378	.595	.813	218
200	301030	1247	1464	1681	1898	2114	2331	2547	2764	2980	217
201	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
202	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7282	215
203	7496	7710	7924	8137	8351	8564	8778	8991	9204	9417	213
204	9630	9843	..56	.268	.481	.693	.906	1118	1330	1542	212
205	311754	1966	2177	2389	2600	2812	3023	3234	3445	3656	211
206	3867	4078	4289	4499	4710	4920	5130	5340	5551	5760	210
207	5970	6180	6390	6599	6809	7018	7227	7436	7646	7854	209
208	8063	8272	8481	8689	8898	9106	9314	9522	9730	9938	208
209	320146	0354	0562	0769	0977	1184	1391	1598	1805	2012	207
210	322219	2426	2633	2839	3046	3252	3458	3665	3871	4077	206
211	4282	4488	4694	4899	5105	5310	5516	5721	5926	6131	205
212	6336	6541	6745	6950	7155	7359	7563	7767	7972	8176	204
213	8380	8583	8787	8991	9194	9398	9601	9805	...8	.211	203
214	330414	0617	0819	1022	1225	1427	1630	1832	2034	2236	202
215	2438	2640	2842	3044	3246	3447	3649	3850	4051	4253	202
216	4454	4655	4856	5057	5257	5458	5658	5859	6059	6260	201
217	6460	6660	6860	7060	7260	7459	7659	7858	8058	8257	200
218	8456	8656	8855	9054	9253	9451	9650	9849	..47	.246	199
219	340444	0642	0841	1039	1237	1435	1632	1830	2028	2225	198
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
220	342423	2620	2817	3014	3212	3409	3606	3802	3999	4196	197
221	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	196
222	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
223	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	..54	194
224	350248	0442	0636	0829	1023	1216	1410	1603	1796	1989	193
225	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	193
226	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	192
227	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	191
228	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
229	9835	..25	.215	.404	.593	.783	.972	1161	1350	1539	189
230	361728	1917	2105	2294	2482	2671	2859	3048	3236	3424	188
231	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	188
232	5488	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
233	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
234	9216	9401	9587	9772	9958	.143	.328	.513	.698	.883	185
235	371068	1253	1437	1622	1806	1991	2175	2360	2544	2728	184
236	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	184
237	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	183
238	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
239	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	..30	181
240	380211	0392	0573	0754	0934	1115	1296	1476	1656	1837	181
241	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
242	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	179
243	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
244	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	178
245	9166	9343	9520	9698	9875	..51	.228	.405	.582	.759	177
246	390935	1112	1288	1464	1641	1817	1993	2169	2345	2521	176
247	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	176
248	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	175
249	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174
250	397940	8114	8287	8461	8634	8808	8981	9154	9328	9501	173
251	9674	9847	..20	.192	.365	.538	.711	.883	1056	1228	173
252	401401	1573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
253	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
254	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	171
255	6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	170
256	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
257	9933	.102	.271	.440	.609	.777	.946	1114	1283	1451	169
258	411620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
259	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
260	414973	5140	5307	5474	5641	5808	5974	6141	6308	6474	167
261	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
262	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791	165
263	9956	.121	.286	.451	.616	.781	.945	1110	1275	1439	165
264	421604	1788	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	164
265	3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	164
266	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
267	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
268	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	162
269	9752	9914	..75	.236	.398	.559	.720	.881	1042	1203	161
270	431364	1525	1685	1846	2007	2167	2328	2488	2649	2809	161
271	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	160
272	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
273	6163	6322	6481	6640	6798	6957	7116	7275	7433	7592	159
274	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
275	9333	9491	9648	9806	9964	.122	.279	.437	.594	.752	158
276	440909	1066	1224	1381	1538	1695	1852	2009	2166	2323	157
277	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	157
278	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	156
279	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
280	447158	7313	7468	7623	7778	7933	8088	8242	8397	8552	155
281	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	..95	154
282	450249	0403	0557	0711	0865	1018	1172	1326	1479	1633	154
283	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165	153
284	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	153
285	4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214	152
286	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	152
287	7882	8033	8184	8336	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
288	9392	9543	9694	9845	9995	.146	.296	.447	.597	.748	151
289	460898	1048	1198	1348	1499	1649	1799	1948	2098	2248	150
290	462398	2548	2697	2847	2997	3146	3296	3445	3594	3744	150
291	3893	4042	4191	4340	4490	4639	4788	4936	5085	5234	149
292	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	149
293	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	148
294	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	148
295	9822	9969	.116	.263	.410	.557	.704	.851	.998	1145	147
296	471292	1438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610	146
297	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
298	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	146
299	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	145
300	477121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422	145
301	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	144
302	480007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299	144
303	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	143
304	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	143
305	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
306	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	142
307	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	141
308	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	141
309	9958	..99	.239	.380	.520	.661	.801	.941	1081	1222	140
310	491362	1502	1642	1782	1922	2062	2201	2341	2481	2621	140
311	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	139
312	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	139
313	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	139
314	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	138
315	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	138
316	9687	9824	9962	..99	.236	.374	.511	.648	.785	.922	137
317	501059	1196	1333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	137
318	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655	136
319	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	136
320	505150	5286	5421	5557	5693	5828	5964	6099	6234	6370	136
321	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
322	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068	135
323	9203	9337	9471	9606	9740	9874	...9	.143	.277	.411	134
324	510545	0679	0813	0947	1081	1215	1349	1482	1616	1750	134
325	1883	2017	2151	2284	2418	2551	2684	2818	2951	3084	133
326	3218	3351	3484	3617	3750	3883	4016	4149	4282	4414	133
327	4548	4681	4813	4946	5079	5211	5344	5476	5609	5741	133
328	5874	6006	6139	6271	6403	6535	6668	6800	6932	7064	132
329	7196	7328	7460	7592	7724	7855	7987	8119	8251	8382	132
330	518514	8646	8777	8909	9040	9171	9303	9434	9566	9697	131
331	9828	9959	..90	.221	.353	.484	.615	.745	.876	1007	131
332	521138	1269	1400	1530	1661	1792	1922	2053	2183	2314	131
333	2444	2575	2705	2835	2966	3096	3226	3356	3486	3616	130
334	3746	3876	4006	4136	4266	4396	4526	4656	4785	4915	130
335	5045	5174	5304	5434	5563	5693	5822	5951	6081	6210	129
336	6339	6469	6598	6727	6856	6985	7114	7243	7372	7501	129
337	7630	7759	7888	8016	8145	8274	8402	8531	8660	8788	129
338	8917	9045	9174	9302	9430	9559	9687	9815	9943	..72	128
339	530200	0328	0456	0584	0712	0840	0968	1096	1223	1351	128
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
340	531479	1607	1734	1862	1990	2117	2245	2372	2500	2627	128
341	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	127
342	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	127
343	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432	126
344	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	126
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	126
346	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	..79	.204	125
347	540329	0455	0580	9705	0830	0955	1080	1205	1330	1454	125
348	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701	125
349	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	124
350	544068	4192	4316	4440	4564	4688	4812	4936	5060	5183	124
351	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	124
352	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	123
353	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	123
354	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	.106	123
355	550228	0351	0473	0595	0717	0840	0962	1084	1206	1328	122
356	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	122
357	2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762	121
358	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	121
359	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	121
360	556303	6423	6544	6664	6785	6905	7026	7146	7267	7387	120
361	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	120
362	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	120
363	9907	..26	.146	.265	.385	.504	.624	.743	.863	.982	119
364	561101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	119
365	2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362	119
366	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548	119
367	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
368	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	118
369	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
370	568202	8319	8436	8554	8671	8788	8905	9023	9140	9257	117
371	9374	9491	9608	9725	9842	9959	..76	.193	.309	.426	117
372	570543	0660	0776	0893	1010	1126	1243	1359	1476	1592	117
373	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	116
374	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	116
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	116
376	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
377	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	115
378	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	115
379	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	114
380	579784	9898	..12	.126	.241	.355	.469	.583	.697	.811	114
381	580925	1039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950	114
382	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	114
383	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
384	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	113
385	5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	113
386	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
387	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	112
388	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	112
389	9950	..61	.173	.284	.396	.507	.619	.730	.842	.953	112
390	591065	1176	1287	1399	1510	1621	1732	1843	1955	2066	111
391	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	111
392	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	111
393	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386	110
394	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	110
395	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	110
396	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	110
397	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	109
398	9883	9992	.101	.210	.319	.428	.537	.646	.755	.864	109
399	600973	1082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	109
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
400	602060	2169	2277	2386	2494	2603	2711	2819	2928	3036	108
401	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	108
402	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	108
403	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	108
404	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
405	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	107
406	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	107
407	9594	9701	9808	9914	..21	.128	.234	.341	.447	.554	107
408	610660	0767	0873	0979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
409	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	106
410	612784	2890	2996	3102	3207	3313	3419	3525	3630	3736	106
411	3842	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792	106
412	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	105
413	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6790	6895	105
414	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	105
415	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	105
416	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	..32	104
417	620136	0240	0344	0448	0552	0656	0760	0864	0968	1072	104
418	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	104
419	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	104
420	623249	3353	3456	3559	3663	3766	3869	3973	4076	4179	103
421	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	103
422	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	103
423	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	103
424	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	102
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
426	9410	9512	9613	9715	9817	9919	..21	.123	.224	.326	102
427	630428	0530	0631	0733	0835	0936	1038	1139	1241	1342	102
428	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	101
429	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	101
430	633468	3569	3670	3771	3872	3973	4074	4175	4276	4376	100
431	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	100
432	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	100
433	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	100
434	7490	7590	7690	7790	7890	7990	8090	8190	8290	8389	99
435	8489	8589	8689	8789	8888	8988	9088	9188	9287	9387	99
436	9486	9586	9686	9785	9885	9984	..84	.183	.283	.382	99
437	640481	0581	0680	0779	0879	0978	1077	1177	1276	1375	99
438	1474	1573	1672	1771	1871	1970	2069	2168	2267	2366	99
439	2465	2563	2662	2761	2860	2959	3058	3156	3255	3354	99
440	643453	3551	3650	3749	3847	3946	4044	4143	4242	4340	98
441	4439	4537	4636	4734	4832	4931	5029	5127	5226	5324	98
442	5422	5521	5619	5717	5815	5913	6011	6110	6208	6306	98
443	6404	6502	6600	6698	6796	6894	6992	7089	7187	7285	98
444	7383	7481	7579	7676	7774	7872	7969	8067	8165	8262	98
445	8360	8458	8555	8653	8750	8848	8945	9043	9140	9237	97
446	9335	9432	9530	9627	9724	9821	9919	..16	.113	.210	97
447	650308	0405	0502	0599	0696	0793	0890	0987	1084	1181	97
448	1278	1375	1472	1569	1666	1762	1859	1956	2053	2150	97
449	2246	2343	2440	2536	2633	2730	2826	2923	3019	3116	97
450	653213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080	96
451	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	96
452	5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	96
453	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	96
454	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	96
455	8011	8107	8202	8298	8393	8488	8584	8679	8774	8870	95
456	8965	9060	9155	9250	9346	9441	9536	9631	9726	9821	95
457	9916	..11	.106	.201	.296	.391	.486	.581	.676	.771	95
458	660865	0960	1055	1150	1245	1339	1434	1529	1623	1718	95
459	1813	1907	2002	2096	2191	2286	2380	2475	2569	2663	95
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
460	662758	2852	2947	3041	3135	3230	3324	3418	3512	3607	94
461	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	94
462	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	94
463	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	94
464	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	94
465	7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293	93
466	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	93
467	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	..60	.153	93
468	670246	0339	0431	0524	0617	0710	0802	0895	0988	1080	93
469	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	93
470	672098	2190	2283	2375	2467	2560	2652	2744	2836	2929	92
471	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	92
472	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	92
473	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	92
474	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	92
475	6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
476	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	91
477	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	91
478	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	..63	.154	.245	91
479	680336	0426	0517	0607	0698	0789	0879	0970	1060	1151	91
480	681241	1332	1422	1513	1603	1693	1784	1874	1964	2055	90
481	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	90
482	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	90
483	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	90
484	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	90
485	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
486	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	89
487	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331	89
488	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220	89
489	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	..19	.107	89
490	690196	0285	0373	0462	0550	0639	0728	0816	0905	0993	89
491	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	88
492	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	88
493	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	98
494	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	88
495	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	88
496	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269	87
497	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	87
498	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014	87
499	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	87
500	698970	9057	9144	9231	9317	9404	9491	9578	9664	9751	87
501	9838	9924	..11	..98	.184	.271	.358	.444	.531	.617	87
502	700704	0790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	86
503	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	86
504	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	86
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3895	3979	4065	86
506	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922	86
507	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	86
508	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	85
509	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	85
510	707570	7655	7740	7826	7911	7996	8081	8166	8251	8336	85
511	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185	85
512	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	..33	85
513	710117	0202	0287	0371	0456	0540	0625	0710	0794	0879	85
514	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723	84
515	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
516	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	84
517	3491	3575	3650	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	84
518	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	84
519	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	84
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
520	716003	6087	6170	6254	6337	6421	6504	6588	6671	6754	83
521	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	83
522	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419	83
523	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	83
524	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	..77	83
525	720159	0242	0325	0407	0490	0573	0655	0738	0821	0903	83
526	0986	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	82
527	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	82
528	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	82
529	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	82
530	724276	4358	4440	4522	4604	4685	4767	4849	4931	5013	82
531	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	82
532	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	82
533	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7216	7297	7379	7460	81
534	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	81
535	8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	81
536	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	81
537	9974	..55	.136	.217	.298	.378	.459	.540	.621	.702	81
538	730782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508	81
539	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	81
540	732394	2474	2555	2635	2715	2796	2876	2956	3037	3117	80
541	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	80
542	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	80
543	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	80
544	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	80
545	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	80
546	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	77	7829	7908	79
547	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	85	8622	8701	79
548	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	79
549	9572	9651	9731	9810	9889	9968	..47	.126	.205	.284	79
550	740363	0442	0521	0600	0678	0757	0836	0915	0994	1073	79
551	1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	79
552	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2646	79
553	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	78
554	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	78
555	4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	78
556	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	78
557	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	78
558	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	78
559	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	78
560	748188	8266	8343	8421	8498	8576	8653	8731	8808	8885	77
561	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	77
562	9736	9814	9891	9968	..45	.123	.200	.277	.354	.431	77
563	750508	0586	0663	0740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	77
564	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	77
565	2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	77
566	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	77
567	3583	3660	3736	3813	3889	3966	4042	4119	4195	4272	77
568	4348	4425	4501	4578	4654	4730	4807	4883	4960	5036	76
569	5112	5189	5265	5341	5417	5494	5570	5646	5722	5799	76
570	755875	5951	6027	6103	6180	6256	6332	6408	6484	6560	76
571	6636	6712	6788	6864	6940	7016	7092	7168	7244	7320	76
572	7396	7472	7548	7624	7700	7775	7851	7927	8003	8079	76
573	8155	8230	8306	8382	8458	8533	8609	8685	8761	8836	76
574	8912	8988	9063	9139	9214	9290	9366	9441	9517	9592	76
575	9668	9743	9819	9894	9970	..45	.121	.196	.272	.347	75
576	760422	0498	0573	0649	0724	0799	0875	0950	1025	1101	75
577	1176	1251	1326	1402	1477	1552	1627	1702	1778	1853	75
578	1928	2003	2078	2153	2228	2303	2378	2453	2529	2604	75
579	2679	2754	2829	2904	2978	3053	3128	3203	3278	3353	75
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
580	763428	3503	3578	3653	3727	3802	3877	3952	4027	4101	75
581	4176	4251	4326	4400	4475	4550	4624	4699	4774	4848	75
582	4923	4998	5072	5147	5221	5296	5370	5445	5520	5594	75
583	5669	5743	5818	5892	5966	6041	6115	6190	6264	6338	74
584	6413	6487	6562	6636	6710	6785	6859	6933	7007	7082	74
585	7156	7230	7304	7379	7453	7527	7601	7675	7749	7823	74
586	7898	7972	8046	8120	8194	8268	8342	8416	8490	8564	74
587	8638	8712	8786	8860	8934	9008	9082	9156	9230	9303	74
588	9377	9451	9525	9599	9673	9746	9820	9894	9968	..42	74
589	770115	0189	0263	0336	0410	0484	0557	0631	0705	0778	74
590	770852	0926	0999	1073	1146	1220	1293	1367	1440	1514	74
591	1587	1661	1734	1808	1881	1955	2028	2102	2175	2248	73
592	2322	2395	2468	2542	2615	2688	2762	2835	2908	2981	73
593	3055	3128	3201	3274	3348	3421	3494	3567	3640	3713	73
594	3786	3860	3933	4006	4079	4152	4225	4298	4371	4444	73
595	4517	4590	4663	4736	4809	4882	4955	5028	5100	5173	73
596	5246	5319	5392	5465	5538	5610	5683	5756	5829	5902	73
597	5974	6047	6120	6193	6265	6338	6411	6483	6556	6629	73
598	6701	6774	6846	6919	6992	7064	7137	7209	7282	7354	73
599	7427	7499	7572	7644	7717	7789	7862	7934	8006	8079	72
600	778151	8224	8296	8368	8441	8513	8585	8658	8730	8802	72
601	8874	8947	9019	9091	9163	9236	9308	9380	9452	9524	72
602	9596	9669	9741	9813	9885	9957	..29	.101	.173	.245	72
603	780317	0389	0461	0533	0605	0677	0749	0821	0893	0965	72
604	1037	1109	1181	1253	1324	1396	1468	1540	1612	1684	72
605	1755	1827	1899	1971	2042	2114	2186	2258	2329	2401	72
606	2473	2544	2616	2688	2759	2831	2902	2974	3046	3117	72
607	3189	3260	3332	3403	3475	3546	3618	3689	3761	3832	71
608	3904	3975	4046	4118	4189	4261	4332	4403	4475	4546	71
609	4617	4689	4760	4831	4902	4974	5045	5116	5187	5259	71
610	785330	5401	5472	5543	5615	5686	5757	5828	5899	5970	71
611	6041	6112	6183	6254	6325	6396	6467	6538	6609	6680	71
612	6751	6822	6893	6964	7035	7106	7177	7248	7319	7390	71
613	7460	7531	7602	7673	7744	7815	7885	7956	8027	8098	71
614	8168	8239	8310	8381	8451	8522	8593	8663	8734	8804	71
615	8875	8946	9016	9087	9157	9228	9299	9369	9440	9510	71
616	9581	9651	9722	9792	9863	9933	...4	..74	.144	.215	70
617	790285	0356	0426	0496	0567	0637	0707	0778	0848	0918	70
618	0988	1059	1129	1199	1269	1340	1410	1480	1550	1620	70
619	1691	1761	1831	1901	1971	2041	2111	2181	2252	2322	70
620	792392	2462	2532	2602	2672	2742	2812	2882	2952	3022	70
621	3092	3162	3231	3301	3371	3441	3511	3581	3651	3721	70
622	3790	3860	3930	4000	4070	4139	4209	4279	4349	4418	70
623	4488	4558	4627	4697	4767	4836	4906	4976	5045	5115	70
624	5185	5254	5324	5393	5463	5532	5602	5672	5741	5811	70
625	5880	5949	6019	6088	6158	6227	6297	6366	6436	6505	69
626	6574	6644	6713	6782	6852	6921	6990	7060	7129	7198	69
627	7268	7337	7406	7475	7545	7614	7683	7752	7821	7890	69
628	7960	8029	8098	8167	8236	8305	8374	8443	8513	8582	69
629	8651	8720	8789	8858	8927	8996	9065	9134	9203	9272	69
630	799341	9409	9478	9547	9616	9685	9754	9823	9892	9961	69
631	800029	0098	0167	0236	0305	0373	0442	0511	0580	0648	69
632	0717	0786	0854	0923	0992	1061	1129	1198	1266	1335	69
633	1404	1472	1541	1609	1678	1747	1815	1884	1952	2021	69
634	2089	2158	2226	2295	2363	2432	2500	2568	2637	2705	69
635	2774	2842	2910	2979	3047	3116	3184	3252	3321	3389	68
636	3457	3525	3594	3662	3730	3798	3867	3935	4003	4071	68
637	4139	4208	4276	4344	4412	4480	4548	4616	4685	4753	68
638	4821	4889	4957	5025	5093	5161	5229	5297	5365	5433	68
639	5501	5569	5637	5705	5773	5841	5908	5976	6044	6112	68
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
640	806180	6248	6316	6384	6451	6519	6587	6655	6723	6790	68
641	6858	6926	6994	7061	7129	7197	7264	7332	7400	7467	68
642	7535	7603	7670	7738	7806	7873	7941	8008	8076	8143	68
643	8211	8279	8346	8414	8481	8549	8616	8684	8751	8818	67
644	8886	8953	9021	9088	9156	9223	9290	9358	9425	9492	67
645	9560	9627	9694	9762	9829	9896	9964	..31	..98	.165	67
646	810233	0300	0367	0434	0501	0569	0636	0703	0770	0837	67
647	0904	0971	1039	1106	1173	1240	1307	1374	1441	1508	67
648	1575	1642	1709	1776	1843	1910	1977	2044	2111	2178	67
649	2245	2312	2379	2445	2512	2579	2646	2713	2780	2847	67
650	812913	2980	3047	3114	3181	3247	3314	3381	3448	3514	67
651	3581	3648	3714	3781	3848	3914	3981	4048	4114	4181	67
652	4248	4314	4381	4447	4514	4581	4647	4714	4780	4847	67
653	4913	4980	5046	5113	5179	5246	5312	5378	5445	5511	66
654	5578	5644	5711	5777	5843	5910	5976	6042	6109	6175	66
655	6241	6308	6374	6440	6506	6573	6639	6705	6771	6838	66
656	6904	6970	7036	7102	7169	7235	7301	73[illegible]	7433	7499	66
657	7565	7631	7698	7764	7830	7896	7962	8028	8094	8160	66
658	8226	8292	8358	8424	8490	8556	8622	8688	8754	8820	66
659	8885	8951	9017	9083	9149	9215	9281	9346	9412	9478	66
660	819544	9610	9676	9741	9807	9873	9939	...4	..70	.136	66
661	820201	0267	0333	0399	0464	0530	0595	0661	0727	0792	66
662	0858	0924	0989	1055	1120	1186	1251	1317	1382	1448	66
663	1514	1579	1645	1710	1775	1841	1906	1972	2037	2103	65
664	2168	2233	2299	2364	2430	2495	2560	2626	2691	2756	65
665	2822	2887	2952	3018	3083	3148	3213	3279	3344	3409	65
666	3474	3539	3605	3670	3735	3800	3865	3930	3996	4061	65
667	4126	4191	4256	4321	4386	4451	4516	4581	4646	4711	65
668	4776	4841	4906	4971	5036	5101	5166	5231	5296	5361	65
669	5426	5491	5556	5621	5686	5751	5815	5880	5945	6010	65
670	826075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658	65
671	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305	65
672	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951	65
673	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595	64
674	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239	64
675	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882	64
676	9947	..11	..75	.139	.204	.268	.332	.396	.460	.525	64
677	830589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166	64
678	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806	64
679	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445	64
680	832509	2573	2637	2700	2764	2828	2892	2956	3020	3083	64
681	3147	3211	3275	3338	3402	3466	3530	3593	3657	3721	64
682	3784	3848	3912	3975	4039	4103	4166	4230	4294	4357	64
683	4421	4484	4548	4611	4675	4739	4802	4866	4929	4993	64
684	5056	5120	5183	5247	5310	5373	5437	5500	5564	5627	63
685	5691	5754	5817	5881	5944	6007	6071	6134	6197	6261	63
686	6324	6387	6451	6514	6577	6641	6704	6767	6830	6894	63
687	6957	7020	7083	7146	7210	7273	7336	7399	7462	7525	63
688	7588	7652	7715	7778	7841	7904	7967	8030	8093	8156	63
689	8219	8282	8345	8408	8471	8534	8597	8660	8723	8786	63
690	838849	8912	8975	9038	9101	9164	9227	9289	9352	9415	63
691	9478	9541	9604	9667	9729	9792	9855	9918	9981	..43	63
692	840106	0169	0232	0294	0357	0420	0482	0545	0608	0671	63
693	0733	0796	0859	0921	0984	1046	1109	1172	1234	1297	63
694	1359	1422	1485	1547	1610	1672	1735	1797	1860	1922	63
695	1985	2047	2110	2172	2235	2297	2360	2422	2484	2547	62
696	2609	2672	2734	2796	2859	2921	2983	3046	3108	3170	62
697	3233	3295	3357	3420	3482	3544	3606	3669	3731	3793	62
698	3855	3918	3980	4042	4104	4166	4229	4291	4353	4415	62
699	4477	4539	4601	4664	4726	4788	4850	4912	4974	5036	62
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
700	845098	5160	5222	5284	5346	5408	5470	5532	5594	5656	62
701	5718	5780	5842	5904	5966	6028	6090	6151	6213	6275	62
702	6337	6399	6461	6523	6585	6646	6708	6770	6832	6894	62
703	6955	7017	7079	7141	7202	7264	7326	7388	7449	7511	62
704	7573	7634	7696	7758	7819	7881	7943	8004	8066	8128	62
705	8189	8251	8312	8374	8435	8497	8559	8620	8682	8743	62
706	8805	8866	8928	8989	9051	9112	9174	9235	9297	9358	61
707	9419	9481	9542	9604	9665	9726	9788	9849	9911	9972	61
708	850033	0095	0156	0217	0279	0340	0401	0462	0524	0585	61
709	0646	0707	0769	0830	0891	0952	1014	1075	1136	1197	61
710	851258	1320	1381	1442	1503	1564	1625	1686	1747	1809	61
711	1870	1931	1992	2053	2114	2175	2236	2297	2358	2419	61
712	2480	2541	2602	2663	2724	2785	2846	2907	2968	3029	61
713	3090	3150	3211	3272	3333	3394	3455	3516	3577	3637	61
714	3698	3759	3820	3881	3941	4002	4063	4124	4185	4245	61
715	4306	4367	4428	4488	4549	4610	4670	4731	4792	4852	61
716	4913	4974	5034	5095	5156	5216	5277	5337	5398	5459	61
717	5519	5580	5640	5701	5761	5822	5882	5943	6003	6064	61
718	6124	6185	6245	6306	6366	6427	6487	6548	6608	6668	60
719	6729	6789	6850	6910	6970	7031	7091	7152	7212	7272	60
720	857332	7393	7453	7513	7574	7634	7694	7755	7815	7875	60
721	7935	7995	8056	8116	8176	8236	8297	8357	8417	8477	60
722	8537	8597	8657	8718	8778	8838	8898	8958	9018	9078	60
723	9138	9198	9258	9318	9379	9439	9499	9559	9619	9679	60
724	9739	9799	9859	9918	9978	..38	..98	.158	.218	.278	60
725	860338	0398	0458	0518	0578	0637	0697	0757	0817	0877	60
726	0937	0996	1056	1116	1176	1236	1295	1355	1415	1475	60
727	1534	1594	1654	1714	1773	1833	1893	1952	2012	2072	60
728	2131	2191	2251	2310	2370	2430	2489	2549	2608	2668	60
729	2728	2787	2847	2906	2966	3025	3085	3144	3204	3263	60
730	863323	3382	3442	3501	3561	3620	3679	3739	3799	3858	59
731	3917	3977	4036	4096	4155	4214	4274	4333	4392	4452	59
732	4511	4570	4630	4689	4748	4808	4867	4926	4985	5045	59
733	5104	5163	5222	5282	5341	5400	5459	5519	5578	5637	59
734	5696	5755	5814	5874	5933	5992	6051	6110	6169	6228	59
735	6287	6346	6405	6465	6524	6583	6642	6701	6760	6819	59
736	6878	6937	6996	7055	7114	7173	7232	7291	7350	7409	59
737	7467	7526	7585	7644	7703	7762	7821	7880	7939	7998	59
738	8056	8115	8174	8233	8292	8350	8409	8468	8527	8586	59
739	8644	8703	8762	8821	8879	8938	8997	9056	9114	9173	59
740	869232	9290	9349	9408	9466	9525	9584	9642	9701	9760	59
741	9818	9877	9935	9994	..53	.111	.170	.228	.287	.345	59
742	870404	0462	0521	0579	0638	0696	0755	0813	0872	0930	58
743	0989	1047	1106	1164	1223	1281	1339	1398	1456	1515	58
744	1573	1631	1690	1748	1806	1865	1923	1981	2040	2098	58
745	2156	2215	2273	2331	2389	2448	2506	2564	2622	2681	58
746	2739	2797	2855	2913	2972	3030	3088	3146	3204	3262	58
747	3321	3379	3437	3495	3553	3611	3669	3727	3785	3844	58
748	3902	3960	4018	4076	4134	4192	4250	4308	4366	4424	58
749	4482	4540	4598	4656	4714	4772	4830	4888	4945	5003	58
750	875061	5119	5177	5235	5293	5351	5409	5466	5524	5582	58
751	5640	5698	5756	5813	5871	5929	5987	6045	6102	6160	58
752	6218	6276	6333	6391	6449	6507	6564	6622	6680	6737	58
753	6795	6853	6910	6968	7026	7083	7141	7199	7256	7314	58
754	7371	7429	7487	7544	7602	7659	7717	7774	7832	7889	58
755	7947	8004	8062	8119	8177	8234	8292	8349	8407	8464	57
756	8522	8579	8637	8694	8752	8809	8866	8924	8981	9039	57
757	9096	9153	9211	9268	9325	9383	9440	9497	9555	9612	57
758	9669	9726	9784	9841	9898	9956	..13	..70	.127	.185	57
759	880242	0299	0356	0413	0471	0528	0585	0642	0699	0756	57
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
760	880814	0871	0928	0985	1042	1099	1156	1213	1271	1328	57
761	1385	1442	1499	1556	1613	1670	1727	1784	1841	1898	57
762	1955	2012	2069	2126	2183	2240	2297	2354	2411	2468	57
763	2525	2581	2638	2695	2752	2809	2866	2923	2980	3037	57
764	3093	3150	3207	3264	3321	3377	3434	3491	3548	3605	57
765	3661	3718	3775	3832	3888	3945	4002	4059	4115	4172	57
766	4229	4285	4342	4399	4455	4512	4569	4625	4682	4739	57
767	4795	4852	4909	4965	5022	5078	5135	5192	5248	5305	57
768	5361	5418	5474	5531	5587	5644	5700	5757	5813	5870	57
769	5926	5983	6039	6096	6152	6209	6265	6321	6378	6434	56
770	886491	6547	6604	6660	6716	6773	6829	6885	6942	6998	56
771	7054	7111	7167	7223	7280	7336	7392	7449	7505	7561	56
772	7617	7674	7730	7786	7842	7898	7955	8011	8067	8123	56
773	8179	8236	8292	8348	8404	8460	8516	8573	8629	8685	56
774	8741	8797	8853	8909	8965	9021	9077	9134	9190	9246	56
775	9302	9358	9414	9470	9526	9582	9638	9694	9750	9806	56
776	9862	9918	9974	..30	..86	.141	.197	.253	.309	.365	56
777	890421	0477	0533	0589	0645	0700	0756	0812	0868	0924	56
778	0980	1035	1091	1147	1203	1259	1314	1370	1426	1482	56
779	1537	1593	1649	1705	1760	1816	1872	1928	1983	2039	56
780	892095	2150	2206	2262	2317	2373	2429	2484	2540	2595	56
781	2651	2707	2762	2818	2873	2929	2985	3040	3096	3151	56
782	3207	3262	3318	3373	3429	3484	3540	3595	3651	3706	56
783	3762	3817	3873	3928	3984	4039	4094	4150	4205	4261	55
784	4316	4371	4427	4482	4538	4593	4648	4704	4759	4814	55
785	4870	4925	4980	5036	5091	5146	5201	5257	5312	5367	55
786	5423	5478	5533	5588	5644	5699	5754	5809	5864	5920	55
787	5975	6030	6085	6140	6195	6251	6306	6361	6416	6471	55
788	6526	6581	6636	6692	6747	6802	6857	6912	6967	7022	55
789	7077	7132	7187	7242	7297	7352	7407	7462	7517	7572	55
790	897627	7682	7737	7792	7847	7902	7957	8012	8067	8122	55
791	8176	8231	8286	8341	8396	8451	8506	8561	8615	8670	55
792	8725	8780	8835	8890	8944	8999	9054	9109	9164	9218	55
793	9273	9328	9383	9437	9492	9547	9602	9656	9711	9766	55
794	9821	9875	9930	9985	..39	..94	.149	.203	.258	.312	55
795	900367	0422	0476	0531	0586	0640	0695	0749	0804	0859	55
796	0913	0968	1022	1077	1131	1186	1240	1295	1349	1404	55
797	1458	1513	1567	1622	1676	1731	1785	1840	1894	1948	54
798	2003	2057	2112	2166	2221	2275	2329	2384	2438	2492	51
799	2547	2601	2655	2710	2764	2818	2873	2927	2981	3036	54
800	903090	3144	3199	3253	3307	3361	3416	3470	3524	3578	54
801	3633	3687	3741	3795	3849	3904	3958	4012	4066	4120	54
802	4174	4229	4283	4337	4391	4445	4499	4553	4607	4661	54
803	4716	4770	4824	4878	4932	4986	5040	5094	5148	5202	54
804	5256	5310	5364	5418	5472	5526	5580	5634	5688	5742	54
805	5796	5850	5904	5958	6012	6066	6119	6173	6227	6281	54
806	6335	6389	6443	6497	6551	6604	6658	6712	6766	6820	54
807	6874	6927	6981	7035	7089	7143	7196	7250	7304	7358	54
808	7411	7465	7519	7573	7626	7680	7734	7787	7841	7895	54
809	7949	8002	8056	8110	8163	8217	8270	8324	8378	8431	54
810	908485	8539	8592	8646	8699	8753	8807	8860	8914	8967	54
811	9021	9074	9128	9181	9235	9289	9342	9396	9449	9503	54
812	9556	9610	9663	9716	9770	9823	9877	9930	9984	..37	53
813	910091	0144	0197	0251	0304	0358	0411	0464	0518	0571	53
814	0624	0678	0731	0784	0838	0891	0944	0998	1051	1104	53
815	1158	1211	1264	1317	1371	1424	1477	1530	1584	1637	53
816	1690	1743	1797	1850	1903	1956	2009	2063	2116	2169	53
817	2222	2275	2328	2381	2435	2488	2541	2594	2647	2700	53
818	2753	2806	2859	2913	2966	3019	3072	3125	3178	3231	53
819	3284	3337	3390	3443	3496	3549	3602	3655	3708	3761	53
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
820	913814	3867	3920	3973	4026	4079	4132	4184	4237	4290	53
821	4343	4396	4449	4502	4555	4608	4660	4713	4766	4819	53
822	4872	4925	4977	5030	5083	5136	5189	5241	5294	5347	53
823	5400	5453	5505	5558	5611	5664	5716	5769	5822	5875	53
824	5927	5980	6033	6085	6138	6191	6243	6296	6349	6401	53
825	6454	6507	6559	6612	6664	6717	6770	6822	6875	6927	53
826	6980	7033	7085	7138	7190	7243	7295	7348	7400	7453	53
827	7506	7558	7611	7663	7716	7768	7820	7873	7925	7978	52
828	8030	8083	8135	8188	8240	8293	8345	8397	8450	8502	52
829	8555	8607	8659	8712	8764	8816	8869	8921	8973	9026	52
830	919078	9130	9183	9235	9287	9340	9392	9444	9496	9549	52
831	9601	9653	9706	9758	9810	9862	9914	9967	..19	..71	52
832	920123	0176	0228	0280	0332	0384	0436	0489	0541	0593	52
833	0645	0697	9749	0801	0853	0906	0958	1010	1062	1114	52
834	1166	1218	1270	1322	1374	1426	1478	1530	1582	1634	52
835	1686	1738	1790	1842	1894	1946	1998	2050	2102	2154	52
836	2206	2258	2310	2362	2414	2466	2518	2570	2622	2674	52
837	2725	2777	2829	2881	2933	2985	3037	3089	3140	3192	52
838	3244	3296	3348	3399	3451	3503	3555	3607	3658	3710	52
839	3762	3814	3865	3917	3969	4021	4072	4124	4176	4228	52
840	924279	4331	4383	4434	4486	4538	4589	4641	4693	4744	52
841	4796	4848	4899	4951	5003	5054	5106	5157	5209	5261	52
842	5312	5364	5415	5467	5518	5570	5621	5673	5725	5776	52
843	5828	5879	5931	5982	6034	6085	6137	6188	6240	6291	51
844	6342	6394	6445	6497	6548	6600	6651	6702	6754	6805	51
845	6857	6908	6959	7011	7062	7114	7165	7216	7268	7319	51
846	7370	7422	7473	7524	7576	7627	7678	7730	7781	7832	51
847	7883	7935	7986	8037	8088	8140	8191	8242	8293	8345	51
848	8396	8447	8498	8549	8601	8652	8703	8754	8805	8857	51
849	8908	8959	9010	9061	9112	9163	9215	9266	9317	9368	51
850	929419	9470	9521	9572	9623	9674	9725	9776	9827	9879	51
851	9930	9981	..32	..83	.134	.185	.236	.287	.338	.389	51
852	930440	0491	0542	0592	0643	0694	0745	0796	0847	0898	51
853	0949	1000	1051	1102	1153	1204	1254	1305	1356	1407	51
854	1458	1509	1560	1610	1661	1712	1763	1814	1865	1915	51
855	1966	2017	2068	2118	2169	2220	2271	2322	2372	2423	51
856	2474	2524	2575	2626	2677	2727	2778	2829	2879	2930	51
857	2981	3031	3082	3133	3183	3234	3285	3335	3386	3437	51
858	3487	3538	3589	3639	3690	3740	3791	3841	3892	3943	51
859	3993	4044	4094	4145	4195	4246	4296	4347	4397	4448	51
860	934498	4549	4599	4650	4700	4751	4801	4852	4902	4953	50
861	5003	5054	5104	5154	5205	5255	5306	5356	5406	5457	50
862	5507	5558	5608	5658	5709	5759	5809	5860	5910	5960	50
863	6011	6061	6111	6162	6212	6262	6313	6363	6413	6463	50
864	6514	6564	6614	6665	6715	6765	6815	6865	6916	6966	50
865	7016	7066	7117	7167	7217	7267	7317	7367	7418	7468	50
866	7518	7568	7618	7668	7718	7769	7819	7869	7919	7969	50
867	8019	8069	8119	8169	8219	8269	8320	8370	8420	8470	50
868	8520	8570	8620	8670	8720	8770	8820	8870	8920	8970	50
869	9020	9070	9120	9170	9220	9270	9320	9369	9419	9469	50
870	939519	9569	9619	9669	9719	9769	9819	9869	9918	9968	50
871	940018	0068	0118	0168	0218	0267	0317	0367	0417	0467	50
872	0516	0566	0616	0666	0716	0765	0815	0865	0915	0964	50
873	1014	1064	1114	1163	1213	1263	1313	1362	1412	1462	50
874	1511	1561	1611	1660	1710	1760	1809	1859	1909	1958	50
875	2008	2058	2107	2157	2207	2256	2306	2355	2405	2455	50
876	2504	2554	2603	2653	2702	2752	2801	2851	2901	2950	50
877	3000	3049	3099	3148	3198	3247	3297	3346	3396	3445	49
878	3495	3544	3593	3643	3692	3742	3791	3841	3890	3939	49
879	3989	4038	4088	4137	4186	4236	4285	4335	4334	4433	49
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
880	944483	4532	4581	4631	4680	4729	4779	4828	4877	4927	49
881	4976	5025	5074	5124	5173	5222	5272	5321	5370	5419	49
882	5469	5518	5567	5616	5665	5715	5764	5813	5862	5912	49
883	5961	6010	6059	6108	6157	6207	6256	6305	6354	6403	19
884	6452	6501	6551	6600	6649	6698	6747	6796	6845	6894	49
885	6943	6992	7041	7090	7140	7189	7238	7287	7336	7385	49
886	7434	7483	7532	7581	7630	7679	7728	7777	7826	7875	49
887	7924	7973	8022	8070	8119	8168	8217	8266	8315	8364	49
888	8413	8462	8511	8560	8609	8657	8706	8755	8804	8853	49
889	8902	8951	8999	9048	9097	9146	9195	9244	9292	9341	49
890	949390	9439	9488	9536	9585	9634	9683	9731	9780	9829	49
891	9878	9926	9975	..24	..73	.121	.170	.219	.267	.316	49
892	950365	0414	0462	0511	0560	0608	0657	0706	0754	0803	49
893	0851	0900	0949	0997	1046	1095	1143	1192	1240	1289	49
894	1338	1386	1435	1483	1532	1580	1629	1677	1726	1775	49
895	1823	1872	1920	1969	2017	2066	2114	2163	2211	2260	48
896	2308	2356	2405	2453	2502	2550	2599	2647	2696	2744	48
897	2792	2841	2889	2938	2986	3034	3083	3131	3180	3228	48
898	3276	3325	3373	3421	3470	3518	3566	3615	3663	3711	48
899	3760	3808	3856	3905	3953	4001	4049	4098	4146	4194	48
900	954243	4291	4339	4387	4435	4484	4532	4580	4628	4677	48
901	4725	4773	4821	4869	4918	4966	5014	5062	5110	5158	48
902	5207	5255	5303	5351	5399	5447	5495	5543	5592	5640	48
903	5688	5736	5784	5832	5880	5928	5976	6024	6072	6120	48
904	6168	6216	6265	6313	6361	6409	6457	6505	6553	6601	48
905	6649	6697	6745	6793	6840	6888	6936	6984	7032	7080	48
906	7128	7176	7224	7272	7320	7368	7416	7464	7512	7559	48
907	7607	7655	7703	7751	7799	78 7	7894	7942	7990	8038	48
908	8086	8134	8181	8229	8277	83 5	8373	8421	8468	8516	48
909	8564	8612	8659	8707	8755	88 3	8850	8898	8946	8994	48
910	959041	9089	9137	9185	9232	9280	9328	9375	9423	9471	48
911	9518	9566	9614	9661	9709	9757	9804	9852	9900	9947	48
912	9995	..42	..90	.138	.185	.233	.280	.328	.376	.423	48
913	960474	0518	0566	0613	0661	0709	0756	0804	0851	0899	48
914	0946	0994	1041	1089	1136	1184	1231	1279	1326	1374	47
915	1421	1469	1516	1563	1611	1658	1706	1753	1801	1848	47
916	1895	1943	1990	2038	2085	2132	2180	2227	2275	2322	47
917	2369	2417	2464	2511	2559	2606	2653	2701	2748	2795	47
918	2843	2890	2937	2985	3032	3079	3126	3174	3221	3268	47
919	3316	3363	3410	3457	3504	3552	3599	3646	3693	3741	47
920	963788	3835	3882	3929	3977	4024	4071	4118	4165	4212	47
921	4260	4307	4354	4401	4448	4495	4542	4590	4637	4684	47
922	4731	4778	4825	4872	4919	4966	5013	5061	5108	5155	47
923	5202	5249	5296	5343	5390	5437	5484	5531	5578	5625	47
924	5672	5719	5766	5813	5860	5907	5954	6001	6048	6095	47
925	6142	6189	6236	6283	6329	6376	6423	6470	6517	6564	47
926	6611	6658	6705	6752	6799	6845	6892	6939	6986	7033	47
927	7080	7127	7173	7220	7267	7314	7361	7408	7454	7501	47
928	7548	7595	7642	7688	7735	7782	7829	7875	7922	7969	47
929	8016	8062	8109	8156	8203	8249	8296	8343	8390	8436	47
930	968483	8530	8576	8623	8670	8716	8763	8810	8856	8903	47
931	8950	8996	9043	9090	9136	9183	9229	9276	9323	9369	47
932	9416	9463	9509	9556	9602	9649	9695	9742	9789	9835	47
933	9882	9928	9975	..21	..68	.114	.161	.207	.254	.300	47
934	970347	0393	0440	0486	0533	0579	0626	0672	0719	0765	46
935	0812	0858	0904	0951	0997	1044	1090	1137	1183	1229	46
936	1276	1322	1369	1415	1461	1508	1554	1601	1647	1693	46
937	1740	1786	1332	1879	1925	1971	2018	2064	2110	2157	46
938	2203	2249	2295	2342	2388	2434	2481	2527	2573	2619	46
939	2666	2712	2758	2804	2851	2897	2943	2989	3035	3082	46
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
940	973128	3174	3220	3266	3313	3359	3405	3451	3497	3543	46
941	3590	3636	3682	3728	3774	3820	3866	3913	3959	4005	46
942	4051	4097	4143	4189	4235	4281	4327	4374	4420	4466	46
943	4512	4558	4604	4650	4696	4742	4788	4834	4880	4926	46
944	4972	5018	5064	5110	5156	5202	5248	5294	5340	5386	46
945	5432	5478	5524	5570	5616	5662	5707	5753	5799	5845	46
946	5891	5937	5983	6029	6075	6121	6167	6212	6258	6304	46
947	6350	6396	6442	6488	6533	6579	6625	6671	6717	6763	46
948	6808	6854	6900	6946	6992	7037	7083	7129	7175	7220	46
949	7266	7312	7358	7403	7449	7495	7541	7586	7632	7678	46
950	977724	7769	7815	7861	7906	7952	7998	8043	8089	8135	46
951	8181	8226	8272	8317	8363	8409	8454	8500	8546	8591	46
952	8637	8683	8728	8774	8819	8865	8911	8956	9002	9047	46
953	9093	9138	9184	9230	9275	9321	9366	9412	9457	9503	46
954	9548	9594	9639	9685	9730	9776	9821	9867	9912	9958	46
955	980003	0049	0094	0140	0185	0231	0276	0322	0367	0412	45
956	0458	0503	0549	0594	0640	0685	0730	0776	0821	0867	45
957	0912	0957	1003	1048	1093	1139	1184	1229	1275	1320	45
958	1366	1411	1456	1501	1547	1592	1637	1683	1728	1773	45
959	1819	1864	1909	1954	2000	2045	2090	2135	2181	2226	45
960	982271	2316	2362	2407	2452	2497	2543	2588	2633	2678	45
961	2723	2769	2814	2859	2904	2949	2994	3040	3085	3130	45
962	3175	3220	3265	3310	3356	3401	3446	3491	3536	3581	45
963	3626	3671	3716	3762	3807	3852	3897	3942	3987	4032	45
964	4077	4122	4167	4212	4257	4302	4347	4392	4437	4482	45
965	4527	4572	4617	4662	4707	4752	4797	4842	4887	4932	45
966	4977	5022	5067	5112	5157	5202	5247	5292	5337	5382	45
967	5426	5471	5516	5561	5606	5651	5696	5741	5786	5830	45
968	5875	5920	5965	6010	6055	6100	6144	6189	6234	6279	45
969	6324	6369	6413	6458	6503	6548	6593	6637	6682	6727	45
970	986772	6817	6861	6906	6951	6996	7040	7085	7130	7175	45
971	7219	7264	7309	7353	7398	7443	7488	7532	7577	7622	45
972	7666	7711	7756	7800	7845	7890	7934	7979	8024	8068	45
973	8113	8157	8202	8247	8291	8336	8381	8425	8470	8514	45
974	8559	8604	8648	8693	8737	8782	8826	8871	8916	8960	45
975	9005	9049	9094	9138	9183	9227	9272	9316	9361	9405	45
976	9450	9494	9539	9583	9628	9672	9717	9761	9806	9850	44
977	9895	9939	9983	..28	..72	.117	.161	.206	.250	.294	44
978	990339	0383	0428	0472	0516	0561	0605	0650	0694	0738	44
979	0783	0827	0871	0916	0960	1004	1049	1093	1137	1182	44
980	991226	1270	1315	1359	1403	1448	1492	1536	1580	1625	44
981	1669	1713	1758	1802	1846	1890	1935	1979	2023	2067	44
982	2111	2156	2200	2244	2288	2333	2377	2421	2465	2509	44
983	2554	2598	2642	2686	2730	2774	2819	2863	2907	2951	44
984	2995	3039	3083	3127	3172	3216	3260	3304	3348	3392	44
985	3436	3480	3524	3568	3613	3657	3701	3745	3789	3833	44
986	3877	3921	3965	4009	4053	4097	4141	4185	4229	4273	44
987	4317	4361	4405	4449	4493	4537	4581	4625	4669	4713	44
988	4757	4801	4845	4889	4933	4977	5021	5065	5108	5152	44
989	5196	5240	5284	5328	5372	5416	5460	5504	5547	5591	44
990	995635	5679	5723	5767	5811	5854	5898	5942	5986	6030	44
991	6074	6117	6161	6205	6249	6293	6337	6380	6424	6468	44
992	6512	6555	6599	6643	6687	6731	6774	6818	6862	6906	44
993	6949	6993	7037	7080	7124	7168	7212	7255	7299	7343	44
994	7386	7430	7474	7517	7561	7605	7648	7692	7736	7779	44
995	7823	7867	7910	7954	7998	8041	8085	8129	8172	8216	44
996	8259	8303	8347	8390	8434	8477	8521	8564	8608	8652	44
997	8695	8739	8782	8826	8869	8913	8956	9000	9043	9087	44
998	9131	9174	9218	9261	9305	9348	9392	9435	9479	9522	44
999	9565	9609	9652	9696	9739	9783	9826	9870	9913	9957	43
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

TABLE

DE

SINUS ET TANGENTES

LOGARITHMIQUES

POUR CHAQUE

DEGRÉ ET MINUTE

DU QUART-DE-CERCLE.

N. B.—Les minutes dans la colonne de gauche de chaque page, lesquelles croissent de haut en bas, appartiennent aux dégrés que l'on trouve au haut de la page, et les minutes qui croissent de bas en haut, dans la colonne de droite, appartiennent aux dégrés qui se trouvent au bas de la page.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	0.000000		10.000000		0.000000		Infinie.	60
1	6.463726	501717	000000	00	6.463726	501717	13.536274	59
2	764756	293485	000000	00	764756	293483	235244	58
3	940847	208231	000000	00	940847	208231	059153	57
4	7.065786	161517	000000	00	7.065786	161517	12.934214	56
5	162696	131968	000000	00	162696	131969	837304	55
6	241877	111575	9.999999	01	241878	111578	758122	54
7	308824	96653	999999	01	308825	99653	691175	53
8	366816	85254	999999	01	366817	85254	633183	52
9	417968	76263	999999	01	417970	76263	582030	51
10	463725	68988	999998	01	463727	68988	536273	50
11	7.505118	62981	9.999998	01	7.505120	62981	12.494880	49
12	542906	57936	999997	01	542909	57933	457091	48
13	577668	53641	999997	01	577672	53642	422328	47
14	609853	49938	999996	01	609857	49939	390143	46
15	639816	46714	999996	01	639820	46715	360180	45
16	667845	43881	999995	01	667849	43882	332151	44
17	694173	41372	999995	01	694179	41373	305821	43
18	718997	39135	999994	01	719003	39136	280997	42
19	742477	37127	999993	01	742484	37128	257516	41
20	764754	35315	999993	01	764761	35136	235239	40
21	7.785943	33672	9.999992	01	7.785951	33673	12.214049	39
22	806146	32175	999991	01	806155	32176	193845	38
23	825451	30805	999990	01	825460	30806	174540	37
24	843934	29547	999989	02	843944	29549	156056	36
25	861662	28388	999988	02	861674	28390	138326	35
26	878695	27317	999988	02	878708	27318	121292	34
27	895085	26323	999987	02	895099	26325	104901	33
28	910879	25399	999986	02	910894	25401	089106	32
29	926119	24538	999985	02	926134	24540	073866	31
30	940842	23733	999983	02	940858	23735	059142	30
31	7.955082	22980	9.999982	02	7.955100	22981	12.044900	29
32	968870	22273	999981	02	968889	22275	031111	28
33	982233	21608	999980	02	982253	21610	017747	27
34	995198	20981	999979	02	995219	20983	004781	26
35	8.007787	20390	999977	02	8.007809	20392	11.992191	25
36	020021	19831	999976	02	020045	19833	979955	24
37	031919	19302	999975	02	031945	19305	968055	23
38	043501	18801	999973	02	043527	18803	956473	22
39	054781	18325	999972	02	054809	18327	945191	21
40	065776	17872	999971	02	065806	17874	934194	20
41	8.076500	17441	9.999969	02	8.076531	17444	11.923469	19
42	086965	17031	999968	02	086997	17034	913003	18
43	097183	16639	999966	02	097217	16642	902783	17
44	107167	16265	999964	03	107202	16268	892797	16
45	116926	15908	999963	03	116963	15910	883037	15
46	126471	15566	999961	03	126510	15568	873490	14
47	135810	15238	999959	03	135851	15241	864149	13
48	144953	14924	999958	03	144996	14927	855004	12
49	153907	14622	999956	03	153952	14627	846048	11
50	162681	14333	999954	03	162727	14336	837273	10
51	8.171280	14054	9.999952	03	8.171328	14057	11.828672	9
52	179713	13786	999950	03	179763	13790	820237	8
53	187985	13529	999948	03	188036	13532	811964	7
54	196102	13280	999946	03	196156	13284	803844	6
55	204070	13041	999944	03	204126	13044	795874	5
56	211895	12810	999942	04	211953	12814	788047	4
57	219581	12587	999940	04	219641	12590	780359	3
58	227134	12372	999938	04	227195	12376	772805	2
59	234557	12164	999936	04	234621	12168	765379	1
60	241855	11963	999934	04	241921	11967	758079	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

89 Dégrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	8.241855	11963	9.999934	04	8.241921	11967	11.758079	60
1	249033	11768	999932	04	249102	11772	750898	59
2	256094	11580	999929	04	256165	11584	743835	58
3	263042	11398	999927	04	263115	11402	736885	57
4	269881	11221	999925	04	269956	11225	730044	56
5	276614	11050	999922	04	276691	11054	723309	55
6	283243	10883	999920	04	283323	10887	716677	54
7	289773	10721	999918	04	289856	10726	710144	53
8	296207	10565	999915	04	296292	10570	703708	52
9	302546	10413	999913	04	302634	10418	697366	51
10	308794	10266	999910	04	308884	10270	691116	50
11	8.314954	10122	9.999907	04	8.315046	10126	11.684954	49
12	321027	9982	999905	04	321122	9987	678878	48
13	327016	9847	999902	04	327114	9851	672886	47
14	332924	9714	999899	05	333025	9719	666975	46
15	338753	9586	999897	05	338856	9590	661144	45
16	344504	9460	999894	05	344610	9465	655390	44
17	350181	9338	999891	05	350289	[illegible]	649711	43
18	355783	9219	999888	05	355895	9224	644105	42
19	361315	9103	999885	05	361430	9108	638570	41
20	366777	8990	999882	05	366895	8995	633105	40
21	8.372171	8880	9.999879	05	8.372292	8885	11.627708	39
22	377499	8772	999876	05	377622	8777	622378	38
23	382762	8667	999873	05	382889	8672	617111	37
24	387962	8564	999870	05	388092	8570	611908	36
25	393101	8464	999867	05	393234	8470	606766	35
26	398179	8366	999864	05	398315	8371	601685	34
27	403199	8271	999861	05	403338	8276	596662	33
28	408161	8177	999858	05	408304	8182	591696	32
29	413068	8086	999854	05	413213	8091	586787	31
30	417919	7996	999851	06	418068	8002	581932	30
31	8.422717	7909	9.999848	06	8.422869	7914	11.577131	29
32	427462	7823	[illegible]	06	427618	7830	572382	28
33	432156	7740	999841	06	432315	7745	567685	27
34	436800	7657	999838	06	436962	7663	563038	26
35	441394	7577	999834	06	441560	7583	558440	25
36	445941	7499	999831	06	446110	7505	553890	24
37	450440	7422	999827	06	450613	7428	549387	23
38	454893	7346	999823	06	455070	7352	544930	22
39	459301	7273	999820	06	459481	7279	540519	21
40	463665	7200	999816	06	463849	7206	536151	20
41	8.467985	7129	9.999812	06	8.468172	7135	11.531828	19
42	472263	7060	999809	06	472454	7066	527546	18
43	476498	6991	999805	06	476693	6998	523307	17
44	480693	6924	999801	06	480892	6931	519108	16
45	484848	6859	999797	07	485050	6865	514950	15
46	488963	6794	999793	07	489170	6801	510830	14
47	493040	6731	999790	07	493250	6738	506750	13
48	497078	6669	999786	07	497293	6676	502707	12
49	501080	6608	999782	07	501298	6615	498702	11
50	505045	6548	999778	07	505267	6555	494733	10
51	8.508974	6489	9.999774	07	8.509200	6496	11.490800	9
52	512867	6431	999769	07	513098	6439	486902	8
53	516726	6375	999765	07	516961	6382	483039	7
54	520551	6319	999761	07	520790	6326	479210	6
55	524343	6264	999757	07	524586	6272	475414	5
56	528102	6211	999753	07	528349	6218	471651	4
57	531828	6158	999748	07	532080	6165	467920	3
58	535523	6106	999744	07	535779	6113	464221	2
59	539186	6055	999740	07	539447	6062	460553	1
60	542819	6004	999735	07	543084	6012	456916	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	8.542819	6004	9.999735	07	8.543084	6012	11.456916	60
1	546422	5955	999731	07	546691	5962	453309	59
2	549995	5906	999726	07	550268	5914	449732	58
3	553539	5858	999722	08	553817	5866	446183	57
4	557054	5811	999717	08	557336	5819	442664	56
5	560540	5765	999713	08	560828	5773	439172	55
6	563999	5719	999708	08	564291	5727	435709	54
7	567431	5674	999704	08	567727	5682	432273	53
8	570836	5630	999699	08	571137	5638	428863	52
9	574214	5587	999694	08	574520	5595	425480	51
10	577566	5544	999689	08	577877	5552	422123	50
11	8.580892	5502	9.999685	08	8.581208	5510	11.418792	49
12	584193	5460	999680	08	584514	5468	415486	48
13	587469	5419	999675	08	587795	5427	412205	47
14	590721	5379	999670	08	591051	5387	408949	46
15	593948	5339	999665	08	594283	5347	405717	45
16	597152	5300	999660	08	597492	5308	402508	44
17	600332	5261	999655	08	600677	5270	399323	43
18	603489	5223	999650	08	603839	5232	396161	42
19	606623	5186	999645	09	606978	5194	393022	41
20	609734	5149	999640	09	610094	5158	389906	40
21	8.612823	5112	9.999635	09	8.613189	5121	11.386811	39
22	615891	5076	999629	09	616262	5085	383738	38
23	618937	5041	999624	09	619313	5050	380687	37
24	6219[illegible]2	5006	999619	09	622343	5015	377657	36
25	624965	4972	999614	09	625352	4981	374648	35
26	627948	4938	999608	09	628340	4947	371660	34
27	630911	4904	999603	09	631308	4913	368692	33
28	633854	4871	999597	09	634256	4880	365744	32
29	636776	4839	999592	09	637184	4848	362616	31
30	639680	4806	999586	09	640093	4816	359907	30
31	8.642563	4775	9.999581	09	8.642982	4784	11.357018	29
32	645428	4743	999575	09	645853	4753	354147	28
33	648274	4712	999570	09	648704	4722	351296	27
34	651102	4682	999564	09	651537	4691	348463	26
35	653911	4652	999558	10	654352	4661	345648	25
36	656702	4622	999553	10	657149	4631	342851	24
37	659475	4592	999547	10	659928	4602	340072	23
38	662230	4563	999541	10	662689	4573	337311	22
39	664968	4535	999535	10	665433	4544	334567	21
40	667689	4506	999529	10	668160	4526	331840	20
41	8.670393	4479	9.999524	10	8.670870	4488	11.329130	19
42	673080	4451	999518	10	673563	4461	326437	18
43	675751	4424	999512	10	676239	4434	323761	17
44	678405	4397	999506	10	678900	4417	321100	16
45	681043	4370	999500	10	681544	4380	318456	15
46	683665	4344	999493	10	684172	4354	315828	14
47	686272	4318	999487	10	686784	4328	313216	13
48	688863	4292	999481	10	689381	4303	310619	12
49	691438	4267	999475	10	691963	4277	308037	11
50	693998	4242	999469	10	694529	4252	305471	10
51	8.696543	4217	9.999463	11	8.697081	4228	11.302919	9
52	699073	4192	999456	11	699617	4203	300383	8
53	701589	4168	999450	11	702139	4179	297861	7
54	704090	4144	999443	11	704646	4155	295354	6
55	706577	4121	999437	11	707140	4132	292860	5
56	709049	4097	999431	11	709618	4108	290382	4
57	711507	4074	999424	11	712083	4085	287917	3
58	713952	4051	999418	11	714534	4062	285465	2
59	716383	4029	999411	11	716972	4040	283028	1
60	718800	4006	999404	11	719396	4017	280604	0
	Cosinus		Sinus		Cotang		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	8.718800	4006	9.999404	11	8.719396	4017	11.280604	60
1	721204	3984	999398	11	721806	3995	278194	59
2	723595	3962	999391	11	724204	3974	275796	58
3	725972	3941	999384	11	726588	3952	273412	57
4	728337	3919	999378	11	728959	3930	271041	56
5	730688	3898	999371	11	731317	3909	268683	55
6	733027	3877	999364	12	733663	3889	266337	54
7	735354	3857	999357	12	735996	3868	264004	53
8	737667	3836	999350	12	738317	3848	261683	52
9	739969	3816	999343	12	740626	3827	259374	51
10	742259	3796	999336	12	742922	3807	257078	50
11	8.744536	3776	9.999329	12	8.745207	3787	11.254793	49
12	746802	3756	999322	12	747479	3768	252521	48
13	749055	3737	999315	12	749740	3749	250260	47
14	751297	3717	999308	12	751989	3729	248011	46
15	753528	3698	999301	12	754227	3710	245773	45
16	755747	3679	999294	12	756453	3692	243547	44
17	757955	3661	999286	12	758668	3673	241332	43
18	760151	3642	999279	12	760872	3655	239128	42
19	762337	3624	999272	12	763065	3636	236935	41
20	764511	3606	999265	12	765246	3618	234754	40
21	8.766675	3588	9.999257	12	8.767417	3600	11.232583	39
22	768828	3570	999250	13	769578	3583	230422	38
23	770970	3553	999242	13	771727	3565	228273	37
24	773101	3535	999235	13	773866	3548	226134	36
25	775223	3518	999227	13	775995	3531	224005	35
26	777333	3501	999220	13	778114	3514	221886	34
27	779434	3484	999212	13	780222	3497	219778	33
28	781524	3467	999205	13	782320	3480	217680	32
29	783605	3451	999197	13	784408	3464	215592	31
30	785675	3431	999189	13	786486	3447	213514	30
31	8.787736	3418	9.999181	13	8.788554	3431	11.211446	29
32	789787	3402	999174	13	790613	3414	209387	28
33	791828	3386	999166	13	792662	3399	207338	27
34	793859	3370	999158	13	794701	3383	205299	26
35	795881	3354	999150	13	796731	3368	203269	25
36	797894	3339	999142	13	798752	3352	201248	24
37	799897	3323	999134	13	800763	3337	199237	23
38	801892	3308	999126	13	802765	3322	197235	22
39	803876	3293	999118	13	804758	3307	195242	21
40	805852	3278	999110	13	806742	3292	193258	20
41	8.807819	3263	9.999102	13	8.808717	3278	11.191283	19
42	809777	3249	999094	14	810683	3262	189317	18
43	811726	3234	999086	14	812641	3248	187359	17
44	813667	3219	999077	14	814589	3233	185411	16
45	815599	3205	999069	14	816529	3219	183471	15
46	817522	3191	999061	14	818461	3205	181539	14
47	819436	3177	999053	14	820384	3191	179616	13
48	821343	3163	999044	14	822298	3177	177702	12
49	823240	3149	999036	14	824205	3163	175795	11
50	825130	3135	999027	14	826103	3150	173897	10
51	8.827011	3122	9.999019	14	8.827992	3136	11.172008	9
52	828884	3108	999010	14	829874	3123	170126	8
53	830749	3095	999002	14	831748	3110	168252	7
54	832607	3082	998993	14	833613	3096	166387	6
55	834456	3069	998984	14	835471	3083	164529	5
56	836297	3056	998976	14	837321	3070	162679	4
57	838130	3043	998967	15	839163	3057	160837	3
58	839956	3030	998958	15	840998	3045	159002	2
59	841774	3017	998950	15	842825	3032	157175	1
60	843585	3000	998941	15	844644	3019	155356	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

86 Dégrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	8.843585	3005	9.998941	15	8.844644	3019	11.155356	60
1	845387	2992	998932	15	846455	3007	153545	59
2	847183	2980	998923	15	848260	2995	151740	58
3	848971	2967	998914	15	850057	2982	149943	57
4	850751	2955	998905	15	851846	2970	148154	56
5	852525	2943	998896	15	853628	2958	146372	55
6	854291	2931	998887	15	855403	2946	144597	54
7	856049	2919	998878	15	857171	2935	142829	53
8	857801	2907	998869	15	858932	2923	141068	52
9	859546	2896	998860	15	860686	2911	139314	51
10	[illegible]	2884	998851	15	862433	2900	[illegible]	50
11	[illegible]	2873	9.998841	15	8.864173	2888	11.135827	49
12	864738	2861	998832	15	865906	2877	134094	48
13	866455	2850	998823	16	867632	2866	132368	47
14	868165	2839	998815	16	869351	2854	130649	46
15	869868	2828	998804	16	871064	2843	128936	45
16	871565	2817	998795	16	872770	2832	127230	44
17	873255	2806	998785	16	874469	2821	125531	43
18	874938	2795	998776	16	876162	2811	123838	42
19	876615	2786	998766	16	877849	2800	122151	41
20	878285	2773	998757	16	879529	2789	120471	40
21	8.879949	2763	9.998747	16	8.881202	2779	11.118798	39
22	881607	2752	998738	16	882869	2768	117131	38
23	883258	2742	998728	16	884530	2758	115470	37
24	884903	2731	998718	16	886185	2747	113815	36
25	886542	2721	998708	16	887833	2737	112167	35
26	888174	2711	998699	16	889476	2727	110524	34
27	889801	2700	998689	16	891112	2717	108888	33
28	891421	2690	998679	16	892742	2707	107258	32
29	893035	2680	998669	17	894366	2697	105634	31
30	894643	2670	998659	17	895984	2687	104016	30
31	8.896246	2660	9.998649	17	8.897596	2677	11.102404	29
32	897842	2651	998639	17	899203	2667	100797	28
33	899432	2641	998629	17	900803	2658	099197	27
34	901017	2631	998619	17	902398	2648	097602	26
35	902596	2622	998609	17	903987	2638	096013	25
36	904169	2612	998599	17	905570	2629	094430	24
37	905736	2603	998589	17	907147	2620	092853	23
38	907297	2593	998578	17	908719	2610	091281	22
39	908853	2584	998568	17	910285	2601	089715	21
40	910404	2575	998558	17	911846	2592	088154	20
41	8.911949	2566	9.998548	17	8.913401	2583	11.086599	19
42	913488	2556	998537	17	914951	2574	085049	18
43	915022	2547	998527	17	916495	2565	083505	17
44	916550	2538	998516	18	918034	2556	081966	16
45	918073	2529	998506	18	919568	2547	080432	15
46	919591	2520	998495	18	921096	2538	078904	14
47	921103	2512	998485	18	922619	2530	077381	13
48	922610	2503	998474	18	924136	2521	075864	12
49	924112	2494	998464	18	925649	2512	074351	11
50	925609	2486	998453	18	927156	2503	072844	10
51	8.927100	2477	9.998442	18	8.928658	2495	11.071342	9
52	928587	2469	998431	18	930155	2486	069845	8
53	930068	2460	998421	18	931647	2478	068353	7
54	931544	2452	998410	18	933134	2470	066866	6
55	933015	2443	998399	18	934616	2461	065384	5
56	934481	2435	998388	18	936093	2453	063907	4
57	935942	2427	998377	18	937565	2445	062435	3
58	937398	2419	998366	18	939032	2437	060968	2
59	938850	2411	998355	18	940494	2430	059506	1
60	940296	2403	998344	18	941952	2421	058048	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

85 Dégrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	8.940296	2403	9.998344	19	8.941952	2421	11.058048	60
1	941738	2394	998333	19	943404	2413	056596	59
2	943174	2387	998322	19	944852	2405	055148	58
3	944606	2379	998311	19	946295	2397	053705	57
4	946034	2371	998300	19	947734	2390	052266	56
5	947456	2363	998289	19	949168	2382	050832	55
6	948874	2355	998277	19	950597	2374	049403	54
7	950287	2348	998266	19	952021	2366	047979	53
8	951696	2340	998255	19	953441	2360	046559	52
9	953100	2332	998243	19	954856	2351	045144	51
10	954499	2325	998232	19	956267	2344	043733	50
11	8.955894	2317	9.998220	19	8.957674	2337	11.042326	49
12	957284	2310	998209	19	959075	2329	040925	48
13	958670	2302	998197	19	960473	2323	039527	47
14	960052	2295	998186	19	961866	2314	038134	46
15	961429	2288	998174	19	[illegible]	2307	036745	45
16	962801	2280	998163	19	[illegible]	2300	035361	44
17	964170	2273	998151	19	966019	2293	033981	43
18	965534	2266	998139	20	967394	2286	032606	42
19	966893	2259	998128	20	968766	2279	031234	41
20	968249	2252	998116	20	970133	2271	029867	40
21	8.969600	2244	9.998104	20	8.971496	2265	11.028504	39
22	970947	2238	998092	20	972855	2257	027145	38
23	972289	2231	998080	20	974209	2251	025791	37
24	973628	2224	998068	20	975560	2244	024440	36
25	974962	2217	998056	20	976906	2237	023094	35
26	976293	2210	998044	20	978248	2230	021752	34
27	977619	2203	998032	20	979586	2223	020414	33
28	978941	2197	998020	20	980921	2217	019079	32
29	980259	2190	998008	20	982251	2210	017749	31
30	981573	2183	997996	20	983577	2204	016423	30
31	8.982883	2177	9.997984	20	8.984899	2197	11.015101	29
32	984189	2170	997972	20	986217	2191	013783	28
33	985491	2163	997959	20	987532	2184	012468	27
34	986789	2157	997947	20	988842	2178	011158	26
35	988083	2150	997935	21	990149	2171	009851	25
36	989374	2144	997922	21	991451	2165	008549	24
37	990660	2138	997910	21	992750	2158	007250	23
38	991943	2131	997897	21	994045	2152	005955	22
39	993222	2125	997885	21	995337	2146	004663	21
40	994497	2119	997872	21	996624	2140	003376	20
41	8.995768	2112	9.997860	21	8.997908	2134	11.002092	19
42	997036	2106	997847	21	999188	2127	000812	18
43	998299	2100	997835	21	9.000465	2121	10.999535	17
44	999560	2094	997822	21	001738	2115	998262	16
45	9.000816	2087	997809	21	003007	2109	996993	15
46	002069	2082	997797	21	004272	2103	995728	14
47	003318	2076	997784	21	005534	2097	994466	13
48	004563	2070	997771	21	006792	2091	993208	12
49	005805	2064	997758	21	008047	2085	991953	11
50	007044	2958	997745	21	009298	2080	990702	10
51	9.008278	2052	9.997732	21	9.010546	2074	10.989454	9
52	009510	2046	997719	21	011790	2068	988210	8
53	010737	2040	997706	21	013031	2062	986969	7
54	011962	2034	997693	22	014268	2056	985732	6
55	013182	2029	997680	22	015502	2051	984498	5
56	014400	2023	997667	22	016732	2045	983268	4
57	015613	2017	997654	22	017959	2040	982041	3
58	016824	2012	997641	22	019183	2033	980817	2
59	018031	2006	997628	22	020403	2028	979597	1
60	019235	2000	997614	22	021620	2023	978380	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

84 Dégrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.019235	2000	9.997614	22	9.021620	2023	10.978380	60
1	020435	1995	997601	22	022834	2017	977166	59
2	021632	1989	997588	22	024044	2011	975956	58
3	022825	1984	997574	22	025251	2006	974749	57
4	024016	1978	997561	22	026455	2000	973545	56
5	025203	1973	997547	22	027655	1995	972345	55
6	026386	1967	997534	23	028852	1990	971148	54
7	027567	1962	997520	23	030046	1985	969954	53
8	028744	1957	997507	23	031237	1979	968763	52
9	029918	1951	997493	23	032425	1974	967575	51
10	031089	1947	997480	23	033609	1969	966391	50
11	9.032257	1941	9.997466	23	9.034791	1964	10.965209	49
12	033421	1936	997452	23	035969	1958	964031	48
13	034582	1930	997439	23	037144	1953	962856	47
14	035741	1925	997425	23	038316	1948	961684	46
15	036896	1920	997411	23	039485	1943	960515	45
16	038048	1915	997397	23	040651	1938	959349	44
17	039197	1910	997383	23	041813	1933	958187	43
18	040342	1905	997369	23	042973	1928	957027	42
19	041485	1899	997355	23	044130	1923	955870	41
20	042625	1894	997341	23	045284	1918	954716	40
21	9.043762	1889	9.997327	24	9.046434	1913	10.953566	39
22	044895	1884	997313	24	047582	1908	952418	38
23	046026	1879	997299	24	048727	1903	951273	37
24	047154	1875	997285	24	049869	1898	950131	36
25	048279	1870	997271	24	051008	1893	948992	35
26	049400	1865	997257	24	052144	1889	947856	34
27	050519	1860	997242	24	053277	1884	946723	33
28	051635	1855	997228	24	054407	1879	945593	32
29	052749	1850	997214	24	055535	1874	944465	31
30	053859	1845	997199	24	056659	1870	943341	30
31	054966	1841	9.997185	24	9 057781	1865	10.942219	29
32	056071	1836	997170	24	058900	1869	941100	28
33	057172	1831	997156	24	060016	1855	939984	27
34	058271	1827	997141	24	061130	1851	938870	26
35	059367	1822	997127	24	062240	1846	937760	25
36	060460	1817	997112	24	063348	1842	936652	24
37	061551	1813	997098	24	064453	1837	935547	23
38	062639	1808	997083	25	065556	1833	934444	22
39	063724	1804	997068	25	066655	1828	933345	21
40	064806	1799	997053	25	067752	1824	932248	20
41	9.065885	1794	9.997039	25	9.068846	1819	10.931154	19
42	066962	1790	997024	25	069938	1815	930062	18
43	068036	1786	997009	25	071027	1810	928973	17
44	069107	1781	996994	25	072113	1806	927887	16
45	070176	1777	996979	25	073197	1802	926803	15
46	071242	1772	996964	25	074278	1797	925722	14
47	072306	1768	996949	25	075356	1793	924644	13
48	073366	1763	996934	25	076432	1789	923568	12
49	074424	1759	996919	25	077505	1784	922495	11
50	075480	1755	996904	25	078576	1780	921424	10
51	9.076533	1750	9.996889	25	9.079644	1776	10.920356	9
52	077583	1746	996874	25	080710	1772	919290	8
53	078631	1742	996858	25	081773	1767	918227	7
54	079676	1738	996843	25	082833	1763	917167	6
55	080719	1733	996828	25	083891	1759	916109	5
56	081759	1729	996812	26	084947	1755	915053	4
57	082797	1725	996797	26	086000	1751	914000	3
58	083832	1721	996782	26	087050	1747	912950	2
59	084864	1717	996766	26	088098	1743	911902	1
60	085894	1713	996751	26	089144	1738	910856	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

83 Dégrés.

M.	Sinus	D	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.085894	1713	9.996751	26	9.089144	1738	10.910856	60
1	086922	1709	996735	26	090187	1734	909813	59
2	087947	1704	996720	26	091228	1730	908772	58
3	088970	1700	996704	26	092266	1727	907734	57
4	089990	1696	996688	26	093302	1722	906698	56
5	091008	1692	996673	26	094336	1719	905664	55
6	092024	1688	996657	26	095367	1715	904633	54
7	093037	1684	996641	26	096395	1711	903605	53
8	094047	1680	996625	26	097422	1707	902578	52
9	095056	1676	996610	26	098446	1703	901554	51
10	096062	1673	996594	26	099468	1699	900532	50
11	9.097065	1668	9.996578	27	9.100487	1695	10.899513	49
12	098066	1665	996562	27	101504	1691	898496	48
13	099065	1661	996546	27	102519	1687	897481	47
14	100062	1657	996530	27	103532	1684	896468	46
15	101056	1653	996514	27	104542	1680	895458	45
16	102048	1649	996498	27	105550	1676	894450	44
17	103037	1645	996482	27	106556	1672	893444	43
18	104025	1641	996465	27	107559	1669	892441	42
19	105010	1638	996449	27	108560	1665	891440	41
20	105992	1634	996433	27	109559	1661	890441	40
21	9.106973	1630	9.996417	27	9.110556	1658	10.889444	39
22	107951	1627	996400	27	111551	1654	888449	38
23	108927	1623	996384	27	112543	1650	887457	37
24	109901	1619	996368	27	113533	1646	886467	36
25	110873	1616	996351	27	114521	1643	885479	35
26	111842	1612	996335	27	115507	1639	884493	34
27	112809	1608	996318	27	116491	1636	883509	33
28	113774	1605	996302	28	117472	1632	882528	32
29	114737	1601	996285	28	118452	1629	881548	31
30	115698	1597	996269	28	119429	1625	880571	30
31	9.116656	1594	9.996252	28	9.120404	1622	10.879596	29
32	117613	1590	996235	28	121377	1618	878623	28
33	118567	1587	996219	28	122348	1615	877652	27
34	119519	1583	996202	28	123317	1611	876683	26
35	120469	1580	996185	28	124284	1607	875716	25
36	121417	1576	996168	28	125249	1604	874751	24
37	122362	1573	996151	28	126211	1601	873789	23
38	123306	1569	996134	28	127172	1597	872828	22
39	124248	1566	996117	28	128130	1594	871870	21
40	125187	1562	996100	28	129087	1591	870913	20
41	9.126125	1559	9.996083	29	9.130041	1587	10.869959	19
42	127060	1556	996066	29	130994	1584	869006	18
43	127993	1552	996049	29	131944	1581	868056	17
44	128925	1549	996032	29	132893	1577	867107	16
45	129854	1545	996015	29	133839	1574	866161	15
46	130781	1542	995998	29	134784	1571	865216	14
47	131706	1539	995980	29	135726	1567	864274	13
48	132630	1535	995963	29	136667	1564	863333	12
49	133551	1532	995946	29	137605	1561	862395	11
50	134470	1529	995928	29	138542	1558	861458	10
51	9.135387	1525	9.995911	29	9.139476	1555	10.860524	9
52	136303	1522	995894	29	140409	1551	859591	8
53	137216	1519	995876	29	141340	1548	858660	7
54	138128	1516	995859	29	142269	1545	857731	6
55	139037	1512	995841	29	143196	1542	856804	5
56	139944	1509	995823	29	144121	1539	855879	4
57	140850	1506	995806	29	145044	1535	854956	3
58	141754	1503	995788	29	145966	1532	854034	2
59	142655	1500	995771	29	146885	1529	853115	1
60	143555	1496	995753	29	147803	1526	852197	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

82 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.143555	1496	9.995753	30	9.147803	1526	10.852197	60
1	144453	1493	995735	30	148718	1523	851282	59
2	145349	1490	995717	30	149632	1520	850368	58
3	146243	1487	995699	30	150544	1517	849456	57
4	147136	1484	995681	30	151454	1514	848[illegible]6	56
5	148026	1481	995664	30	152363	1511	847637	55
6	148915	1478	995646	30	153269	1508	846731	54
7	149802	1475	995628	30	154174	1505	845826	53
8	150686	1472	995610	30	155077	1502	844923	52
9	151569	1469	995591	30	155978	1499	844022	51
10	152451	1466	995573	30	156877	1496	843123	50
11	9.153330	1463	9.995555	30	9.157775	1493	10.842225	49
12	154208	1460	995537	30	158671	1490	841329	48
13	155083	1457	995519	30	159565	1487	840435	47
14	155957	1454	995501	31	160457	1484	839543	46
15	156830	1451	995482	31	161347	1481	838653	45
16	157700	1448	995464	31	162236	1479	837764	44
17	158569	1445	995446	31	163123	1476	836877	43
18	159435	1442	995427	31	164008	1473	835992	42
19	160301	1439	995409	31	164892	1470	835108	41
20	161164	1436	995390	31	165774	1467	834226	40
21	9.162025	1433	9.995372	31	9.166654	1464	10.833346	39
22	162885	1430	995353	31	167532	1461	832468	38
23	163743	1427	995334	31	168409	1458	831591	37
24	164600	1424	995316	31	169284	1455	830716	36
25	165454	1422	995297	31	170157	1453	829843	35
26	166307	1419	995278	31	171029	1450	828971	34
27	167159	1416	995260	31	171899	1447	828101	33
28	168008	1413	995241	32	172767	1444	827233	32
29	168856	1410	995222	32	173634	1442	826366	31
30	169702	1407	995203	32	174499	1439	825501	30
31	9.170547	1405	9.995184	32	9.175362	1436	10.824638	29
32	171389	1402	995165	32	176224	1433	823776	28
33	172230	1399	995146	32	177084	1431	822916	27
34	173070	1396	995127	32	177942	1428	822058	26
35	173908	1394	995108	32	178799	1425	821201	25
36	174744	1391	995089	32	179655	1423	820345	24
37	175578	1388	995070	32	180508	1420	819492	23
38	176411	1386	995051	32	181360	1417	818640	22
39	177242	1383	995032	32	182211	1415	817789	21
40	178072	1380	995013	32	183059	1412	816941	20
41	9.178900	1377	9.994993	32	9.183907	1409	10.816093	19
42	179726	1374	994974	32	184752	1407	815248	18
43	180551	1372	994955	32	185597	1404	814403	17
44	181374	1369	994935	32	186439	1402	813561	16
45	182196	1366	994916	33	187280	1399	812720	15
46	183016	1364	994896	33	188120	1396	811880	14
47	183834	1361	994877	33	188958	1393	811042	13
48	184651	1359	994857	33	189794	1391	810206	12
49	185466	1356	994838	33	190629	1389	809371	11
50	186280	1353	994818	33	191462	1386	808538	10
51	9.187092	1351	9.994798	33	9.192294	1384	10.807706	9
52	187903	1348	994779	33	193124	1381	806876	8
53	188712	1346	994759	33	193953	1379	806047	7
54	189519	1343	994739	33	194780	1376	805220	6
55	190325	1341	994719	33	195606	1374	804394	5
56	191130	1338	994700	33	196430	1371	803570	4
57	191933	1336	994680	33	197253	1369	802747	3
58	192734	1333	994660	33	198074	1366	801926	2
59	193534	1330	994640	33	198894	1364	801106	1
60	194332	1328	994620	33	199713	1361	800287	0
	Cosinus.		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

81 Degrés.

M.	Sinus	D	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.194332	1328	9.994620	33	9.199713	1361	10.800287	60
1	195129	1326	994600	33	200529	1359	799471	59
2	195925	1323	994580	33	201345	1356	798655	58
3	196719	1321	994560	34	202159	1354	797841	57
4	197511	1318	994540	34	202971	1352	797029	56
5	198302	1316	994519	34	203782	1349	796218	55
6	199091	1313	994499	34	204592	1347	795408	54
7	199879	1311	994479	34	205400	1345	794600	53
8	200666	1308	994459	34	206207	1342	793793	52
9	201451	1306	994438	34	207013	1340	792987	51
10	202234	1304	994418	34	207817	1338	792183	50
11	9.203017	1301	9.994397	34	9.208619	1335	10.791381	49
12	203797	1299	994377	34	209420	1333	790580	48
13	204577	1296	994357	34	210220	1331	789780	47
14	205354	1294	994336	34	211018	1328	788982	46
15	206131	1292	994316	34	211815	1326	788185	45
16	206906	1289	994295	34	212611	1324	787389	44
17	207679	1287	994274	35	213405	1321	786595	43
18	208452	1285	994254	35	214198	1319	785802	42
19	209222	1282	994233	35	214989	1317	785011	41
20	209992	1280	994212	35	215780	1315	784220	40
21	9.210760	1278	9.994191	35	9.216568	1312	10.783432	39
22	211526	1275	994171	35	217356	1310	782644	38
23	212291	1273	994150	35	218142	1308	781858	37
24	213055	1271	994129	35	218926	1305	781074	36
25	213818	1268	994108	35	219710	1303	780290	35
26	214579	1266	994087	35	220492	1301	779508	34
27	215338	1264	994066	35	221272	1299	778728	33
28	216097	1261	994045	35	222052	1297	777948	32
29	216854	1259	994024	35	222830	1294	777170	31
30	217609	1257	994003	35	223606	1292	776394	30
31	9.218363	1255	9.993981	35	9.224382	1290	10.775618	29
32	219116	1253	993960	35	225156	1288	774844	28
33	219868	1250	993939	35	225929	1286	774071	27
34	220618	1248	993918	35	226700	1284	773300	26
35	221367	1246	993896	36	227471	1281	772529	25
36	222115	1244	993875	36	228239	1279	771761	24
37	222861	1242	993854	36	229007	1277	770993	23
38	223606	1239	993832	36	229773	1275	770227	22
39	224349	1237	993811	36	230539	1273	769461	21
40	225092	1235	993789	36	231302	1271	768698	20
41	9.225833	1233	9.993768	36	9.232065	1269	10.767935	19
42	226573	1231	993746	36	232826	1267	767174	18
43	227311	1228	993725	36	233586	1265	766414	17
44	228048	1226	993703	36	234345	1262	765655	16
45	228784	1224	993681	36	235103	1260	764897	15
46	229518	1222	993660	36	235859	1258	764141	14
47	230252	1220	993638	36	236614	1256	763386	13
48	230984	1218	993616	36	237368	1254	762632	12
49	231714	1216	993594	37	238120	1252	761880	11
50	232444	1214	993572	37	238872	1250	761128	10
51	9.233172	1212	9.993550	37	9.239622	1248	10.760378	9
52	233899	1209	993528	37	240371	1246	759629	8
53	234625	1207	993506	37	241118	1244	758882	7
54	235349	1205	993484	37	241865	1242	758135	6
55	236073	1203	993462	37	242610	1240	757390	5
56	236795	1201	993440	37	243354	1238	756646	4
57	237515	1199	993418	37	244097	1236	755903	3
58	238235	1197	993396	37	244839	1234	755161	2
59	238953	1195	993374	37	245579	1232	754421	1
60	239670	1193	993351	37	246319	1230	753681	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

80 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.239670	1193	9.993351	37	9.246319	1230	10.753681	60
1	240386	1191	993329	37	247057	1228	752943	59
2	241101	1189	993307	37	247794	1226	752206	58
3	241814	1187	993285	37	248530	1224	751470	57
4	242526	1185	993262	37	249264	1222	750736	56
5	243237	1183	993240	37	249998	1220	750002	55
6	243947	1181	993217	38	250730	1218	749270	54
7	244656	1179	993195	38	251461	1217	748539	53
8	245363	1177	993172	38	252191	1215	747809	52
9	246069	1175	993149	38	252920	1213	747080	51
10	246775	1173	993127	38	253648	1211	746352	50
11	9.247478	1171	9.993104	38	9.254374	1209	10.745626	49
12	248181	1169	993081	38	255100	1207	744900	48
13	248883	1167	993059	38	255824	1205	744176	47
14	249583	1165	993036	38	256547	1203	743453	46
15	250282	1163	993013	38	257269	1201	742731	45
16	250980	1161	992990	38	257990	1200	742010	44
17	251677	1159	992967	38	258710	1198	741290	43
18	252373	1158	992944	38	259429	1196	740571	42
19	253067	1156	992921	38	260146	1194	739854	41
20	253761	1154	992898	38	260863	1192	739137	40
21	9.254453	1152	9.992875	38	9.261578	1190	10.738422	39
22	255144	1150	992852	38	262292	1189	737708	38
23	255834	1148	992829	39	263005	1187	736995	37
24	256523	1146	992806	39	263717	1185	736283	36
25	257211	1144	992783	39	264428	1183	735572	35
26	257898	1142	992759	39	265138	1181	734862	34
27	258583	1141	992736	39	265847	1179	734153	33
28	259268	1139	992713	39	266555	1178	733445	32
29	259951	1137	992690	39	267261	1176	732739	31
30	260633	1135	992666	39	267967	1174	732033	30
31	9.261314	1133	9.992643	39	9.268671	1172	10.731329	29
32	261994	1131	992619	39	269375	1170	730625	28
33	262673	1130	992596	39	270077	1169	729923	27
34	263351	1128	992572	39	270779	1167	729221	26
35	264027	1126	992549	39	271479	1165	728521	25
36	264703	1124	992525	39	272178	1164	727822	24
37	265377	1122	992501	39	272876	1162	727124	23
38	266051	1120	992478	40	273573	1160	726427	22
39	266723	1119	992454	40	274269	1158	725731	21
40	267395	1117	992430	40	274964	1157	725036	20
41	9.268065	1115	9.992406	40	9.275658	1155	10.724342	19
42	268734	1113	992382	40	276351	1153	723649	18
43	269402	1111	992359	40	277043	1151	722957	17
44	270069	1110	992335	40	277734	1150	722266	16
45	270735	1108	992311	40	278424	1148	721576	15
46	271400	1106	992287	40	279113	1147	720887	14
47	272064	1105	992263	40	279801	1145	720199	13
48	272726	1103	992239	40	280488	1143	719512	12
49	273388	1101	992214	40	281174	1141	718826	11
50	274049	1099	992190	40	281858	1140	718142	10
51	9.274708	1098	9.992166	40	9.282542	1138	10.717458	9
52	275367	1096	992142	40	283225	1136	716775	8
53	276024	1094	992117	41	283907	1135	716093	7
54	276681	1092	992093	41	284588	1133	715412	6
55	277337	1091	992069	41	285268	1131	714732	5
56	277991	1089	992044	41	285947	1130	714053	4
57	278644	1087	992020	41	286624	1128	713376	3
58	279297	1086	991996	41	287301	1126	712699	2
59	279948	1084	991971	41	287977	1125	712023	1
60	280599	1082	991947	41	288652	1123	711348	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M

79 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.280599	1082	9.991947	41	9.288652	1123	10.711348	60
1	281248	1081	991922	41	289326	1122	710674	59
2	281897	1079	991897	41	289999	1120	710001	58
3	282544	1077	991873	41	290671	1118	709329	57
4	283190	1076	991848	41	291342	1117	708658	56
5	283836	1074	991823	41	292013	1115	707987	55
6	284480	1072	991799	41	292682	1114	707318	54
7	285124	1071	991774	42	293350	1112	706650	53
8	285766	1069	991749	42	294017	1111	705983	52
9	286408	1067	991724	42	294684	1109	705316	51
10	287048	1066	991699	42	295349	1107	704651	50
11	9.287687	1064	9.991674	42	9.296013	1106	10.703987	49
12	288326	1063	991649	42	296677	1104	703323	48
13	288964	1061	991624	42	297339	1103	702661	47
14	289600	1059	991599	42	298001	1101	701999	46
15	290236	1058	991574	42	298662	1100	701338	45
16	290870	1056	991549	42	299322	1098	700678	44
17	291504	1054	991524	42	299980	1096	700020	43
18	292137	1053	991498	42	300638	1095	699362	42
19	292768	1051	991473	42	301295	1093	698705	41
20	293399	1050	991448	42	301951	1092	698049	40
21	9.294029	1048	9.991422	42	9.302607	1090	10.697393	39
22	294658	1046	991397	42	303261	1089	696739	38
23	295286	1045	991372	43	303914	1087	696086	37
24	295913	1043	991346	43	304567	1086	695433	36
25	296539	1042	991321	43	305218	1084	694782	35
26	297164	1040	991295	43	305869	1083	694131	34
27	297788	1039	991270	43	306519	1081	693481	33
28	298412	1037	991244	43	307168	1080	692832	32
29	299034	1036	991218	43	307815	1078	692185	31
30	299655	1034	991193	43	308463	1077	691537	30
31	9.300276	1032	9.991167	43	9.309109	1075	10.690891	29
32	300895	1031	991141	43	309754	1074	690246	28
33	301514	1029	991115	43	310398	1073	689602	27
34	302132	1028	991090	43	311042	1071	688958	26
35	302748	1026	991064	43	311685	1070	688315	25
36	303364	1025	991038	43	312327	1068	687673	24
37	303979	1023	991012	43	312967	1067	687033	23
38	304593	1022	990986	43	313608	1065	686392	22
39	305207	1020	990960	43	314247	1064	685753	21
40	305819	1019	990934	44	314885	1062	685115	20
41	9.306430	1017	9.990908	44	9.315523	1061	10.684477	19
42	307041	1016	990882	44	316159	1060	683841	18
43	307650	1014	990855	44	316795	1058	683205	17
44	308259	1013	990829	44	317430	1057	682570	16
45	308867	1011	990803	44	318064	1055	681936	15
46	309474	1010	990777	44	318697	1054	681303	14
47	310080	1008	990750	44	319329	1053	680671	13
48	310685	1007	990724	44	319961	1051	680039	12
49	311289	1005	990697	44	320592	1050	679408	11
50	311893	1004	990671	44	321222	1048	678778	10
51	9.312495	1003	9.990644	44	9.321851	1047	10.678149	9
52	313097	1001	990618	44	322479	1045	677521	8
53	313698	1000	990591	44	323106	1044	676894	7
54	314297	998	990565	44	323733	1043	676267	6
55	314897	997	990538	44	324358	1041	675642	5
56	315495	996	990511	45	324983	1040	675017	4
57	316092	994	990485	45	325607	1039	674393	3
58	316689	993	990458	45	326231	1037	673769	2
59	317284	991	990431	45	326853	1036	673147	1
60	317879	990	990404	45	327475	1035	672525	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

78 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.317879	990	9.990404	45	9.327474	1035	10.672526	60
1	318473	988	990378	45	328095	1033	671905	59
2	319066	987	990351	45	328715	1032	671285	58
3	319658	986	990324	45	329334	1030	670666	57
4	320249	984	990297	45	329953	1029	670047	56
5	320840	983	990270	45	330570	1028	669430	55
6	321430	982	990243	45	331187	1026	668813	54
7	322019	980	990215	45	331803	1025	668197	53
8	322607	979	990188	45	332418	1024	667582	52
9	323194	977	990161	45	333033	1023	666967	51
10	323780	976	990134	45	333646	1021	666354	50
11	9.324366	975	9.990107	46	9.334259	1020	10.665741	49
12	324950	973	990079	46	334871	1019	665129	48
13	325534	972	990052	46	335482	1017	664518	47
14	326117	970	990025	46	336093	1016	663907	46
15	326700	969	989997	46	336702	1015	663298	45
16	327281	968	989970	46	337311	1013	662689	44
17	327862	966	989942	46	337919	1012	662081	43
18	328442	965	989915	46	338527	1011	661473	42
19	329021	964	989887	46	339133	1010	660867	41
20	329599	962	989860	46	339739	1008	660261	40
21	9.330176	961	9.989832	46	9.340344	1007	10.659656	39
22	330753	960	989804	46	340948	1006	659052	38
23	331329	958	989777	46	341552	1004	658448	37
24	331903	957	989749	47	342155	1003	657845	36
25	332478	956	989721	47	342757	1002	657243	35
26	333051	954	989693	47	343358	1000	656642	34
27	333624	953	989665	47	343958	999	656042	33
28	334195	952	989637	47	344558	998	655442	32
29	334766	950	989609	47	345157	997	654843	31
30	335337	949	989582	47	345755	996	654245	30
31	9.335906	948	9.989553	47	9.346353	994	10.653647	29
32	336475	946	989525	47	346949	993	653051	28
33	337043	945	989497	47	347545	992	652455	27
34	337610	944	989469	47	348141	991	651859	26
35	338176	943	989441	47	348735	990	651265	25
36	338742	941	989413	47	349329	988	650671	24
37	339306	940	989384	47	349922	987	650078	23
38	339871	939	989356	47	350514	986	649486	22
39	340434	937	989328	47	351106	985	648894	21
40	340996	936	989300	47	351697	983	648303	20
41	9.341558	935	9.989271	47	9.352287	982	10.647713	19
42	342119	934	989243	47	352876	981	647124	18
43	342679	932	989214	47	353465	980	646535	17
44	343239	931	989186	47	354053	979	645947	16
45	343797	930	989157	47	354640	977	645360	15
46	344355	929	989128	48	355227	976	644773	14
47	344912	927	989100	48	355813	975	644187	13
48	345469	926	989071	48	356398	974	643602	12
49	346024	925	989042	48	356982	973	643018	11
50	346579	924	989014	48	357566	971	642434	10
51	9.347134	922	9.988985	48	9.358149	970	10.641851	9
52	347687	921	988956	48	358731	969	641269	8
53	348240	920	988927	48	359313	968	640687	7
54	348792	919	988898	48	359893	967	640107	6
55	349343	917	988869	48	360474	966	639526	5
56	349893	916	988840	48	361053	965	638947	4
57	350443	915	988811	49	361632	963	638368	3
58	350992	914	988782	49	362210	962	637790	2
59	351540	913	988753	49	362787	961	637213	1
60	352088	911	988724	49	363364	960	636636	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

77 Degrés.

Cotang.	
10.672526	60
671905	59
671285	58
670666	57
670047	56
669430	55
668813	54
668197	53
667582	52
666967	51
666354	50
10.665741	49
665129	48
664518	47
663907	46
663298	45
662689	44
662081	43
661473	42
660867	41
660261	40
10.659656	39
659052	38
658448	37
657845	36
657243	35
656642	34
656042	33
655442	32
654843	31
654245	30
10.653647	29
653051	28
652455	27
651859	26
651265	25
650671	24
650078	23
649486	22
648894	21
648303	20
10.647713	19
647124	18
646535	17
645947	16
645360	15
644773	14
644187	13
643602	12
643018	11
642434	10
10.641851	9
641269	8
640687	7
640107	6
639526	5
638947	4
638368	3
637790	2
637213	1
636636	0
Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.352088	911	9.988724	49	9.363364	960	10.636636	60
1	352635	910	988695	49	363940	959	636060	59
2	353181	909	988666	49	364515	958	635485	58
3	353726	908	988636	49	365090	957	634910	57
4	354271	907	988607	49	365664	955	634336	56
5	354815	905	988578	49	366237	954	633763	55
6	355358	904	988548	49	366810	953	633190	54
7	355901	903	988519	49	367382	952	632618	53
8	356443	902	988489	49	367953	951	632047	52
9	356984	901	988460	49	368524	950	631476	51
10	357524	899	988430	49	369094	949	630906	50
11	9.358064	898	9.988401	49	9.369663	948	10.630337	49
12	358603	897	988371	49	370232	946	629768	48
13	359141	896	988342	49	370799	945	629201	47
14	359678	895	988312	50	371367	944	628633	46
15	360215	893	988282	50	371933	943	628067	45
16	360752	892	988252	50	372499	942	627501	44
17	361287	891	988223	50	373064	941	626936	43
18	361822	890	988193	50	373629	940	626371	42
19	362356	889	988163	50	374193	939	625807	41
20	362889	888	988133	50	374756	938	625244	40
21	9.363422	887	9.988103	50	9.375319	937	10.624681	39
22	363954	885	988073	50	375881	935	624119	38
23	364485	884	988043	50	376442	934	623558	37
24	365016	883	988013	50	377003	933	622997	36
25	365546	882	987983	50	377563	932	622437	35
26	366075	881	987953	50	378122	931	621878	34
27	366604	880	987922	50	378681	930	621319	33
28	367131	879	987892	50	379239	929	620761	32
29	367659	877	987862	50	379797	928	620203	31
30	368185	876	987832	51	380354	927	619646	30
31	9.368711	875	9.987801	51	9.380910	926	10.619090	29
32	369236	874	987771	51	381466	925	618534	28
33	369761	873	987740	51	382020	924	617980	27
34	370285	872	987710	51	382575	923	617425	26
35	370808	871	987679	51	383129	922	616871	25
36	371330	870	987649	51	383682	921	616318	24
37	371852	869	987618	51	384234	920	615766	23
38	372373	867	987588	51	384786	919	615214	22
39	372894	866	987557	51	385337	918	614663	21
40	373414	865	987526	51	385888	917	614112	20
41	9.373933	864	9.987496	51	9.386438	915	10.613562	19
42	374452	863	987465	51	386987	914	613013	18
43	374970	862	987434	51	387536	913	612464	17
44	375487	861	987403	52	388084	912	611916	16
45	376003	860	987372	52	388631	911	611369	15
46	376519	859	987341	52	389178	910	610822	14
47	377035	858	987310	52	389724	909	610276	13
48	377549	857	987279	52	390270	908	609730	12
49	378063	856	987248	52	390815	907	609185	11
50	378577	854	987217	52	391360	906	608640	10
51	9.379089	853	9.987186	52	9.391903	905	10.608097	9
52	379601	852	987155	52	392447	904	607553	8
53	380113	851	987124	52	392989	903	607011	7
54	380624	850	987092	52	393531	902	606469	6
55	381134	849	987061	52	394073	901	605927	5
56	381643	848	987030	52	394614	900	605386	4
57	382152	847	986998	52	395154	899	604846	3
58	382661	846	986967	52	395694	898	604306	2
59	383168	845	986936	52	396233	897	603767	1
60	383675	844	986904	52	396771	896	603229	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.383675	844	9.986904	52	9.396771	896	10.603229	60
1	384182	843	986873	53	397309	896	602691	59
2	384687	842	986841	53	397846	895	602154	58
3	385192	841	986809	53	398383	894	601617	57
4	385697	840	986778	53	398919	893	601081	56
5	386201	839	986746	53	399455	892	600545	55
6	386704	838	986714	53	399990	891	600010	54
7	387207	837	986683	53	400524	890	599476	53
8	387709	836	986651	53	401058	889	598942	52
9	388210	835	986619	53	401591	888	598409	51
10	388711	834	986587	53	402124	887	597876	50
11	9.389211	833	9.986555	53	9.402656	886	10.597344	49
12	389711	832	986523	53	403187	885	596813	48
13	390210	831	986491	53	403718	884	596282	47
14	390708	830	986459	53	404249	883	595751	46
15	391206	828	986427	53	404778	882	595222	45
16	391703	827	986395	53	40[illegible]308	881	594692	44
17	392199	826	986363	54	4[illegible]836	880	594164	43
18	392695	825	986331	54	406364	879	593636	42
19	393191	824	986299	54	406892	878	593108	41
20	393685	823	986266	54	407419	877	592581	40
21	9.394179	822	9.986234	54	9.407945	876	10.592055	39
22	394673	821	986202	54	408471	875	591529	38
23	395166	820	986169	54	408997	874	591003	37
24	395658	819	986137	54	409521	874	590479	36
25	396150	818	986104	54	410045	873	589955	35
26	396641	817	986072	54	410569	872	589[illegible]31	34
27	397132	817	986039	54	411092	871	588908	33
28	397621	816	986007	54	411615	870	588385	32
29	398111	815	985974	54	412137	869	587863	31
30	398600	814	985942	54	412658	868	587342	30
31	9.399088	813	9.985909	55	9.413179	867	10.586821	29
32	399575	812	985876	55	413699	866	586301	28
33	400062	811	985843	55	414219	865	585781	27
34	400549	810	985811	55	414738	864	585262	26
35	401035	809	985778	55	415257	864	584743	25
36	401520	808	985745	55	415775	863	584225	24
37	402005	807	985712	55	416293	862	583707	23
38	402489	806	985679	55	416810	861	583190	22
39	402972	805	985646	55	417326	860	582674	21
40	403455	804	985613	55	417842	859	582158	20
41	9.403938	803	9.985580	55	9.418358	858	10.581642	19
42	404420	802	985547	55	418873	857	581127	18
43	404901	801	985514	55	419387	856	580613	17
44	405382	800	985480	55	419901	855	580099	16
45	405862	799	985447	55	420415	855	579585	15
46	406341	798	985414	56	420927	854	579073	14
47	406820	797	985380	56	421440	853	578560	13
48	407299	796	985347	56	421952	852	578048	12
49	407777	795	985314	56	422463	851	577537	11
50	408254	794	985280	56	422974	850	577026	10
51	9.408731	794	9.985247	56	9.423484	849	10.576516	9
52	409207	793	985213	56	423993	848	576007	8
53	409682	792	985180	56	424503	848	575497	7
54	410157	791	985146	56	425011	847	574989	6
55	410632	790	985113	56	425519	846	574481	5
56	411106	789	985079	56	426027	845	573973	4
57	411579	788	985045	56	426534	844	573466	3
58	412052	787	985011	56	427041	843	572959	2
59	412524	786	984978	56	427547	843	572453	1
60	412996	785	984941	56	428052	842	571948	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.412996	785	9.984944	57	9.428052	842	10.571948	60
1	413467	784	984910	57	428557	841	571443	59
2	413938	783	984876	57	429062	840	570938	58
3	414408	783	984842	57	429566	839	570434	57
4	414878	782	984808	57	430070	838	569930	56
5	415347	781	984774	57	430573	838	569427	55
6	415815	780	984740	57	431075	837	568925	54
7	416283	779	984706	57	431577	836	568423	53
8	416751	778	984672	57	432079	835	567921	52
9	417217	777	984637	57	432580	834	567420	51
10	417684	776	984603	57	433080	833	566920	50
11	9.418150	775	9.984569	57	9.433580	832	10.566420	49
12	418615	774	984535	57	434080	832	565920	48
13	419079	773	984500	57	434579	831	565421	47
14	419544	773	984466	57	435078	830	564922	46
15	420007	772	984432	58	435576	829	564424	45
16	420470	771	984397	58	436073	828	563927	44
17	420933	770	984363	58	436570	828	563430	43
18	421395	769	984328	58	437067	827	562933	42
19	421857	768	984294	58	437563	826	562437	41
20	422318	767	984259	58	438059	825	561941	40
21	9.422778	767	9.984224	58	9.438554	824	10.561446	39
22	423238	766	984190	58	439048	823	560952	38
23	423697	765	984155	58	439543	823	560457	37
24	424156	764	984120	58	440036	822	559964	36
25	424615	763	984085	58	440529	821	559471	35
26	425073	762	984050	58	441022	820	558978	34
27	425530	761	984015	58	441514	819	558486	33
28	425987	760	983981	58	442006	819	557994	32
29	426443	760	983946	58	442497	818	557503	31
30	426899	759	983911	58	442988	817	557012	30
31	9.427354	758	9.983875	58	9.443479	816	10.556521	29
32	427809	757	983840	59	443968	816	556032	28
33	428263	756	983805	59	444458	815	555542	27
34	428717	755	983770	59	444947	814	555053	26
35	429170	754	983735	59	445435	813	554565	25
36	429623	753	983700	59	445923	812	554077	24
37	430075	752	983664	59	446411	812	553589	23
38	430527	752	983629	59	446898	811	553102	22
39	430978	751	983594	59	447384	810	552616	21
40	431429	750	983558	59	447870	809	552130	20
41	9.431879	749	9.983523	59	9.448356	809	10.551644	19
42	432329	749	983487	59	448841	808	551159	18
43	432778	748	983452	59	449326	807	550674	17
44	433226	747	983416	59	449810	806	550190	16
45	433675	746	983381	59	450294	806	549706	15
46	434122	745	983345	59	450777	805	549223	14
47	434569	744	983309	59	451260	804	548740	13
48	435016	744	983273	60	451743	803	548257	12
49	435462	743	983238	60	452225	802	547775	11
50	435908	742	983202	60	452706	802	547294	10
51	9.436353	741	9.983166	60	9.453187	801	10.546813	9
52	436798	740	983130	60	453668	800	546332	8
53	437242	740	983094	60	454148	799	545852	7
54	437686	739	983058	60	454628	799	545372	6
55	438129	738	983022	60	455107	798	544893	5
56	438572	737	982986	60	455586	797	544414	4
57	439014	736	982950	60	456064	796	543936	3
58	439456	736	982914	60	456542	796	543458	2
59	439897	735	982878	60	457019	795	542981	1
60	440338	734	982842	60	457496	794	542504	0
	Cosinus.		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

74 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.440338	734	9.982842	60	9.457496	794	10.542504	60
1	440778	733	982805	60	457973	793	542027	59
2	441218	732	982769	61	458449	793	541551	58
3	441658	731	982733	61	458925	792	541075	57
4	442096	731	982696	61	459400	791	540600	56
5	442535	730	982660	61	459875	790	540125	55
6	442973	729	982624	61	460349	790	539651	54
7	443410	728	982587	61	460823	789	539177	53
8	443847	727	982551	61	461297	788	538703	52
9	444284	727	982514	61	461770	788	538230	51
10	444720	726	982477	61	462242	787	537758	50
11	9.445155	725	9.982441	61	9.462714	786	10.537286	49
12	445590	724	982404	61	463186	785	536814	48
13	446025	723	982367	61	463658	785	536342	47
14	446459	723	982331	61	464129	784	535871	46
15	446893	722	982294	61	464599	783	535401	45
16	447326	721	982257	61	465069	783	534931	44
17	447759	720	982220	62	465539	782	534461	43
18	448191	720	982183	62	466008	781	533992	42
19	448623	719	982146	62	466476	780	533524	41
20	449054	718	982109	62	466945	780	533055	40
21	9.449485	717	9.982072	62	9.467413	779	10.532587	39
22	449915	716	982035	62	467880	778	532120	38
23	450345	716	981998	62	468347	778	531653	37
24	450775	715	981961	62	468814	777	531186	36
25	451204	714	981924	62	469280	776	530720	35
26	451632	713	981886	62	469746	775	530254	34
27	452060	713	981849	62	470211	775	529789	33
28	452488	712	981812	62	470676	774	529324	32
29	452915	711	981774	62	471141	773	528859	31
30	453342	710	981737	62	471605	773	528395	30
31	9.453768	710	9.981699	63	9.472068	772	10.527932	29
32	454194	709	981662	63	472532	771	527468	28
33	454619	708	981625	63	472995	771	527005	27
34	455044	707	981587	63	473457	770	526543	26
35	455469	707	981549	63	473919	769	526081	25
36	455893	706	981512	63	474381	769	525619	24
37	456316	705	981474	63	474842	768	525158	23
38	456739	704	981436	63	475303	767	524697	22
39	457162	704	981399	63	475763	767	524237	21
40	457584	703	981361	63	476223	766	523777	20
41	9.458006	702	9.981323	63	9.476683	765	10.523317	19
42	458427	701	981285	63	477142	765	522858	18
43	458848	701	981247	63	477601	764	522399	17
44	459268	700	981209	63	478059	763	521941	16
45	459688	699	981171	63	478517	763	521483	15
46	460108	698	981133	64	478975	762	521025	14
47	460527	698	981095	64	479432	761	520568	13
48	460946	697	981057	64	479889	761	520111	12
49	461364	696	981019	64	480345	760	519655	11
50	461782	695	980981	64	480801	759	519199	10
51	9.462199	695	9.980942	64	9.481257	759	10.518743	9
52	462616	694	980904	64	481712	758	518288	8
53	463032	693	980866	64	482167	757	517833	7
54	463448	693	980827	64	482621	757	517379	6
55	463864	692	980789	64	483075	756	516925	5
56	464279	691	980750	64	483529	755	516471	4
57	464694	690	980712	64	483982	755	516018	3
58	465108	690	980673	64	484435	754	515565	2
59	465522	689	980635	64	484887	753	515113	1
60	465935	688	980596	64	485339	753	514661	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.465935	688	9.980596	64	9.485339	755	10.514661	60
1	466348	688	980558	64	485791	752	514209	59
2	466761	687	980519	65	486242	751	513758	58
3	467173	686	980480	65	486693	751	513307	57
4	467585	685	980442	65	487143	750	512857	56
5	467996	685	980403	65	487593	749	512407	55
6	468407	684	980364	65	488043	749	511957	54
7	468817	683	980325	65	488492	748	511508	53
8	469227	683	980286	65	488941	747	511059	52
9	469637	682	980247	65	489390	747	510610	51
10	470046	681	980208	65	489838	746	510162	50
11	9.470455	680	9.980169	65	9.490286	746	10.509714	49
12	470863	680	980130	65	490733	745	509267	48
13	471271	679	980091	65	491180	744	508820	47
14	471679	678	980052	65	491627	744	508373	46
15	472086	678	980012	65	492073	743	507927	45
16	472492	677	979973	65	492519	743	507481	44
17	472898	676	979934	66	492965	742	507035	43
18	473304	676	979895	66	493410	741	506590	42
19	473710	675	979855	66	493854	740	506146	41
20	474115	674	979816	66	494299	740	505701	40
21	9.474519	674	9.979776	66	9.494743	740	10.505257	39
22	474923	673	979737	66	495186	739	504814	38
23	475327	672	979697	66	495630	738	504370	37
24	475730	672	979658	66	496073	737	503927	36
25	476133	671	979618	66	496515	737	503485	35
26	476536	670	979579	66	496957	736	503043	34
27	476938	669	979539	66	497399	736	502601	33
28	477340	669	979499	66	497841	735	502159	32
29	477741	668	979459	66	498282	734	501718	31
30	478142	667	979420	66	498722	734	501278	30
31	9.478542	667	9.979380	66	9.499163	733	10.500837	29
32	478942	666	979340	66	499603	733	500397	28
33	479342	665	979300	67	500042	732	499958	27
34	479741	665	979260	67	500481	731	499519	26
35	480140	664	979220	67	500920	731	499080	25
36	480539	663	979180	67	501359	730	498641	24
37	480937	663	979140	67	501797	730	498203	23
38	481334	662	979100	67	502235	729	497765	22
39	481731	661	979059	67	502672	728	497328	21
40	482128	661	979019	67	503109	728	496891	20
41	9.482525	660	9.978979	67	9.503546	727	10.496454	19
42	482921	659	978939	67	503982	727	496018	18
43	483316	659	978898	67	504418	726	495582	17
44	483712	658	978858	67	504854	725	495146	16
45	484107	657	978817	67	505289	725	494711	15
46	484501	657	978777	67	505724	724	494276	14
47	484895	656	978736	67	506159	724	493841	13
48	485289	655	978696	68	506593	723	493407	12
49	485682	655	978655	68	507027	722	492973	11
50	486075	654	978615	68	507460	722	492540	10
51	9.486467	653	9.978574	68	9.507893	721	10.492107	9
52	486860	653	978533	68	508326	721	491674	8
53	487251	652	978493	68	508759	720	491241	7
54	487643	651	978452	68	509191	719	490809	6
55	488034	651	978411	68	509622	719	490378	5
56	488424	650	978370	68	510054	718	489946	4
57	488814	650	978329	68	510485	718	489515	3
58	489204	649	978288	68	510916	717	489084	2
59	489593	648	978247	68	511346	716	488654	1
60	489982	648	978206	68	511776	716	488224	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

72 Degrés.

M.	Sinus	D	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.489982	648	9.978206	68	9.511776	716	10.488224	60
1	490371	648	978165	68	512206	716	487794	59
2	490759	647	978124	68	512635	715	487365	58
3	491147	646	978083	69	513064	714	486936	57
4	491535	646	978042	69	513493	714	486507	56
5	491922	645	978001	69	513921	713	486079	55
6	492308	644	977959	69	514349	713	485651	54
7	492695	644	977918	69	514777	712	485223	53
8	493081	643	977877	69	515204	712	484796	52
9	493466	642	977835	69	515631	711	484369	51
10	493851	642	977794	69	516057	710	483943	50
11	9.494236	641	9.977752	69	9.516484	710	10.483516	49
12	494621	641	977711	69	516910	709	483090	48
13	495005	640	977669	69	517335	709	482665	47
14	495388	639	977628	69	517761	708	482239	46
15	495772	639	977586	69	518185	708	481815	45
16	496154	638	977544	70	518610	707	481390	44
17	496537	637	977503	70	519034	706	480966	43
18	496919	637	977461	70	519458	706	480542	42
19	497301	636	977419	70	519882	705	480118	41
20	497682	636	977377	70	520305	705	479695	40
21	9.498064	635	9.977335	70	9.520728	704	10.479272	39
22	498444	634	977293	70	521151	703	478849	38
23	498825	634	977251	70	521573	703	478427	37
24	499204	633	977209	70	521995	703	478005	36
25	499584	632	977167	70	522417	702	477583	35
26	499963	632	977125	70	522838	702	477162	34
27	500342	631	977083	70	523259	701	476741	33
28	500721	631	977041	70	523680	701	476320	32
29	501099	630	976999	70	524100	700	475900	31
30	501476	629	976957	70	524520	699	475480	30
31	9.501854	629	9.976914	70	9.524939	699	10.475061	29
32	502231	628	976872	71	525359	698	474641	28
33	502607	628	976830	71	525778	698	474222	27
34	502984	627	976787	71	526197	697	473803	26
35	503360	626	976745	71	526615	697	473385	25
36	503735	626	976702	71	527033	696	472967	24
37	504110	625	976660	71	527451	696	472549	23
38	504485	625	976617	71	527868	695	472132	22
39	504860	624	976574	71	528285	695	471715	21
40	505234	623	976532	71	528702	694	471298	20
41	9.505608	623	9.976489	71	9.529119	693	10.470881	19
42	505981	622	976446	71	529535	693	470465	18
43	506354	622	976404	71	529950	693	470050	17
44	506727	621	976361	71	530366	692	469634	16
45	507099	620	976318	71	530781	691	469219	15
46	507471	620	976275	71	531196	691	468804	14
47	507843	619	976232	72	531611	690	468389	13
48	508214	619	976189	72	532025	690	467975	12
49	508585	618	976146	72	532439	689	467561	11
50	508956	618	976103	72	532853	689	467147	10
51	9.509326	617	9.976060	72	9.533266	688	10.466734	9
52	509696	616	976017	72	533679	688	466321	8
53	510065	616	975974	72	534092	687	465908	7
54	510434	615	975930	72	534504	687	465496	6
55	510803	615	975887	72	534916	686	465084	5
56	511172	614	975844	72	535328	686	464672	4
57	511540	613	975800	72	535739	685	464261	3
58	511907	613	975757	72	536150	685	463850	2
59	512275	612	975714	72	536561	684	463439	1
60	512642	612	975670	72	536972	684	463028	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

71 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.512642	612	9.975670	73	9.536972	684	10.463028	60
1	513009	611	975627	73	537382	683	462618	59
2	513375	611	975583	73	537792	683	462208	58
3	513741	610	975539	73	538202	682	461798	57
4	514107	609	975496	73	538611	682	461389	56
5	514472	609	975452	73	539020	681	460980	55
6	514837	608	975408	73	539429	681	460571	54
7	515202	608	975365	73	539837	680	460163	53
8	515566	607	975321	73	540245	680	459755	52
9	515930	607	975277	73	540653	679	459347	51
10	516294	606	975233	73	541061	679	458939	50
11	9.516657	605	9.975189	73	9.541468	678	10.458532	49
12	517020	605	975145	73	541875	678	458125	48
13	517382	604	975101	73	542281	677	457719	47
14	517745	604	975057	73	542688	677	457312	46
15	518107	603	975013	73	543094	676	456906	45
16	518468	603	974969	74	543499	676	456501	44
17	518829	602	974925	74	543905	675	456095	43
18	519190	601	974880	74	544310	675	455690	42
19	519551	601	974836	74	544715	674	455285	41
20	519911	600	974792	74	545119	674	454881	40
21	9.520271	600	9.974748	74	9.545524	673	10.454476	39
22	520631	599	974703	74	545928	673	454072	38
23	520990	599	974659	74	546331	672	453669	37
24	521349	598	974614	74	546735	672	453265	36
25	521707	598	974570	74	547138	671	452862	35
26	522066	597	974525	74	547540	671	452460	34
27	522424	596	974481	74	547943	670	452057	33
28	522781	596	974436	74	548345	670	451655	32
29	523138	595	974391	74	548747	669	451253	31
30	523495	595	974347	75	549149	669	450851	30
31	9.523852	594	9.974302	75	9.549550	668	10.450450	29
32	524208	594	974257	75	549951	668	450049	28
33	524564	593	974212	75	550352	667	449648	27
34	524920	593	974167	75	550752	667	449248	26
35	525275	592	974122	75	551152	666	448848	25
36	525630	591	974077	75	551552	666	448448	24
37	525984	591	974032	75	551952	665	448048	23
38	526339	590	973987	75	552351	665	447649	22
39	526693	590	973942	75	552750	665	447250	21
40	527046	589	973897	75	553149	664	446851	20
41	9.527400	589	9.973852	75	9.553548	664	10.446452	19
42	527753	588	973807	75	553946	663	446054	18
43	528105	588	973761	75	554344	663	445656	17
44	528458	587	973716	76	554741	662	445259	16
45	528810	587	973671	76	555139	662	444861	15
46	529161	586	973625	76	555536	661	444464	14
47	529513	586	973580	76	555933	661	444067	13
48	529864	585	973535	76	556329	660	443671	12
49	530215	585	973489	76	556725	660	443275	11
50	530565	584	973444	76	557121	659	442879	10
51	9.530915	584	9.973398	76	9.557517	659	10.442483	9
52	531265	583	973352	76	557913	659	442087	8
53	531614	582	973307	76	558308	658	441692	7
54	531963	582	973261	76	558702	658	441298	6
55	532312	581	973215	76	559097	657	440903	5
56	532661	581	973169	76	559491	657	440509	4
57	533009	580	973124	76	559885	656	440115	3
58	533357	580	973078	76	560279	656	439721	2
59	533704	579	973032	77	560673	655	439327	1
60	534052	578	972986	77	561066	655	438934	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

70 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.534052	578	9.972986	77	9.561066	655	10.438934	60
1	534399	577	972940	77	561459	654	438541	59
2	534745	577	972894	77	561851	654	438149	58
3	535092	577	972848	77	562244	653	437756	57
4	535438	576	9728[illegible]	77	562636	653	437364	56
5	535783	576	972755	77	563028	653	436972	55
6	536129	575	972709	77	563419	652	436581	54
7	536474	574	97266[illegible]	77	563811	652	436189	53
8	536818	574	972617	77	564202	651	435798	52
9	537163	573	972570	77	564592	651	435408	51
10	537507	573	972524	77	564983	650	435017	50
11	9.537851	572	9.972478	77	9.565373	650	10.434627	49
12	538194	572	972431	78	565763	649	434237	48
13	538538	571	972385	78	566153	649	433847	47
14	538880	571	972338	78	566542	649	433458	46
15	539223	570	972291	78	566932	648	433068	45
16	539565	570	972245	78	567320	648	432680	44
17	539907	569	972198	78	567709	647	432291	43
18	540249	569	972151	78	568098	647	431902	42
19	540590	568	972105	78	568486	646	431514	41
20	540931	568	972058	78	568873	646	431127	40
21	9.541272	567	9.972011	78	9.569261	645	10.430739	39
22	541613	567	971964	78	569648	645	430352	38
23	541953	566	971917	78	570035	645	429965	37
24	542293	566	971870	78	570422	644	429578	36
25	542632	565	971823	78	570809	644	429191	35
26	542971	565	971776	78	571195	643	428805	34
27	543310	564	971729	79	571581	643	428419	33
28	543649	564	971682	79	571967	642	428033	32
29	543987	563	971635	79	572352	642	427648	31
30	544325	563	971588	79	572738	642	427262	30
31	9.544663	562	9.971540	79	9.573123	641	10.426877	29
32	545000	562	971493	79	573507	641	426493	28
33	545338	561	971446	79	573892	640	426108	27
34	545674	561	971398	79	574276	640	425724	26
35	546011	560	971351	79	574660	639	425340	25
36	546347	560	971303	79	575044	639	424956	24
37	546683	559	971256	79	575427	639	424573	23
38	547019	559	971208	79	575810	638	424190	22
39	547354	558	971161	79	576193	638	423807	21
40	547689	558	971113	79	576576	637	423424	20
41	9.548024	557	9.971066	80	9.576958	637	10.423041	19
42	548359	557	971018	80	577341	636	422659	18
43	548693	556	970970	80	577723	636	422277	17
44	549027	556	970922	80	578104	636	421896	16
45	549360	555	970874	80	578486	635	421514	15
46	549693	555	970827	80	578867	635	421133	14
47	550026	554	970779	80	579248	634	420752	13
48	550359	554	970731	80	579629	634	420371	12
49	550692	553	970683	80	580009	634	419991	11
50	551024	553	970635	80	580389	633	419611	10
51	9.551356	552	9.970586	80	9.580769	633	10.419231	9
52	551687	552	970538	80	581149	632	418851	8
53	552018	552	970490	80	581528	632	418472	7
54	552349	551	970442	80	581907	632	418093	6
55	552680	551	970394	80	582286	631	417714	5
56	553010	550	970345	81	582665	631	417335	4
57	553341	550	970297	81	583043	630	416957	3
58	553670	549	970249	81	583422	630	416578	2
59	554000	549	970200	81	583800	629	416200	1
60	554329	548	970152	81	584177	629	415823	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

69 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.554329	548	9.970152	81	9.584177	629	10.415823	60
1	554658	548	970103	81	584555	629	415445	59
2	554987	547	970055	81	584932	628	415068	58
3	555315	547	970006	81	585309	628	414691	57
4	555643	546	969957	81	585686	627	414314	56
5	555971	546	969909	81	586062	627	413938	55
6	556299	545	969860	81	586439	627	413561	54
7	556626	545	969811	81	586815	626	413185	53
8	556953	544	969762	81	587190	626	412810	52
9	557280	544	969714	81	587566	625	412434	51
10	557606	543	969665	81	587941	625	412059	50
11	9.557932	543	9.969616	82	9.588316	625	10.411684	49
12	558258	543	969567	82	588691	624	411309	48
13	558583	542	969518	82	589066	624	410934	47
14	558909	542	969469	82	589440	623	410560	46
15	559234	541	969420	82	589814	623	410186	45
16	559558	541	969370	82	590188	623	409812	44
17	559883	540	969321	82	590562	622	409438	43
18	560207	540	969272	82	590935	622	409065	42
19	560531	539	969223	82	591308	622	408692	41
20	560855	539	969173	82	591681	621	408319	40
21	9.561178	538	9.969124	82	9.592054	621	10.407946	39
22	561501	538	969075	82	592426	620	407574	38
23	561824	537	969025	82	592798	620	407202	37
24	562146	537	968976	82	593170	619	406829	36
25	562468	536	968926	83	593542	619	406458	35
26	562790	536	968877	83	593914	618	406086	34
27	563112	536	968827	83	594285	618	405715	33
28	563433	535	968777	83	594656	618	405344	32
29	563755	535	968728	83	595027	617	404973	31
30	564075	534	968678	83	595398	617	404602	30
31	9.564396	534	9.968628	83	9.595768	617	10.404232	29
32	564716	533	968578	83	596138	616	403862	28
33	565036	533	968528	83	596508	616	403492	27
34	565356	532	968479	83	596878	616	403122	26
35	565676	532	968429	83	597247	615	402753	25
36	565995	531	968379	83	597616	615	402384	24
37	566314	531	968329	83	597985	615	402015	23
38	566632	531	968278	83	598354	614	401646	22
39	566951	530	968228	84	598722	614	401278	21
40	567269	530	968178	84	599091	613	400909	20
41	9.567587	529	9.968128	84	9.599459	613	10.400541	19
42	567904	529	968078	84	599827	613	400173	18
43	568222	528	968027	84	600194	612	399806	17
44	568539	528	967977	84	600562	612	399438	16
45	568856	528	967927	84	600929	611	399071	15
46	569172	527	967876	84	601296	611	398704	14
47	569488	527	967826	84	601662	611	398338	13
48	569804	526	967775	84	602029	610	397971	12
49	570120	526	967725	84	602395	610	397605	11
50	570435	525	967674	84	602761	610	397239	10
51	9.570751	525	9.967624	84	9.603127	609	10.396873	9
52	571066	524	967573	84	603493	609	396507	8
53	571380	524	967522	85	603858	609	396142	7
54	571695	523	967471	85	604223	608	395777	6
55	572009	523	967421	85	604588	608	395412	5
56	572323	523	967370	85	604953	607	395047	4
57	572636	522	967319	85	605317	607	394683	3
58	572950	522	967268	85	695682	607	394318	2
59	573263	521	967217	85	606046	606	393954	1
60	573575	521	967166	85	606410	606	393590	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M

68 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.573575	521	9.967166	85	9.606410	606	10.393590	60
1	573888	520	967115	85	606773	606	393227	59
2	574200	520	967064	85	607137	605	392863	58
3	574512	519	967013	85	607500	605	392500	57
4	574824	519	966961	85	607863	604	392137	56
5	575136	519	966910	85	608225	604	391775	55
6	575447	518	966859	85	608588	604	391412	54
7	575758	518	966808	85	608950	603	391050	53
8	576069	517	966756	86	609312	603	390688	52
9	576379	517	966705	86	609674	603	390326	51
10	576689	516	966653	86	610036	602	389964	50
11	9.576999	516	9.966602	86	9.610397	602	10.389603	49
12	577309	516	966550	86	610759	602	389241	48
13	577618	515	966499	86	611120	601	388880	47
14	577927	515	966447	86	611480	601	388520	46
15	578236	514	966395	86	611841	601	388159	45
16	578545	514	966344	86	612201	600	387799	44
17	578853	513	966292	86	612561	600	387439	43
18	579162	513	966240	86	612921	600	387079	42
19	579470	513	966188	86	613281	599	386719	41
20	579777	512	966136	86	613641	599	386359	40
21	9.580085	512	9.966085	87	9.614000	598	10.386000	39
22	580392	511	966033	87	614359	598	385641	38
23	580699	511	965981	87	614718	598	385282	37
24	581005	511	965928	87	615077	597	384923	36
25	581312	510	965876	87	615435	597	384565	35
26	581618	510	965824	87	615793	597	384207	34
27	581924	509	965772	87	616151	596	383849	33
28	582229	509	965720	87	616509	596	383491	32
29	582535	509	965668	87	616867	596	383133	31
30	582840	508	965615	87	617224	595	382776	30
31	9.583145	508	9.965563	87	9.617582	595	10.382418	29
32	583449	507	965511	87	617939	595	382061	28
33	583754	507	965458	87	618295	594	381705	27
34	584058	506	965406	87	618652	594	381348	26
35	584361	506	965353	88	619008	594	380992	25
36	584665	506	965301	88	619364	593	380636	24
37	584968	505	965248	88	619721	593	380279	23
38	585272	505	965195	88	620076	593	379924	22
39	585574	504	965143	88	620432	592	379568	21
40	585877	504	965090	88	620787	592	379213	20
41	9.586179	503	9.965037	88	9.621142	592	10.378858	19
42	586482	503	964984	88	621497	591	378503	18
43	586783	503	964931	88	621852	591	378148	17
44	587085	502	964879	88	622207	590	377793	16
45	587386	502	964826	88	622561	590	377439	15
46	587688	501	964773	88	622915	590	377085	14
47	587989	501	964719	88	623269	589	376731	13
48	588289	501	964666	89	623623	589	376377	12
49	588590	500	964613	89	623976	589	376024	11
50	588890	500	964560	89	624330	588	375670	10
51	9.589190	499	9.964507	89	9.624683	588	10.375317	9
52	589489	499	964454	89	625036	588	374964	8
53	589789	499	964400	89	625388	587	374612	7
54	590088	498	964347	89	625741	587	374259	6
55	590387	498	964294	89	626093	587	373907	5
56	590686	497	964240	89	626445	586	373555	4
57	590984	497	964187	89	626797	586	373203	3
58	591282	497	964133	89	627149	586	372851	2
59	591580	496	964180	89	627501	585	372499	1
60	591878	496	964026	89	627852	585	372148	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

67 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.591878	496	9.964026	89	9.627852	585	10.372148	60
1	592176	495	963972	89	628203	585	371797	59
2	592473	495	963919	89	628554	585	371446	58
3	592770	495	963865	90	628905	584	371095	57
4	593067	494	963811	90	629255	584	370745	56
5	593363	494	963757	90	629606	583	370394	55
6	593659	493	963704	90	629956	583	370044	54
7	593955	493	963650	90	630306	583	369694	53
8	594251	493	963596	90	630656	583	369344	52
9	594547	492	963542	90	631005	582	368995	51
10	594842	492	963488	90	631355	582	368645	50
11	9.595137	491	9.963434	90	9.631704	582	10.368296	49
12	595432	491	963379	90	632053	581	367947	48
13	595727	491	963325	90	632401	581	367599	47
14	596021	490	963271	90	632750	581	367250	46
15	596315	490	963217	90	633098	580	366902	45
16	596609	489	963163	90	633447	580	366553	44
17	596903	489	963108	91	633795	580	366205	43
18	597196	489	963054	91	634143	579	365857	42
19	597490	488	962999	91	634490	579	365510	41
20	597783	488	962945	91	634838	579	365162	40
21	9.598075	487	9.962890	91	9.635185	578	10.364815	39
22	598368	487	962836	91	635532	578	364468	38
23	598660	487	962781	91	635879	578	364121	37
24	598952	486	962727	91	636226	577	363774	36
25	599244	486	962672	91	636572	577	363428	35
26	599536	485	962617	91	636919	577	363081	34
27	599827	485	962562	91	637265	577	362735	33
28	600118	485	962508	91	637611	576	362389	32
29	600409	484	962453	91	637956	576	362044	31
30	600700	484	962398	92	638302	576	361698	30
31	9.600990	484	9.962343	92	9.638647	575	10.361353	29
32	601280	483	962288	92	638992	575	361008	28
33	601570	483	962233	92	639337	575	360663	27
34	601860	482	962178	92	639682	574	360318	26
35	602150	482	962123	92	640027	574	359973	25
36	602439	482	962067	92	640371	574	359629	24
37	602728	481	962012	92	640716	573	359284	23
38	603017	481	961957	92	641060	573	358940	22
39	603305	481	961902	92	641404	573	358596	21
40	603594	480	961846	92	641747	572	358253	20
41	9.603882	480	9.961791	92	9.642091	572	10.357909	19
42	604170	479	961735	92	642434	572	357566	18
43	604457	479	961680	92	642777	572	357223	17
44	604745	479	961624	93	643120	571	356880	16
45	605032	478	961569	93	643463	571	356537	15
46	605319	478	961513	93	643806	571	356194	14
47	605606	478	961458	93	644148	570	355852	13
48	605892	477	961402	93	644490	570	355510	12
49	606179	477	961346	93	644832	570	355168	11
50	606465	476	961290	93	645174	569	354826	10
51	9.606751	476	9.961235	93	9.645516	569	10.354484	9
52	607036	476	961179	93	645857	569	354143	8
53	607322	475	961123	93	646199	569	353801	7
54	607607	475	961067	93	646540	568	353460	6
55	607892	474	961011	93	646881	568	353119	5
56	608177	474	960955	93	647222	568	352778	4
57	608461	474	960899	93	647562	567	352438	3
58	608745	473	960843	94	647903	567	352097	2
59	609029	473	960786	94	648243	567	351757	1
60	609313	473	960730	94	648583	566	351417	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M

66 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.609313	473	9.960730	94	9.648583	566	10.351417	60
1	609597	472	960674	94	648923	566	351077	59
2	609880	472	960618	94	649263	566	350737	58
3	610164	472	960561	94	649602	566	350398	57
4	610447	471	960505	94	649942	565	350058	56
5	610729	471	960448	94	650281	565	349719	55
6	611012	470	960392	94	650620	565	349380	54
7	611294	470	960335	94	650959	564	349041	53
8	611576	470	960279	94	651297	564	348703	52
9	611858	469	960222	94	651636	564	348364	51
10	612140	469	960165	94	651974	563	348026	50
11	9.612421	469	9.960109	95	9.652312	563	10.347688	49
12	612702	468	960052	95	652650	563	347350	48
13	612983	468	959995	95	652988	563	347012	47
14	613264	467	959938	95	653326	562	346674	46
15	613545	467	959882	95	653663	562	346337	45
16	613825	467	959825	95	654000	562	346000	44
17	614105	466	959768	95	654337	561	345663	43
18	614385	466	959711	95	654674	561	345326	42
19	614665	466	959654	95	655011	561	344989	41
20	614944	465	959596	95	655348	561	344652	40
21	9.615223	465	9.959539	95	9.655684	560	10.344316	39
22	615502	465	959482	95	656020	560	343980	38
23	615781	464	959425	95	656356	560	343644	37
24	616060	464	959368	95	656692	559	343308	36
25	616338	464	959310	96	657028	559	342972	35
26	616616	463	959253	96	657364	559	342636	34
27	616894	463	959195	96	657699	559	342301	33
28	617172	462	959138	96	658034	558	341966	32
29	617450	462	959081	96	658369	558	341631	31
30	617727	462	959023	96	658704	558	341296	30
31	9.618004	461	9.958965	96	9.659039	558	10.340961	29
32	618281	461	958908	96	659373	557	340627	28
33	618558	461	958850	96	659708	557	340292	27
34	618834	460	958792	96	660042	557	339958	26
35	619110	460	958734	96	660376	557	339624	25
36	619386	460	958677	96	660710	556	339290	24
37	619662	459	958619	96	661043	556	338957	23
38	619938	459	958561	96	661377	556	338623	22
39	620213	459	958503	97	661710	555	338290	21
40	620488	458	958445	97	662043	555	337957	20
41	9.620763	458	9.958387	97	9.662376	555	10.337624	19
42	621038	457	958329	97	662709	554	337291	18
43	621313	457	958271	97	663042	554	336958	17
44	621587	457	958213	97	663375	554	336625	16
45	621861	456	958154	97	663707	554	336293	15
46	622135	456	958096	97	664039	553	335961	14
47	622409	456	958038	97	664371	553	335629	13
48	622682	455	957979	97	664703	553	335297	12
49	622956	455	957921	97	665035	553	334965	11
50	623229	455	957863	97	665366	552	334634	10
51	9.623502	454	9.957804	97	9.665697	552	10.334303	9
52	623774	454	957746	98	666029	552	333971	8
53	624047	454	957687	98	666360	551	333640	7
54	624319	453	957628	98	666691	551	333309	6
55	624591	453	957570	98	667021	551	332979	5
56	624863	453	957511	98	667352	551	332648	4
57	625135	452	957452	98	667682	550	332318	3
58	625406	452	957393	98	668013	550	331987	2
59	625677	452	957335	98	668343	550	331657	1
60	625948	451	957276	98	668672	550	331328	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

65 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.625948	451	9.957276	98	9.668673	550	10.331327	60
1	626219	451	957217	98	669002	549	330998	59
2	626490	451	957158	98	669332	549	330668	58
3	626760	450	957099	98	669661	549	330339	57
4	627030	450	957040	98	669991	548	330009	56
5	627300	450	956981	98	670320	548	329680	55
6	627570	449	956921	99	670649	548	329351	54
7	627840	449	956862	99	670977	548	329023	53
8	628109	449	956803	99	671306	547	328694	52
9	628378	448	956744	99	671634	547	328366	51
10	628647	448	956684	99	671963	547	328037	50
11	9.628916	447	9.956625	99	9.672291	547	10.327709	49
12	629185	447	956566	99	672619	546	327381	48
13	629453	447	956506	99	672947	546	327053	47
14	629721	446	956447	99	673274	546	326726	46
15	629989	446	956387	99	673602	546	326398	45
16	630257	446	956327	99	673929	545	326071	44
17	630524	446	956268	99	674257	545	325743	43
18	630792	445	956208	100	674584	545	325416	42
19	631059	445	956148	100	674910	544	325090	41
20	631326	445	956089	100	675237	544	324763	40
21	9.631593	444	9.956029	100	9.675564	544	10.324436	39
22	631859	444	955969	100	675890	544	324110	38
23	632125	444	955909	100	676216	543	323784	37
24	632392	443	955849	100	676543	543	323457	36
25	632658	443	955789	100	676869	543	323131	35
26	632923	443	955729	100	677194	543	322806	34
27	633189	442	955669	100	677520	542	322480	33
28	633454	442	955609	100	677846	542	322154	32
29	633719	442	955548	100	678171	542	321829	31
30	633984	441	955488	100	678496	542	321504	30
31	9.634249	441	9.955428	101	9.678821	541	10.321179	29
32	634514	440	955368	101	679146	541	320854	28
33	634778	440	955307	101	679471	541	320529	27
34	635042	440	955247	101	679795	541	320205	26
35	635306	439	955186	101	680120	540	319880	25
36	635570	439	955126	101	680444	540	319556	24
37	635834	439	955065	101	680768	540	319232	23
38	636097	438	955005	101	681092	540	318908	22
39	636360	438	954944	101	681416	539	318584	21
40	636623	438	954883	101	681740	539	318260	20
41	9.636886	437	9.954823	101	9.682063	539	10.317937	19
42	637148	437	954762	101	682387	539	317613	18
43	637411	437	954701	101	682710	538	317290	17
44	637673	437	954640	101	683033	538	316967	16
45	637935	436	954579	101	683356	538	316644	15
46	638197	436	954518	102	683679	538	316321	14
47	638458	436	954457	102	684001	537	315999	13
48	638720	435	954396	102	684324	537	315676	12
49	638981	435	954335	102	684646	537	315354	11
50	639242	435	954274	102	684968	537	315032	10
51	9.639503	434	9.954213	102	9.685290	536	10.314710	9
52	639764	434	954152	102	685612	536	314388	8
53	640024	434	954090	102	685934	536	314066	7
54	640284	433	954029	102	686255	536	313745	6
55	640544	433	953968	102	686577	535	313423	5
56	640804	433	953906	102	686898	535	313102	4
57	641064	432	953845	102	687219	535	312781	3
58	641324	432	953783	102	687540	535	312460	2
59	641584	432	953722	103	687861	534	312139	1
60	641842	431	953660	103	688182	534	311818	0
	Co[illegible]		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.641842	431	9.953660	103	9.688182	534	10.311818	60
1	642101	431	953599	103	688502	534	311498	59
2	642360	431	953537	103	688823	534	311177	58
3	642618	430	953475	103	689143	533	310857	57
4	642877	430	953413	103	689463	533	310537	56
5	643135	430	953352	103	689783	533	310217	55
6	643393	430	953290	103	690103	533	309897	54
7	643650	429	953228	103	690423	533	309577	53
8	643908	429	953166	103	690742	532	309258	52
9	644165	429	953104	103	691062	532	308938	51
10	644423	428	953042	103	691381	532	308619	50
11	9.644680	428	9.952980	104	9.691700	531	10.308300	49
12	644936	428	952918	104	692019	531	307981	48
13	645193	427	952855	104	692338	531	307662	47
14	645450	427	952793	104	692656	531	307344	46
15	645706	427	952731	104	692975	531	307025	45
16	645962	426	952669	104	693293	530	306707	44
17	646218	426	952606	104	693612	530	306388	43
18	646474	426	952544	104	693930	530	306070	42
19	646729	425	952481	104	694248	530	305752	41
20	646984	425	952419	104	694566	529	305434	40
21	9.647240	425	9.952356	104	9.694883	529	10.305117	39
22	647494	424	952294	104	695201	529	304799	38
23	647749	424	952231	104	695518	529	304482	37
24	648004	424	952168	105	695836	529	304164	36
25	648258	424	952106	105	696153	528	303847	35
26	648512	423	952043	105	696470	528	303530	34
27	648766	423	951980	105	696787	528	303213	33
28	649020	423	951917	105	697103	528	302897	32
29	649274	422	951854	105	697420	527	302580	31
30	649527	422	951791	105	697736	527	302264	30
31	9.649781	422	9.951728	105	9.698053	527	10.301947	29
32	650034	422	951665	105	698369	527	301631	28
33	650287	421	951602	105	698685	526	301315	27
34	650539	421	951539	105	699001	526	300999	26
35	650792	421	951476	105	699316	526	300684	25
36	651044	420	951412	105	699632	526	300368	24
37	651297	420	951349	106	699947	526	300053	23
38	651549	420	951286	106	700263	525	299737	22
39	651800	419	951222	106	700578	525	299422	21
40	652052	419	951159	106	700893	525	299107	20
41	9.652304	419	9.951096	106	9.701208	524	10.298792	19
42	652555	418	951032	106	701523	524	298477	18
43	652806	418	950968	106	701837	524	298163	17
44	653057	418	950905	106	702152	524	297848	16
45	653308	418	950841	106	702466	524	297534	15
46	653558	417	950778	106	702780	523	297220	14
47	653808	417	950714	106	703095	523	296905	13
48	654059	417	950650	106	703409	523	296591	12
49	654309	416	950586	106	703723	523	296277	11
50	654558	416	950522	107	704036	522	295964	10
51	9.654808	416	9.950458	107	9.704350	522	10.295650	9
52	655058	416	950394	107	704663	522	295337	8
53	655307	415	950330	107	704977	522	295023	7
54	655556	415	950266	107	705290	522	294710	6
55	655805	415	950202	107	705603	521	294397	5
56	656054	414	950138	107	705916	521	294084	4
57	656302	414	950074	107	706228	521	293772	3
58	656551	414	950010	107	706541	521	293459	2
59	656799	413	949945	107	706854	521	293146	1
60	657047	413	949881	107	707166	520	292834	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.657047	413	9.949881	107	9.707166	520	10.292834	60
1	657295	413	949816	107	707478	520	292522	59
2	657542	412	949752	107	707790	520	292210	58
3	657790	412	949688	108	708102	520	291898	57
4	658037	412	949623	108	708414	519	291586	56
5	658284	412	949558	108	708726	519	291274	55
6	658531	411	949494	108	709037	519	290963	54
7	658778	411	949429	108	709349	519	290651	53
8	659025	411	949364	108	709660	519	290340	52
9	659271	410	949300	108	709971	518	290029	51
10	659517	410	949235	108	710282	518	289718	50
11	9.659763	410	9.949170	108	9.710593	518	10.289407	49
12	660009	409	949105	108	710904	518	289096	48
13	660255	409	949040	108	711215	518	288785	47
14	660501	409	948975	108	711525	517	288475	46
15	660746	409	948910	108	711836	517	288164	45
16	660991	408	948845	108	712146	517	287854	44
17	661236	408	94878[illegible]	109	712456	517	287544	43
18	661481	408	948715	109	712766	516	287234	42
19	661726	407	948650	109	713076	516	286924	41
20	661970	407	948584	109	713386	516	286614	40
21	9.662214	407	9.948519	109	9.713696	516	10.286304	39
22	662459	407	948454	109	714005	516	[illegible]	38
23	662703	406	948388	109	714314	515	[illegible]	37
24	662946	406	948323	109	714624	515	285376	36
25	663190	406	948257	109	714933	515	285067	35
26	663433	405	948192	109	715242	515	284758	34
27	663677	405	948126	109	715551	514	284449	33
28	663920	405	948060	109	715860	514	284140	32
29	6641[illegible]	405	947995	110	716168	514	283832	31
30	664406	404	947929	110	716477	514	283523	30
31	9.664648	404	9.947863	110	9.716785	514	10.283215	29
32	664891	404	947797	110	717093	513	282907	28
33	665133	403	947731	110	717401	513	282599	27
34	665375	403	947665	110	717709	513	282291	26
35	665617	403	947600	110	718017	513	281983	25
36	665859	402	947533	110	718325	513	281675	24
37	666100	402	947467	110	718633	512	281367	23
38	666342	402	947401	110	718940	512	281060	22
39	666583	402	947335	110	719248	512	280752	21
40	666824	401	947269	110	719555	512	280445	20
41	9.667065	401	9.947203	110	9.719862	512	10.280138	19
42	667305	401	947136	111	720169	511	279831	18
43	667546	401	947070	111	720476	511	279524	17
44	667786	400	947004	111	720783	511	279217	16
45	668027	400	946937	111	721089	511	278911	15
46	668267	406	946871	111	721396	511	278604	14
47	668506	399	946804	111	721702	510	278298	13
48	668746	399	946738	111	722009	510	277991	12
49	668986	399	946671	111	722315	510	277685	11
50	669225	399	946604	111	722621	510	277379	10
51	9.669464	398	9.946538	111	9.722927	510	10.277073	9
52	669703	398	946471	111	723232	509	276768	8
53	669942	398	946404	111	723538	509	276462	7
54	670181	397	946337	111	723844	509	276156	6
55	67[illegible]119	397	946270	112	724149	509	275851	5
56	670658	397	946203	112	724454	509	275546	4
57	670896	397	946136	112	724759	508	275241	3
58	671134	396	946069	112	725065	508	274935	2
59	671372	396	946002	112	725369	508	274631	1
60	671609	396	945935	112	725674	508	274326	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M

62 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.671609	396	9.945935	112	9.725674	508	10.274326	60
1	671847	395	945868	112	725979	508	274021	59
2	672084	395	945800	112	726284	507	273716	58
3	672321	395	945733	112	726588	507	273412	57
4	672558	395	945666	112	726892	507	273108	56
5	672795	394	945598	112	727197	507	272803	55
6	673032	394	945531	112	727501	507	272499	54
7	673268	394	945464	113	727805	506	272195	53
8	673505	394	945396	113	728109	506	271891	52
9	673741	393	945328	113	728412	506	271588	51
10	673977	393	945261	113	728716	506	271284	50
11	9.674213	393	9.945193	113	9.729020	506	10.270980	49
12	674448	392	945125	113	729323	505	270677	48
13	674684	392	945058	113	729626	505	270374	47
14	674919	392	944990	113	729929	505	270071	46
15	675155	392	944922	113	730233	505	269767	45
16	675390	391	944854	113	730535	505	269465	44
17	675624	391	944786	113	730838	504	269162	43
18	675859	391	944718	113	731141	504	268859	42
19	676094	391	944650	113	731444	504	268556	41
20	676328	390	944582	114	731746	504	268254	40
21	9.676562	390	9.944514	114	9.732048	504	10.267952	39
22	676796	390	944446	114	732351	503	267649	38
23	677030	390	944377	114	732653	503	267347	37
24	677264	389	944309	114	732955	503	267045	36
25	677498	389	944241	114	,33257	503	266743	35
26	677731	389	944172	114	733558	503	266442	31
27	677964	388	944104	114	733860	502	266140	33
28	678197	388	944036	114	734162	502	265838	32
29	678430	388	943967	114	734463	502	265537	31
30	678663	388	943899	114	734764	502	265236	30
31	9.678895	387	9.943830	114	9.735066	502	10.264934	29
32	679128	387	943761	114	735367	502	264633	28
33	679360	387	943693	115	735668	501	264332	27
34	679592	387	943624	115	735969	501	26.031	26
35	679824	386	943555	115	736269	501	263731	25
36	680056	386	943486	115	736570	501	263430	24
37	680288	386	943417	115	736871	501	263129	23
38	680519	385	943348	115	737171	500	262829	22
39	680750	385	943279	115	737471	500	262529	21
40	680982	385	943210	115	737771	50.	262229	20
41	9.681213	385	9.943141	115	9.738071	500	10.261929	19
42	681443	384	943072	115	738371	500	261629	18
43	681674	384	943003	115	738671	499	261329	17
44	681905	384	942934	115	738971	499	261029	16
45	682135	384	942864	115	739271	499	260729	15
46	682365	383	942795	116	739570	499	260430	14
47	682595	.383	942726	116	739870	499	260130	13
48	682825	383	942656	116	740169	499	259831	12
49	683655	383	942587	116	740468	498	259532	11
50	683284	382	942517	116	740767	498	259233	10
51	9.683514	382	9.942448	116	9.741066	498	10.258934	9
52	683743	382	942378	116	741365	498	258635	8
53	683972	382	942308	116	741664	498	258336	7
54	684201	381	942239	116	741962	497	258038	6
55	684430	381	942169	116	742261	497	257739	5
56	684658	381	942099	116	742559	497	257441	4
57	684887	380	942029	116	742858	497	257142	3
58	685115	380	941959	116	743156	497	256844	2
59	685343	380	941889	117	743454	497	256546	1
60	685571	380	941819	117	743752	496	256248	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

61 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.686571	380	9.941819	117	9.743752	496	10.256248	60
1	685799	379	941749	117	744050	496	255950	59
2	686027	379	941679	117	744348	496	255652	58
3	686254	379	941609	117	744645	496	255355	57
4	686482	379	941539	117	744943	496	255057	56
5	686709	378	941469	117	745240	496	254760	55
6	686936	378	941398	117	745538	495	254462	54
7	687163	378	941328	117	745835	495	254165	53
8	687389	378	941258	117	746132	495	253868	52
9	687616	377	941187	117	746429	495	253571	51
10	687843	377	941117	117	746726	495	253274	50
11	9.688069	377	9.941046	118	9.747023	494	10.252977	49
12	688295	377	940975	118	747319	494	252681	48
13	688521	376	940905	118	747616	494	252384	47
14	688747	376	940834	118	747913	494	252087	46
15	688972	376	940763	118	748209	494	251791	45
16	689198	376	940693	118	748505	493	251495	44
17	689423	375	940622	118	748801	493	251199	43
18	689648	375	940551	118	749097	493	250903	42
19	689873	375	940480	118	749393	493	250607	41
20	690098	375	940409	118	749689	493	250311	40
21	9.690323	374	9.940338	118	9.749985	493	10.250015	39
22	690548	374	940267	118	750281	492	249719	38
23	690772	374	940196	118	750576	492	249424	37
24	690996	374	94[illegible]25	119	750872	492	249128	36
25	691220	373	940054	119	751167	492	248833	35
26	691444	373	939982	119	751462	492	248538	34
27	691668	373	939911	119	751757	492	248243	33
28	691892	373	939840	119	752052	491	247948	32
29	692115	372	939768	119	752347	491	247653	31
30	692339	372	939697	119	752642	491	247358	30
31	9.692562	372	9.939625	119	9.752937	491	10.247063	29
32	692785	371	939554	119	753231	491	243769	28
33	693008	371	939482	119	753526	491	246174	27
34	693231	371	939410	119	753820	490	246180	26
35	693[illegible]3	371	939339	119	754115	490	245885	25
36	693676	370	939267	120	754409	490	245591	24
37	693898	370	939195	120	754703	490	245297	23
38	694120	370	939123	120	754997	490	245003	22
39	694342	370	939052	120	755291	490	244709	21
40	694564	369	938980	120	755585	489	244415	20
41	9.694786	369	9.938908	120	9.755878	489	10.244122	19
42	695007	369	938836	120	756172	489	243828	18
43	695229	369	938763	120	756465	489	243535	17
44	695450	368	938691	120	756759	489	243241	16
45	695671	368	938619	120	757052	489	242948	15
46	695892	368	938547	120	757345	488	242655	14
47	696113	368	938475	120	757638	488	242362	13
48	696334	367	938402	121	757931	488	242069	12
49	696554	367	938330	121	758224	488	241776	11
50	696775	367	938258	121	758517	488	241483	10
51	9.696995	367	9.938185	121	9.7588[illegible]	488	10.241190	9
52	697215	366	938113	121	759102	487	240898	8
53	697435	366	938040	121	759395	487	240605	7
54	697654	366	937967	121	759687	487	240313	6
55	697874	366	937895	121	759979	487	240021	5
56	698094	365	937822	121	760272	487	239728	4
57	698313	365	937749	121	760564	487	239436	3
58	698532	365	937676	121	760856	486	239144	2
59	698751	365	937604	121	761148	486	238852	1
60	698970	364	937531	121	761439	486	238561	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang	M.

60 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.698970	364	9.937531	121	9.761439	486	10.238561	60
1	699189	364	937458	122	761731	486	238269	59
2	699407	364	937385	122	762023	486	237977	58
3	699626	364	937312	122	762314	486	237686	57
4	699844	363	937238	122	762606	485	237394	56
5	700062	363	937165	122	762897	485	237103	55
6	700280	363	937092	122	763188	485	236812	54
7	700498	363	937019	122	763479	485	236521	53
8	700716	363	936946	122	763770	485	236230	52
9	700933	362	936872	122	764061	485	235939	51
10	701151	362	936799	122	764352	484	235648	50
11	9.701368	362	9.936725	122	9.764643	484	10.235357	49
12	701585	362	936652	123	764933	484	235067	48
13	701802	361	936578	123	765224	484	234776	47
14	702019	361	936505	123	765514	484	234486	46
15	702236	361	936431	123	765805	484	234195	45
16	702452	361	936357	123	766095	484	233905	44
17	702669	360	936284	123	766385	483	233615	43
18	702885	360	936210	123	766675	483	233325	42
19	703101	360	936136	123	766965	483	233035	41
20	703317	360	936062	123	767255	483	232745	40
21	9.703533	359	9.935988	123	9.767545	483	10.232455	39
22	703749	359	935914	123	767834	483	232166	38
23	703964	359	935840	123	768124	482	231876	37
24	704179	359	935766	124	768413	482	231587	36
25	704395	359	935692	124	768703	482	231297	35
26	704610	358	935618	124	768992	482	231008	34
27	704825	358	935543	124	769281	482	230719	33
28	705040	358	935469	124	769570	482	230430	32
29	705254	358	935395	124	769860	481	230140	31
30	705469	357	935320	124	770148	481	229852	30
31	9.705683	357	9.935246	124	9.770437	481	10.229563	29
32	705898	357	935171	124	770726	481	229274	28
33	706112	357	935097	124	771015	481	228985	27
34	706326	356	935022	124	771303	481	228697	26
35	706539	356	934948	124	771592	481	228408	25
36	706753	356	934873	124	771880	480	228120	24
37	706967	356	934798	125	772168	480	227832	23
38	707180	355	934723	125	772457	480	227543	22
39	707393	355	934649	125	772745	480	227255	21
40	707606	355	934574	125	773033	480	226967	20
41	9.707819	355	9.934499	125	9.773321	480	10.226679	19
42	708032	354	934424	125	773608	479	226392	18
43	708245	354	934349	125	773896	479	226104	17
44	708458	354	934274	125	774184	479	225816	16
45	708670	354	934199	125	774471	479	225529	15
46	708882	353	934123	125	774759	479	225241	14
47	709094	353	934048	125	775046	479	224954	13
48	709306	353	933973	125	775333	479	224667	12
49	709518	353	933898	126	775621	478	224379	11
50	709730	353	933822	126	775908	478	224092	10
51	9.709941	352	9.933747	126	9.776195	478	10.223805	9
52	710153	352	933671	126	776482	478	223518	8
53	710364	352	933596	126	776769	478	223231	7
54	710575	352	933520	126	777055	478	222945	6
55	710786	351	933445	126	777342	478	222658	5
56	710997	351	933369	126	777628	477	222372	4
57	711208	351	933293	126	777915	477	222085	3
58	711419	351	933217	126	778201	477	221799	2
59	711629	350	933141	126	778487	477	221512	1
60	711839	350	933066	126	778774	477	221226	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

59 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.711839	350	9.933066	126	9.778774	477	10.221226	60
1	712050	350	932990	127	779060	477	220940	59
2	712260	350	932914	127	779346	476	220654	58
3	712469	349	932838	127	779632	476	220368	57
4	712679	349	932762	127	779918	476	220082	56
5	712889	349	932685	127	780203	476	219797	55
6	713098	349	932609	127	780489	476	219511	54
7	713308	349	932533	127	780775	476	219225	53
8	713517	348	932457	127	781060	476	218940	52
9	713726	348	932380	127	781346	475	218654	51
10	713935	348	932304	127	781631	475	218369	50
11	9.714144	348	9.932228	127	9.781916	475	10.218084	49
12	714352	347	932151	127	782201	475	217799	48
13	714561	347	932075	128	782486	475	217514	47
14	714769	347	931998	128	782771	475	217229	46
15	714978	347	931921	128	783056	475	216944	45
16	715186	347	931845	128	783341	475	216659	44
17	715394	346	931768	128	783626	474	216374	43
18	715602	346	931691	128	783910	474	216090	42
19	715809	346	931614	128	784195	474	215805	41
20	716017	346	931537	128	784479	474	215521	40
21	9.716224	345	9.931460	128	9.784764	474	10.215236	39
22	716432	345	931383	128	785048	474	214952	38
23	716639	345	931306	128	785332	473	214668	37
24	716846	345	931229	129	785616	473	214384	36
25	717053	345	931152	129	785900	473	214100	35
26	717259	344	931075	129	786184	473	213816	34
27	717466	344	930998	129	786468	473	213532	33
28	717673	344	930921	129	786752	473	213248	32
29	717879	344	930843	129	787036	473	212964	31
30	718085	343	930766	129	787319	472	212681	30
31	9.718291	343	9.930688	129	9.787603	472	10.212397	29
32	718497	343	930611	129	787886	472	212114	28
33	718703	343	930533	129	788170	472	211830	27
34	718909	343	930456	129	788453	472	211547	26
35	719114	342	930378	129	788736	472	211264	25
36	719320	342	930300	130	789019	472	210981	24
37	719525	342	930223	130	789302	471	210698	23
38	719730	342	930145	130	789585	471	210415	22
39	719935	341	930067	130	789868	471	210132	21
40	720140	341	929989	130	790151	471	209849	20
41	9.720345	341	9.929911	130	9.790433	471	10.209567	19
42	720549	341	929833	130	790716	471	209284	18
43	720754	340	929755	130	790999	471	209001	17
44	720958	340	929677	130	791281	471	208719	16
45	721162	340	929599	130	791563	470	208437	15
46	721366	340	929521	130	791846	470	208154	14
47	721570	340	929442	130	792128	470	207872	13
48	721774	339	929364	131	792410	470	207590	12
49	721978	339	929286	131	792692	470	207308	11
50	722181	339	929207	131	792974	470	207026	10
51	9.722385	339	9.929129	131	9.793256	470	10.206744	9
52	722588	339	929050	131	793538	469	206462	8
53	722791	338	928972	131	793819	469	206181	7
54	722994	338	928893	131	794101	469	205899	6
55	723197	338	928815	131	794383	469	205617	5
56	723400	338	928736	131	794664	469	205336	4
57	723603	337	928657	131	794945	469	205055	3
58	723805	337	928578	131	795227	469	204773	2
59	724007	337	928499	131	795508	468	204492	1
60	724210	337	928420	131	795789	468	204211	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.724210	337	9.928420	132	9.795789	468	10.204211	60
1	724412	337	928342	132	796070	468	203930	59
2	724614	336	928263	132	796351	468	203649	58
3	724816	336	928183	132	796632	468	203368	57
4	725017	336	928104	132	796913	468	203087	56
5	725219	336	928025	132	797194	468	202806	55
6	725420	335	927946	132	797475	468	202525	54
7	725622	335	927867	132	797755	468	202245	53
8	725823	335	927787	132	798036	467	201964	52
9	726024	335	927708	132	798316	467	201684	51
10	726225	335	927629	132	798596	467	201404	50
11	9.726426	334	9.927549	132	9.798877	467	10.201123	49
12	726626	334	927470	133	799157	467	200843	48
13	726827	334	927390	133	799437	467	200563	47
14	727027	334	927310	133	799717	467	200283	46
15	727228	334	927231	133	799997	466	200003	45
16	727428	333	927151	133	800277	466	199723	44
17	727628	333	927071	133	800557	466	199443	43
18	727828	333	926991	133	800836	466	199164	42
19	728027	333	926911	133	801116	466	198884	41
20	728227	333	926831	133	801396	466	198604	40
21	9.[illegible]27	332	9.926751	133	9.801675	466	10.198325	39
22	[illegible]	332	926671	133	801955	466	198045	38
23	728825	332	926591	133	802234	465	197766	37
24	729024	332	926511	134	802513	465	197487	36
25	729223	331	926431	134	802792	465	197208	35
26	729422	331	926351	134	803072	465	196928	34
27	729621	331	926270	134	803351	465	196649	33
28	729820	331	926190	134	803630	465	196370	32
29	730018	330	926110	134	803908	465	196092	31
30	730216	330	926029	134	804187	465	195813	30
31	9.730415	330	9.925949	134	9.804466	464	10.195534	29
32	730613	330	925868	134	804745	464	195255	28
33	730811	330	925788	134	805023	464	194977	27
34	731009	329	925707	134	805302	464	194698	26
35	731206	329	925626	134	805580	464	194420	25
36	731404	329	925545	135	805859	464	194141	24
37	731602	329	925465	135	806137	464	193863	23
38	731799	329	925384	135	806415	463	193585	22
39	731996	328	925303	135	806693	463	193307	21
40	732193	328	925222	135	806971	463	193029	20
41	9.732390	328	9.925141	135	9.807249	463	10.192751	19
42	732587	328	925060	135	807527	463	192473	18
43	732784	328	924979	135	807805	463	192195	17
44	732980	327	924897	135	808083	463	191917	16
45	733177	327	924816	135	808361	463	191639	15
46	733373	327	924735	136	808638	462	191362	14
47	733569	327	924654	136	808916	462	191084	13
48	733765	327	924572	136	809193	462	190807	12
49	733961	326	924491	136	809471	462	190529	11
50	734157	326	924409	136	809748	462	190252	10
51	9.734353	326	9.924328	136	9.810025	462	10.189975	9
52	734549	326	924246	136	810302	462	189698	8
53	734744	325	924164	136	810580	462	189420	7
54	734939	325	924083	136	810857	462	189143	6
55	735135	325	924001	136	811134	461	188866	5
56	735330	325	923919	136	811410	461	188590	4
57	735525	325	923837	136	811687	461	188313	3
58	735719	324	923755	137	811964	461	188036	2
59	735914	324	923673	137	812241	461	187759	1
60	736109	324	923591	137	812517	461	187483	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.736109	324	9.923591	137	9.812517	461	10.187482	60
1	736303	324	923509	137	812794	461	187206	59
2	736498	324	923427	137	813070	461	186930	58
3	736692	323	923345	137	813347	460	186653	57
4	736886	323	923263	137	813623	460	186377	56
5	737080	323	923181	137	813899	460	186101	55
6	737274	323	923098	137	814175	460	185825	54
7	737467	323	923016	137	814452	460	[illegible]	53
8	737661	322	922933	137	814728	460	185272	52
9	737855	322	922851	137	815004	460	184996	51
10	738048	322	922768	138	815279	460	184721	50
11	9.738241	322	9.922686	138	9.815555	459	10.184445	49
12	738434	322	922603	138	815831	459	184169	48
13	738627	321	922520	138	816107	459	183893	47
14	738820	321	922438	138	816382	459	183618	46
15	739013	321	922355	138	816658	459	183342	45
16	739206	321	922272	138	816933	459	183067	44
17	739398	321	922189	138	817209	459	182791	43
18	739590	320	922106	138	817484	459	182516	42
19	739783	320	922023	138	817759	459	182241	41
20	739975	320	921940	138	818035	458	181965	40
21	9.740167	320	9.921857	139	9.818310	458	10.181600	39
22	740359	320	921774	139	818585	458	181415	38
23	740550	319	921691	139	818860	[illegible]	181140	37
24	740742	319	921607	139	819135	[illegible]	180865	36
25	740934	319	921524	139	[illegible]	453	180590	35
26	741125	319	921441	139	819684	458	180316	34
27	741316	319	921357	139	819959	458	180041	33
28	741508	318	921274	139	820234	458	179766	32
29	741699	318	921190	139	820508	457	179492	31
30	741889	318	921107	139	[illegible]	457	179217	30
31	9.742080	318	9.921023	139	[illegible]	457	10.178943	29
32	742271	318	920939	140	821332	457	178668	28
33	742462	317	920856	140	821606	457	178394	27
34	742652	317	920772	140	821880	457	178120	26
35	742842	317	920688	140	822154	457	177846	25
36	743033	317	920604	140	822429	457	177571	24
37	743223	317	920520	140	822703	457	177297	23
38	743413	316	920436	140	822977	456	177023	22
39	743602	316	920352	140	823250	456	176750	21
40	743792	316	920268	140	823524	456	176476	20
41	9.743982	316	9.920184	140	9.823798	456	10.176202	19
42	744171	316	920099	140	824072	456	175928	18
43	744361	315	920015	140	824345	456	175655	17
44	744550	315	919931	141	824619	456	175381	16
45	744739	315	919846	141	824893	456	175107	15
46	744928	315	919762	141	825166	456	174834	14
47	745117	315	919677	141	825439	455	174561	13
48	745306	314	919593	141	825713	455	174287	12
49	745494	314	919508	141	825986	455	174014	11
50	745683	314	919424	141	826259	455	173741	10
51	9.745871	314	9.919339	141	9.826532	455	10.173468	9
52	746059	314	919254	141	826805	455	173195	8
53	746248	313	919169	141	827078	455	172922	7
54	746436	313	919085	141	827351	455	172649	6
55	746624	313	919000	141	827624	455	172376	5
56	746812	313	918915	142	827897	454	172103	4
57	746999	313	918830	142	828170	454	171830	3
58	747187	312	918745	142	828442	454	171558	2
59	747374	312	918659	142	828715	454	171285	1
60	747562	312	918574	142	828987	454	171013	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang	M.

56 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.747562	312	9.918574	142	9.828987	454	10.171013	60
1	747749	312	918489	142	829260	454	170740	59
2	747936	312	918404	142	829532	454	170468	58
3	748123	311	918318	142	829805	454	170195	57
4	748310	311	918233	142	830077	454	169923	56
5	748497	311	918147	142	830349	453	169651	55
6	748683	311	918062	142	830621	453	169379	54
7	748870	311	917976	143	830893	453	169107	53
8	749056	310	917891	143	831165	453	168835	52
9	749243	310	917805	143	831437	453	168563	51
10	749429	310	917719	143	831709	453	168291	50
11	9.749615	310	9.917634	143	9.831981	453	10.168019	49
12	749801	310	917548	143	832253	453	167747	48
13	749987	309	917462	143	832525	453	167475	47
14	750173	309	917376	143	832796	453	167204	46
15	750358	309	917290	143	833068	452	166932	45
16	750543	309	917204	143	833339	452	166661	44
17	750729	309	917118	144	833611	452	166389	43
18	750914	308	917032	144	833882	452	166118	42
19	751099	308	916946	144	834154	452	165846	41
20	751284	308	916859	144	834425	452	165575	40
21	9.751469	308	9.916773	144	9.834696	452	10.165304	39
22	751654	308	916687	144	834967	452	165033	38
23	751839	308	916600	144	835238	452	164762	37
24	752023	307	916514	144	835509	452	164491	36
25	752208	307	916427	144	835780	451	164220	35
26	752392	307	916341	144	836051	451	163949	34
27	752576	307	916254	144	836322	451	163678	33
28	752760	307	916167	145	836593	451	163407	32
29	752944	306	916081	145	836864	451	163136	31
30	753128	306	915994	145	837134	451	162866	30
31	9.753312	306	9.915907	145	9.837405	451	10.162595	29
32	753495	306	915820	145	837675	451	162325	28
33	753679	306	915733	145	837946	451	162054	27
34	753862	305	915646	145	838216	451	161784	26
35	754046	305	915559	145	838487	450	161513	25
36	754229	305	915472	145	838757	450	161243	24
37	754412	305	915385	145	839027	450	160973	23
38	754595	305	915297	145	839297	450	160703	22
39	754778	304	915210	145	839568	450	160432	21
40	754960	304	915123	146	839838	450	160162	20
41	9.755143	304	9.915035	146	9.840108	450	10.159892	19
42	755326	304	914948	146	840378	450	159622	18
43	755508	304	914860	146	840647	450	159353	17
44	755690	304	914773	146	840917	449	159083	16
45	755872	303	914685	146	841187	449	158813	15
46	756054	303	914598	146	841457	449	158543	14
47	756236	303	914510	146	841726	449	158274	13
48	756418	303	914422	146	841996	449	158004	12
49	756600	303	914334	146	842266	449	157734	11
50	756782	302	914246	147	842535	449	157465	10
51	9.756963	302	9.914158	147	9.842805	449	10.157195	9
52	757144	302	914070	147	843074	449	156926	8
53	757326	302	913982	147	843343	449	156657	7
54	757507	302	913894	147	843612	449	156388	6
55	757688	301	913806	147	843882	448	156118	5
56	757869	301	913718	147	844151	448	155849	4
57	758050	301	913630	147	844420	448	155580	3
58	758230	301	913541	147	844689	448	155311	2
59	758411	301	913453	147	844958	448	155042	1
60	758591	301	913365	147	845227	448	154773	0
	Cosinus		Sinus		Cotang		Tang.	M.

55 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.758591	301	9.913365	147	9.845227	448	10.154773	60
1	758772	300	913276	147	845496	448	154504	59
2	758952	300	913187	148	845764	448	154236	58
3	759132	300	913099	148	846033	448	153967	57
4	759312	300	913010	148	846302	448	153698	56
5	759492	300	912922	148	846570	447	153430	55
6	759672	299	912833	148	846839	447	153161	54
7	759852	299	912744	148	847107	447	152893	53
8	760031	299	912655	148	847376	447	152624	52
9	760211	299	912566	148	847644	447	152356	51
10	760390	299	912477	148	847913	447	152087	50
11	9.760569	298	9.912388	148	9.848181	447	10.151819	49
12	760748	298	912299	149	848449	447	151551	48
13	760927	298	912210	149	848717	447	151283	47
14	761106	298	912121	149	848986	447	151014	46
15	761285	298	912031	149	849254	447	150746	45
16	761464	298	911942	149	849522	447	150478	44
17	761642	297	911853	149	849790	446	150210	43
18	761821	297	911763	149	850058	446	149942	42
19	761999	297	911674	149	850325	446	149675	41
20	762177	297	911584	149	850593	446	149407	40
21	9.762356	297	9.911495	149	9.850861	446	10.149139	39
22	762534	296	911405	149	851129	446	148871	38
23	762712	296	911315	150	851396	446	148604	37
24	762889	296	911226	150	851664	446	148336	36
25	763067	296	911136	150	851931	446	148069	35
26	763245	296	911046	150	852199	446	147801	34
27	763422	296	910956	150	852466	446	147534	33
28	763600	295	910866	150	852733	445	147267	32
29	763777	295	910776	150	853001	445	146999	31
30	763954	295	910686	150	853268	445	146732	30
31	9.764131	295	9.910596	150	9.853535	445	10.146465	29
32	764308	295	910506	150	853802	445	146198	28
33	764485	294	910415	150	854069	445	145931	27
34	764662	294	910325	151	854336	445	145664	26
35	764838	294	910235	151	854603	445	145397	25
36	765015	294	910144	151	854870	445	145130	24
37	765191	294	910054	151	855137	445	144863	23
38	765367	294	909963	151	855404	445	144596	22
39	765544	293	909873	151	855671	444	144329	21
40	765720	293	909782	151	855938	444	144062	20
41	9.765896	293	9.909691	151	9.856204	444	10.143796	19
42	766072	293	909601	151	856471	444	143529	18
43	766247	293	909510	151	856737	444	143263	17
44	766423	293	909419	151	857004	444	142996	16
45	766598	292	909328	152	857270	444	142730	15
46	766774	292	909237	152	857537	444	142463	14
47	766949	292	909146	152	857803	444	142197	13
48	767124	292	909055	152	858069	444	141931	12
49	767300	292	908964	152	858336	444	141664	11
50	767475	291	908873	152	858602	443	141398	10
51	9.767649	291	9.908781	152	9.858868	443	10.141132	9
52	767824	291	908690	152	859134	443	140866	8
53	767999	291	908599	152	859400	443	140600	7
54	768173	291	908507	152	859666	443	140334	6
55	768348	290	908416	153	859932	443	140068	5
56	768522	290	908324	153	860198	443	139802	4
57	768697	290	908233	153	860464	443	139536	3
58	768871	290	908141	153	860730	443	139270	2
59	769045	290	908049	153	860995	443	139005	1
60	769219	290	907958	153	861261	443	138739	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

54 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.769219	290	9.907958	153	9.861261	443	10.138739	60
1	769393	289	907866	153	861527	443	138473	59
2	769566	289	907774	153	861792	442	138208	58
3	769740	289	907682	153	862058	442	137942	57
4	769913	289	907590	153	862323	442	137677	56
5	770087	289	907498	153	862589	442	137411	55
6	770260	288	907406	153	862854	442	137146	54
7	770433	288	907314	154	863119	442	136881	53
8	770606	288	907222	154	863385	442	136615	52
9	770779	288	907129	154	863650	442	136350	51
10	770952	288	907037	154	863915	442	136085	50
11	9.771125	288	9.906945	154	9.864180	442	10.135820	49
12	771298	287	906852	154	864445	442	135555	48
13	771470	287	906760	154	864710	442	135290	47
14	771643	287	906667	154	864975	441	135025	46
15	771815	287	906575	154	865240	441	134760	45
16	771987	287	906482	154	865505	441	134495	44
17	772159	287	906389	155	865770	441	134230	43
18	772331	286	906296	155	866035	441	133965	42
19	772503	286	906204	155	866300	441	133700	41
20	772675	286	906111	155	866564	441	133436	40
21	9.772847	286	9.906018	155	9.866829	441	10.133171	39
22	773018	286	905925	155	867094	441	132906	38
23	773190	286	905832	155	867358	441	132642	37
24	773361	285	905739	155	867623	441	132377	36
25	773533	285	[illegible]645	155	867887	441	132113	35
26	773704	285	905552	155	868152	440	131848	34
27	773875	285	905459	155	868416	440	131584	33
28	774046	285	905366	156	868680	440	131320	32
29	774217	285	905272	156	868945	440	131055	31
30	774388	284	905179	156	869209	440	130791	30
31	9.774558	284	9.905085	156	9.869473	440	10.130527	29
32	774729	284	904992	156	869737	440	130263	28
33	774899	284	904898	156	870001	440	129999	27
34	775070	284	904804	156	870265	440	129735	26
35	775240	284	904711	156	870529	440	129471	25
36	775410	283	904617	156	870793	440	129207	24
37	775580	283	904523	156	871057	440	128943	23
38	775750	283	904429	157	871321	440	128679	22
39	775920	283	904335	157	871585	440	128415	21
40	776090	283	904241	157	871849	439	128151	20
41	9.776259	283	9.904147	157	9.872112	439	10.127888	19
42	776429	282	904053	157	872376	439	127624	18
43	776598	282	903959	157	872640	439	127360	17
44	776768	282	903864	157	872903	439	127097	16
45	776937	282	903770	157	873167	439	126833	15
46	777106	282	903676	157	873430	439	126570	14
47	777275	281	903581	157	873694	439	126306	13
48	777444	281	903487	157	873957	439	126043	12
49	777613	281	903392	158	874220	439	125780	11
50	777781	281	903298	158	874484	439	125516	10
51	9.777950	281	9.903203	158	9.874747	439	10.125253	9
52	778119	281	903108	158	875010	439	124990	8
53	778287	280	903014	158	875273	438	124727	7
54	778455	280	902919	158	875536	438	124464	6
55	778624	280	902824	158	875800	438	124200	5
56	778792	280	902729	158	876063	438	123937	4
57	778960	280	902634	158	876326	438	123674	3
58	779128	280	902539	159	876589	438	123411	2
59	779295	279	902444	159	876851	438	123149	1
60	779463	279	902349	159	877114	438	122886	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

53 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.779463	279	9.902349	159	9.877114	438	10.122886	60
1	779631	279	902253	159	877377	438	122623	59
2	779798	279	902158	159	877640	438	122360	58
3	779966	279	902063	159	877903	438	122097	57
4	780133	279	901967	159	878165	438	121835	56
5	780300	278	901872	159	878428	438	121572	55
6	780467	278	901776	159	878691	438	121309	54
7	780634	278	901681	159	878953	437	121047	53
8	780801	278	901585	159	879216	437	120784	52
9	780968	278	901490	159	879478	437	120522	51
10	781134	278	901394	160	879741	437	120259	50
11	9.781301	277	9.901298	160	9.880003	437	10.119997	49
12	781468	277	901202	160	880265	437	119735	48
13	781634	277	901106	160	880528	437	119472	47
14	781800	277	901010	160	880790	437	119210	46
15	781966	277	900914	160	881052	437	118948	45
16	782132	277	900818	160	881314	437	118686	44
17	782298	276	900722	160	881576	437	118424	43
18	782464	276	900626	160	881839	437	118161	42
19	782630	276	900529	160	882101	437	117899	41
20	782796	276	900433	161	882363	436	117637	40
21	9.782961	276	9.900337	161	9.882625	436	10.117375	39
22	783127	276	900240	161	882887	436	117113	38
23	783292	275	900144	161	883148	436	116852	37
24	783458	275	900047	161	883410	436	116590	36
25	783623	275	899951	161	883672	436	116328	35
26	783788	275	899854	161	883934	436	116066	34
27	783953	275	899757	161	884196	436	115804	33
28	784118	275	899660	161	884457	436	115543	32
29	784282	274	899564	161	884719	436	115281	31
30	784447	274	899467	162	884980	436	115020	30
31	9.784612	274	9.899370	162	9.885242	436	10.114758	29
32	784776	274	899273	162	885503	436	114497	28
33	784941	274	899176	162	885765	436	114235	27
34	785105	274	899078	162	886026	436	113974	26
35	785269	273	898981	162	886288	436	113712	25
36	785433	273	898884	162	886549	435	113451	24
37	785597	273	898787	162	886810	435	113190	23
38	785761	273	898689	162	887072	435	112928	22
39	785925	273	898592	162	887333	435	112667	21
40	786089	273	898494	163	887594	435	112406	20
41	9.786252	272	9.898397	163	9.887855	435	10.112145	19
42	786416	272	898299	163	888116	435	111884	18
43	786579	272	898202	163	888377	435	111623	17
44	786742	272	898104	163	888639	435	111361	16
45	786906	272	898006	163	888900	435	111100	15
46	787069	272	897908	163	889160	435	110840	14
47	787232	271	897810	163	889421	435	110579	13
48	787395	271	897712	163	889682	435	110318	12
49	787557	271	897614	163	889943	435	110057	11
50	787720	271	897516	163	890204	434	109796	10
51	9.787883	271	9.897418	164	9.890465	434	10.109535	9
52	788045	271	897320	164	890725	434	109275	8
53	788208	271	897222	164	890986	434	109014	7
54	788370	270	897123	164	891247	434	108753	6
55	788532	270	897025	164	891507	434	108493	5
56	788694	270	896926	164	891768	434	108232	4
57	788856	270	896828	164	892028	434	107972	3
58	789018	270	896729	164	892289	434	107711	2
59	789180	270	896631	164	892549	434	107451	1
60	789342	269	896532	164	892810	434	107190	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

52 Degrés.

M.	Sinus	D.	Cosinus.	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.789342	269	9.896532	164	9.892810	434	10.107190	60
1	789504	269	896433	165	893070	434	106930	59
2	789665	269	896335	165	893331	434	106669	58
3	789827	269	896236	165	893591	434	106409	57
4	789988	269	896137	165	893851	434	106149	56
5	790149	269	896038	165	894111	434	105889	55
6	790310	268	895939	165	894371	434	105629	54
7	790471	268	895840	165	894632	433	105368	53
8	790632	268	895741	165	894892	433	105108	52
9	790793	268	895641	165	895152	433	104848	51
10	790954	268	895542	165	895412	433	104588	50
11	9.791115	268	9.895443	166	9.895672	433	10.104328	49
12	791275	267	895343	166	895932	433	104068	48
13	791436	267	895244	166	896192	433	103808	47
14	791596	267	895145	166	896452	433	103548	46
15	791757	267	895045	166	896712	433	103288	45
16	791917	267	894945	166	896971	433	103029	44
17	792077	267	894846	166	897231	433	102769	43
18	792237	266	894746	166	897491	433	102509	42
19	792397	266	894646	166	897751	433	102249	41
20	792557	266	894546	166	898010	433	101990	40
21	9.792716	266	9.894446	167	9.898270	433	10.101730	39
22	792876	266	894346	167	898530	433	101470	38
23	793035	266	894246	167	898789	433	101211	37
24	793195	265	894146	167	899049	432	100951	36
25	793354	265	894046	167	899308	432	100692	35
26	793514	265	893946	167	899568	432	100432	34
27	793673	265	893846	167	899827	432	100173	33
28	793832	265	893745	167	900086	432	099914	32
29	793991	265	893645	167	900346	432	099654	31
30	794150	264	893544	167	900605	432	099395	30
31	9.794308	264	9.893444	168	9.900864	432	10.099136	29
32	794467	264	893343	168	901124	432	098876	28
33	794626	264	893243	168	901383	432	098617	27
34	794784	264	893142	168	901642	432	098358	26
35	794942	264	893041	168	901901	432	098099	25
36	795101	264	892940	168	902160	432	097840	24
37	795259	263	892839	168	902419	432	097581	23
38	795417	263	892739	168	902679	432	097321	22
39	795575	263	892638	168	902938	432	097062	21
40	795733	263	892536	168	903197	431	096803	20
41	9.795891	263	9.892435	169	9.903455	431	10.096545	19
42	796049	263	892334	169	903714	431	096286	18
43	796206	263	892233	169	903973	431	096027	17
44	796364	262	892132	169	904232	431	095768	16
45	796521	262	892030	169	904491	431	095509	15
46	796679	262	891929	169	904750	431	095250	14
47	796836	262	891827	169	905008	431	094992	13
48	796993	262	891726	169	905267	431	094733	12
49	797150	261	891624	169	905526	431	094474	11
50	797307	261	891523	170	905784	431	094216	10
51	9.797464	261	9.891421	170	9.906043	431	10.093957	9
52	797621	261	891319	170	906302	431	093698	8
53	797777	261	891217	170	906560	431	093440	7
54	797934	261	891115	170	906819	431	093181	6
55	798091	261	891013	170	907077	431	092923	5
56	798247	261	890911	170	907336	431	092664	4
57	798403	260	890809	170	907594	431	092406	3
58	798560	260	890707	170	907852	431	092148	2
59	798716	260	890605	170	908111	430	091889	1
60	798872	260	890503	170	908369	430	091631	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.798872	260	9.890503	170	9.908369	430	10.091631	60
1	799028	260	890400	171	908628	430	091372	59
2	799184	260	890298	171	908886	430	091114	58
3	799339	259	890195	171	909144	430	090856	57
4	799495	259	890093	171	909402	430	090598	56
5	799651	259	889990	171	909660	430	090340	55
6	799806	259	889888	171	909918	430	090082	54
7	799962	259	889785	171	910177	430	089823	53
8	800117	259	889682	171	910435	430	089565	52
9	800272	258	889579	171	910693	430	089307	51
10	800427	258	889477	171	910951	430	089049	50
11	9.800582	258	9.889374	172	9.911209	430	10.088791	49
12	800737	258	889271	172	911467	430	088533	48
13	800892	258	889168	172	911724	430	088276	47
14	801047	258	889064	172	911982	430	088018	46
15	801201	258	888961	172	912240	430	087760	45
16	801356	257	888858	172	912498	430	087502	44
17	801511	257	888755	172	912756	430	087244	43
18	801665	257	888651	172	913014	429	086986	42
19	801819	257	888548	172	913271	429	086729	41
20	801973	257	888444	173	913529	429	086471	40
21	9.802128	257	9.888341	173	9.913787	429	10.086213	39
22	802282	256	888237	173	914044	429	085956	38
23	802436	256	888134	173	914302	429	085698	37
24	802589	256	888030	173	914560	429	085440	36
25	802743	256	887926	173	914817	429	085183	35
26	802897	256	887822	173	915075	429	084925	34
27	803050	256	887718	173	915332	429	084668	33
28	803204	256	887614	173	915590	429	084410	32
29	803357	255	887510	173	915847	429	084153	31
30	803511	255	887406	174	916104	429	083896	30
31	9.803664	255	9.887302	174	9.916362	429	10.083638	29
32	803817	255	887198	174	916619	429	083381	28
33	803970	255	887093	174	916877	429	083123	27
34	804123	255	886989	174	917134	429	082866	26
35	804276	254	886885	174	917391	429	082609	25
36	804428	254	886780	174	917648	429	082352	24
37	804581	254	886676	174	917905	429	082095	23
38	804734	254	886571	174	918163	428	081837	22
39	804886	254	886466	174	918420	428	081580	21
40	805039	254	886362	175	918677	428	081323	20
41	9.805191	254	9.886257	175	9.918934	428	10.081066	19
42	805343	253	886152	175	919191	428	080809	18
43	805495	253	886047	175	919448	428	080552	17
44	805647	253	885942	175	919705	428	080295	16
45	805799	253	885837	175	919962	428	080038	15
46	805951	253	885732	175	920219	428	079781	14
47	806103	253	885627	175	920476	428	079524	13
48	806254	253	885522	175	920733	428	079267	12
49	806406	252	885416	175	920990	428	079010	11
50	806557	252	885311	176	921247	428	078753	10
51	9.806709	252	9.885205	176	9.921503	428	10.078497	9
52	806860	252	885100	176	921760	428	078240	8
53	807011	252	884994	176	922017	428	077983	7
54	807163	252	884889	176	922274	428	077726	6
55	807314	252	884783	176	922530	428	077470	5
56	807465	251	884677	176	922787	428	077213	4
57	807615	251	884572	176	923044	428	076956	3
58	807766	251	884466	176	923300	428	076700	2
59	807917	251	884360	176	923557	427	076443	1
60	808067	251	884254	177	923813	427	076187	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.808067	251	9.884254	177	9.923813	427	10.076187	60
1	808218	251	884148	177	924070	427	075930	59
2	808368	251	884042	177	924327	427	075673	58
3	808519	250	883936	177	924583	427	075417	57
4	808669	250	883829	177	924840	427	075160	56
5	808819	250	883723	177	925096	427	074904	55
6	808969	250	883617	177	92[illegible]52	427	074648	54
7	809119	250	883510	177	925[illegible]09	427	074391	53
8	809269	250	883404	177	925865	427	074135	52
9	809419	249	883297	178	926122	427	07387[illegible]	51
10	809569	249	883191	178	926378	427	07362[illegible]	50
11	9.809718	249	9.883084	178	9.926634	427	10.073366	49
12	809868	249	882977	178	926890	427	073110	48
13	810017	249	882871	178	927147	427	072853	47
14	810167	249	882764	178	927403	427	072597	46
15	810316	248	882657	178	927659	427	072341	45
16	810465	248	882550	178	927915	427	072085	44
17	810614	248	882443	178	928171	427	071829	43
18	810763	248	882336	179	928427	427	071[illegible]3	42
19	810912	248	882229	179	928683	427	071317	41
20	811061	248	882121	179	928940	427	071060	40
21	9.811210	248	9.882014	179	9.929196	427	10.070804	39
22	811358	247	881907	179	929452	427	070548	38
23	811507	247	881799	179	929708	427	070292	37
24	811655	247	881692	179	929964	426	070036	36
25	811804	247	881584	179	930220	426	069780	35
26	811952	247	881477	179	930475	426	069525	34
27	812100	247	881369	179	930731	426	069269	33
28	812248	247	881261	180	930987	426	069013	32
29	812396	246	881153	180	931243	426	068757	31
30	812544	246	881046	180	931499	426	068501	30
31	9.812692	246	9.880938	180	9.931755	426	10.068245	29
32	812840	246	880830	180	932010	426	067990	28
33	812988	246	880722	180	932266	426	067734	27
34	813135	246	880613	180	932522	426	067478	26
35	813283	246	880505	180	932778	426	0672[illegible]2	25
36	813430	245	880397	180	933033	426	066967	24
37	813578	245	880289	181	933289	426	066711	23
38	813725	245	880180	181	933545	426	066455	22
39	813872	245	880072	181	933800	426	066200	21
40	814019	245	879963	181	934056	426	065944	20
41	9.814166	245	9.879855	181	9.934311	426	10.065689	19
42	814313	245	879746	181	934567	426	065433	18
43	814460	244	879637	181	934823	426	065177	17
44	814607	244	879529	181	935078	426	064922	16
45	814753	244	879420	181	935333	426	064667	15
46	814900	244	879311	181	935589	426	064411	14
47	815046	244	879202	182	935844	426	064156	13
48	815193	244	879093	182	936100	426	063900	12
49	815339	244	878984	182	936355	426	063645	11
50	815485	243	878875	182	936610	426	063390	10
51	9.815631	243	9.878766	182	9.936866	425	10.063134	9
52	815778	243	878656	182	937121	425	062879	8
53	815924	243	878547	182	937376	425	062624	7
54	816069	243	878438	182	937632	425	062368	6
55	816215	243	878328	182	937887	425	062113	5
56	816361	243	878219	183	938142	425	061858	4
57	816507	242	878109	183	938398	425	061602	3
58	816652	242	877999	183	938653	425	061347	2
59	816798	242	877890	183	938908	425	061092	1
60	816943	242	877780	183	939163	425	060837	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.816943	242	9.877780	183	9.9391[illegible]	425	10.060837	60
1	817088	242	877670	183	939418	425	060582	59
2	817233	242	877560	183	939673	425	060327	58
3	817379	242	877450	183	939928	425	060072	57
4	817524	241	877340	183	940183	425	059817	56
5	817668	241	877230	184	940438	425	059562	55
6	817813	241	877120	184	940694	425	059306	54
7	817958	241	877010	184	940949	425	059051	53
8	818103	241	876899	184	941204	425	058796	52
9	818247	241	876789	184	941458	425	058542	51
10	818392	241	876678	184	941714	425	058286	50
11	9.818536	240	9.876568	184	9.941968	425	10.058032	49
12	818681	240	876457	184	942223	425	057777	48
13	818825	240	876347	184	942478	425	057522	47
14	818969	240	876236	185	942733	425	057267	46
15	819113	240	876125	185	942988	425	057012	45
16	819257	240	876014	185	943243	425	056757	44
17	819401	240	875904	185	943498	425	056502	43
18	819545	239	875793	185	943752	425	056248	42
19	819689	239	875682	185	944007	425	055993	41
20	819832	239	875571	185	944262	425	055738	40
21	9.819976	239	9.875459	185	9.944517	425	10.055483	39
22	820120	239	875348	185	944771	424	055229	38
23	820263	239	875237	185	945026	424	054974	37
24	820406	239	875126	186	945281	424	054719	36
25	820550	238	875014	186	945535	424	054465	35
26	820693	238	874903	186	945790	424	054210	34
27	820836	238	874791	186	946045	424	053955	33
28	820979	238	874680	186	946299	424	053701	32
29	821122	238	874568	186	946554	424	053446	31
30	821265	238	874456	186	946808	424	053192	30
31	9.821407	238	9.874344	186	9.947063	424	10.052937	29
32	821550	238	874232	187	947318	424	052682	28
33	821693	237	874121	187	947572	424	052428	27
34	821835	237	874009	187	947826	424	052174	26
35	821977	237	873896	187	948081	424	051919	25
36	822120	237	873784	187	948336	424	051664	24
37	822262	237	873672	187	948590	424	051410	23
38	822404	237	873560	187	948844	424	051156	22
39	822546	237	873448	187	949099	424	050901	21
40	822688	236	873335	187	949353	424	050647	20
41	9.822830	236	9.873223	187	9.949607	424	10.050393	19
42	822972	236	873110	188	949862	424	050138	18
43	823114	236	872998	188	950116	424	049884	17
44	823255	236	872885	188	950370	424	049630	16
45	823397	236	872772	188	950625	424	049375	15
46	823539	236	872659	188	950879	424	049121	14
47	823680	235	872547	188	951133	424	048867	13
48	823821	235	872434	188	951388	424	048612	12
49	823963	235	872321	188	951642	424	048359	11
50	824104	235	872208	188	951896	424	048104	10
51	9.824245	2[illegible]	9.872095	189	9.952150	424	10.047850	9
52	824386	23[illegible]	871981	189	952405	424	047595	8
53	824527	235	871868	189	952659	424	047341	7
54	824668	234	871755	189	952913	424	047087	6
55	824808	234	871641	189	953167	423	046833	5
56	824949	234	871528	189	953421	423	046579	4
57	825090	234	871414	189	953675	423	046325	3
58	825230	234	871301	189	953929	423	046071	2
59	825371	234	871187	189	954183	423	045817	1
60	825511	234	871073	190	954437	423	045563	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

M.	Sinus	D.	Cosinus.	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.825511	234	9.871073	190	9.954437	423	10.045563	60
1	825651	233	870960	190	954691	423	045309	59
2	825791	233	870846	190	954945	423	045055	58
3	825931	233	870732	190	955200	423	044800	57
4	826071	233	870618	190	955454	423	044546	56
5	826211	233	870504	190	955707	423	044293	55
6	826351	233	870390	190	955961	423	044039	54
7	826491	233	870276	190	956215	423	043785	53
8	826631	233	870161	190	956469	423	043531	52
9	826770	232	870047	191	956723	423	043277	51
10	826910	232	869933	191	956977	423	043023	50
11	9.827049	232	9.869818	191	9.957231	423	10.042769	49
12	827189	232	869704	191	957485	423	042515	48
13	827328	232	869589	191	957739	423	042261	47
14	827467	232	869474	191	957993	423	042007	46
15	827606	232	869360	191	958246	423	041754	45
16	827745	232	869245	191	958500	423	041500	44
17	827884	231	869130	191	958754	423	041246	43
18	828023	231	869015	192	959008	423	040992	42
19	828162	231	868900	192	959262	423	040738	41
20	828301	231	868785	192	959516	423	040484	40
21	9.828439	231	9.868670	192	9.959769	423	10.040231	39
22	828578	231	868555	192	960023	423	039977	38
23	828716	231	868440	192	960277	423	039723	37
24	828855	230	868324	192	960531	423	039469	36
25	828993	230	868209	192	960784	423	039216	35
26	829131	230	868093	192	961038	423	038962	34
27	829269	230	867978	193	961291	423	038709	33
28	829407	230	867862	193	961545	423	038455	32
29	829545	230	867747	193	961799	423	038201	31
30	829683	230	867631	193	962052	423	037948	30
31	9.829821	229	9.867515	193	9.962306	423	10.037694	29
32	829959	229	867399	193	962560	423	037440	28
33	830097	229	867283	193	962813	423	037187	27
34	830234	229	867167	193	963067	423	036933	26
35	830372	229	867051	193	963320	423	036680	25
36	830509	229	866935	194	963574	423	036426	24
37	830646	229	866819	194	963827	423	036173	23
38	830784	229	866703	194	964081	423	035919	22
39	830921	228	866586	194	964335	423	035665	21
40	831058	228	866470	194	964588	422	035412	20
41	9.831195	228	9.866353	194	9.964842	422	10.035158	19
42	831332	228	866237	194	965095	422	034905	18
43	831469	228	866120	194	965349	422	034651	17
44	831606	228	866004	195	965602	422	034398	16
45	831742	228	865887	195	965855	422	034145	15
46	831879	228	865770	195	966109	422	033891	14
47	832015	227	865653	195	966362	422	033638	13
48	832152	227	865536	195	966616	422	033384	12
49	832288	227	865419	195	966869	422	033131	11
50	832425	227	865302	195	967123	422	032877	10
51	9.832561	227	9.865185	195	9.967376	422	10.032624	9
52	832697	227	865068	195	967629	422	032371	8
53	832833	227	864950	195	967883	422	032117	7
54	832969	226	864833	196	968136	422	031864	6
55	833105	226	864716	196	968389	422	031611	5
56	833241	226	864598	196	968643	422	031357	4
57	833377	226	864481	196	968896	422	031104	3
58	833512	226	864363	196	969149	422	030851	2
59	833648	226	864245	196	969403	422	030597	1
60	833783	226	864127	196	969656	422	030344	0
	Cosinus		Sinus		Cotang.		Tang.	M.

47 Degrés.

M.	Sinus.	D.	Cosinus.	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.833783	226	9.864127	196	9.969656	422	10.030344	60
1	833919	225	864010	196	969909	422	030091	59
2	834054	225	863892	197	970162	422	029838	58
3	834189	225	863774	197	970416	422	029584	57
4	834325	225	863656	197	970669	422	029331	56
5	834460	225	863538	197	970922	422	029078	55
6	834595	225	863419	197	971175	422	028825	54
7	834730	225	863301	197	971429	422	028571	53
8	834865	225	863183	197	971682	422	028318	52
9	834999	224	863064	197	971935	422	028065	51
10	835134	224	862946	198	972188	422	027812	50
11	9.835269	224	9.862827	198	9.972441	422	10.027559	49
12	835403	224	862709	198	972694	422	027306	48
13	835538	224	862590	198	972948	422	027052	47
14	835672	224	862471	198	973201	422	026799	46
15	835807	224	862353	198	973454	422	026546	45
16	835941	224	862234	198	973707	422	026293	44
17	836075	223	862115	198	973960	422	026040	43
18	836209	223	861996	198	974213	422	025787	42
19	836343	223	861877	198	974466	422	025534	41
20	836477	223	861758	199	974719	422	025281	40
21	9.836611	223	9.861638	199	9.974973	422	10.025027	39
22	836745	223	861519	199	975226	422	024774	38
23	836878	223	861400	199	975479	422	024521	37
24	837012	222	861280	199	975732	422	024268	36
25	837146	222	861161	199	975985	422	024015	35
26	837279	222	861041	199	976238	422	023762	34
27	837412	222	860922	199	976491	422	023509	33
28	837546	222	860802	199	976744	422	023256	32
29	837679	222	860682	200	976997	422	023003	31
30	837812	222	860562	200	977250	422	022750	30
31	9.837945	222	9.860442	200	9.977503	422	10.022497	29
32	838078	221	860322	200	977756	422	022244	28
33	838211	221	860202	200	978009	422	021991	27
34	838344	221	860082	200	978262	422	021738	26
35	838477	221	859962	200	978515	422	021485	25
36	838610	221	859842	200	978768	422	021232	24
37	838742	221	859721	201	979021	422	020979	23
38	838875	221	859601	201	979274	422	020726	22
39	839007	221	859480	201	979527	422	020473	21
40	839140	220	859360	201	979780	422	0202[illegible]	20
41	9.839272	220	9.859239	201	9.980033	422	10.0199[illegible]	19
42	839404	220	859119	201	980286	422	019714	18
43	839536	220	858998	201	980538	422	01946[illegible]	17
44	839668	220	858877	201	980791	421	019209	16
45	839800	220	858756	202	981044	421	018956	15
46	839932	220	858635	202	981297	421	018703	14
47	840064	219	858514	202	981550	421	018450	13
48	840196	219	858393	202	981803	421	018197	12
49	840328	219	858272	202	982056	421	017944	11
50	840459	219	858151	202	982309	421	017691	10
51	9.840591	219	9.858029	202	9.982562	421	10.017438	9
52	840722	219	857908	202	982814	421	017186	8
53	840854	219	857786	202	983067	421	016933	7
54	840985	219	857665	203	983320	421	016680	6
55	841116	218	857543	203	983573	421	016427	5
56	841247	218	857422	203	983826	421	016174	4
57	841378	218	857300	203	984079	421	015921	3
58	841509	218	857178	203	984331	421	015669	2
59	841640	218	857056	203	984584	421	015416	1
60	841771	218	856934	203	984837	421	015163	0
	Cosinus.		Sinus.		Cotang.		Tang.	M

46 Degrés.

M.	Sinus.	D.	Cosinus.	D.	Tang.	D.	Cotang.	
0	9.841771	218	9.856934	203	9.984837	421	10.015163	60
1	841902	218	856812	203	985090	421	014910	59
2	842033	218	856690	204	985343	421	014657	58
3	842163	217	856568	204	985596	421	014404	57
4	842294	217	856446	204	985848	421	014152	56
5	842424	217	856323	204	986101	421	013899	55
6	842555	217	856201	204	986354	421	013646	54
7	842685	217	856078	204	986607	421	013393	53
8	842815	217	855956	204	986860	421	013140	52
9	842946	217	855833	204	987112	421	012888	51
10	843076	217	855711	205	987365	421	012635	50
11	9.843206	216	9.855588	205	9.987618	421	10.012382	49
12	843336	216	855465	205	987871	421	012129	48
13	843466	216	855342	205	988123	421	011877	47
14	843595	216	855219	205	988376	421	011624	46
15	843725	216	855096	205	988629	421	011371	45
16	843855	216	854973	205	988882	421	011118	44
17	843984	216	854850	205	989134	421	010866	43
18	844114	215	854727	206	989387	421	010613	42
19	844243	215	854603	206	989640	421	010360	41
20	844372	215	854480	206	989893	421	010107	40
21	9.844502	215	9.854356	206	9.990145	421	10.009855	39
22	844631	215	854233	206	990398	421	009602	38
23	844760	215	854109	206	990651	421	009349	37
24	844889	215	853986	206	990903	421	009097	36
25	845018	215	853862	206	991156	421	008844	35
26	845147	215	853738	206	991409	421	008591	34
27	845276	214	853614	207	991662	421	008338	33
28	845405	214	853490	207	991914	421	008086	32
29	845533	214	853366	207	992167	421	007833	31
30	845662	214	853242	207	992420	421	007580	30
31	9.845790	214	9.853118	207	9.992672	421	10.007328	29
32	845919	214	852994	207	992925	421	007075	28
33	846047	214	852869	207	993178	421	006822	27
34	846175	214	852745	207	993430	421	006570	26
35	846304	214	852620	207	993683	421	006317	25
36	846432	213	852496	208	993936	421	006064	24
37	846560	213	852371	208	994189	421	005811	23
38	846688	213	852247	208	994441	421	005559	22
39	846816	213	852122	208	994694	421	005306	21
40	846944	213	851997	208	994947	421	005053	20
41	9.847071	213	9.851872	208	9.995199	421	10.004801	19
42	847199	213	851747	208	995452	421	004548	18
43	847327	213	851622	208	995705	421	004295	17
44	847454	212	851497	209	995957	421	004043	16
45	847582	212	851372	209	996210	421	003790	15
46	847709	212	851246	209	996463	421	003537	14
47	847836	212	851121	209	996715	421	003285	13
48	847964	212	850996	209	996968	421	003032	12
49	848091	212	850870	209	997221	421	002779	11
50	848218	212	850745	209	997473	421	002527	10
51	9.848345	212	9.850619	209	9.997726	421	10.002271	9
52	848472	211	850493	210	997979	421	002021	8
53	848599	211	850368	210	998231	421	001769	7
54	848726	211	850242	210	998484	421	001516	6
55	848852	211	850116	210	998737	421	001263	5
56	848979	211	849990	210	998989	421	001011	4
57	849106	211	849864	210	999242	421	000758	3
58	849232	211	849738	210	999495	421	000505	2
59	849359	211	849611	210	999748	421	000253	1
60	849485	211	849485	210	10.000000	421	000000	0
	Cosinus.		Sinus.		Cotang.		Tang.	M.

45 Degrés.

TABLE

DE

SINUS ET TANGENTES

NATURELS

POUR CHAQUE

DEGRE ET MINUTE

DU QUART-DE-CERCLE.

Si l'angle donné est moindre que 45°, cherches les degrés et le titre de la colonne au *haut* de la page; et les minutes à la *gauche*. Mais si l'angle est entre 45° et 90°, cherches les degrés et le nom de la colonne, au *bas*; et les minutes à la *droite*.

Les *sécantes* et *cosécantes* qui manquent dans la table se trouvent aisément. Si l'on divise 1 par le cosinus d'un arc, le quotient sera la sécante de cet arc. Et si l'on divise 1 par le sinus d'un arc, le quotient sera la cosécante de cet arc.

Les valeurs des sinus et cosinus sont moindres qu'une unité, et sont données en décimales, quoique le point décimal soit omis dans l'impression; de même aussi, les tangentes d'arcs au-dessous de 45°, et les cotangentes d'arcs au-dessus de 45°, sont moindres que l'unité et sont exprimées en décimales, avec l'omission du point décimal.

′	0°		1°		2°		3°		4°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	00000	Unité	01745	99985	03490	99939	05234	99863	06976	99756	60
1	00029	Unité	01774	99984	03519	99938	05263	99861	07005	99754	59
2	00058	Unité	01803	99984	03548	99937	05292	99860	07034	99752	58
3	00087	Unité	01832	99983	03577	99936	05321	99858	07063	99750	57
4	00116	Unité	01862	99983	03606	99935	05350	99857	07092	99748	56
5	00145	Unité	01891	99982	03635	99934	05379	99855	07121	99746	55
6	00175	Unité	01920	99982	03664	99933	05408	99854	07150	99744	54
7	00204	Unité	01949	99981	03693	99932	05437	99852	07179	99742	53
8	00233	Unité	01978	99980	03723	99931	05466	99851	07208	99740	52
9	00262	Unité	02007	99980	03752	99930	05495	99849	07237	99738	51
10	00291	Unité	02036	99979	03781	99929	05524	99847	07266	99736	50
11	00320	99999	02065	99979	03810	99927	05553	99846	07295	99734	49
12	00349	99999	02094	99978	03839	99926	05582	99844	07324	99731	48
13	00378	99999	02123	99977	03868	99925	05611	99842	07353	99729	47
14	00407	99999	02152	99977	03897	99924	05640	99841	07382	99727	46
15	00436	99999	02181	99976	03926	99923	05669	99839	07411	99725	45
16	00465	99999	02211	99976	03955	99922	05698	99838	07440	99723	44
17	00495	99999	02240	99975	03984	99921	05727	99836	07469	99721	43
18	00524	99999	02269	99974	04013	99919	05756	99834	07498	99719	42
19	00553	99998	02298	99974	04042	99918	05785	99833	07527	99716	41
20	00582	99998	02327	99973	04071	99917	05814	99831	07556	99714	40
21	00611	99998	02356	99972	04100	99916	05844	99829	07585	99712	39
22	00640	99998	02385	99972	04129	99915	05873	99827	07614	99710	38
23	00669	99998	02414	99971	04159	99913	05902	99826	07643	99708	37
24	00698	99998	02443	99970	04188	99912	05931	99824	07672	99705	36
25	00727	99997	02472	99969	04217	99911	05960	99822	07701	99703	35
26	00756	99997	02501	99969	04246	99910	05989	99821	07730	99701	34
27	00785	99997	02530	99968	04275	99909	06018	99819	07759	99699	33
28	00814	99997	02560	99967	04304	99907	06047	99817	07788	99696	32
29	00844	99996	02589	99966	04333	99906	06076	99815	07817	99694	31
30	00873	99996	02618	99966	04362	99905	06105	99813	07846	99692	30
31	00902	99996	02647	99965	04391	99904	06134	99812	07875	99689	29
32	00931	99996	02676	99964	04420	99902	06163	99810	07904	99687	28
33	00960	99995	02705	99963	04449	99901	06192	99808	07933	99685	27
34	00989	99995	02734	99963	04478	99900	06221	99806	07962	99683	26
35	01018	99995	02763	99962	04507	99898	06250	99804	07991	99680	25
36	01047	99995	02792	99961	04536	99897	06279	99803	08020	99678	24
37	01076	99994	02821	99960	04565	99896	06308	99801	08049	99676	23
38	01105	99994	02850	99959	04594	99894	06337	99799	08078	99673	22
39	01134	99994	02879	99959	04623	99893	06366	99797	08107	99671	21
40	01164	99993	02908	99958	04653	99892	06395	99795	08136	99668	20
41	01193	99993	02938	99957	04682	99890	06424	99793	08165	99666	19
42	01222	99993	02967	99956	04711	99889	06453	99792	08194	99664	18
43	01251	99992	02996	99955	04740	99888	06482	99790	08223	99661	17
44	01280	99992	03025	99954	04769	99886	06511	99788	08252	99659	16
45	01309	99991	03054	99953	04798	99885	06540	99786	08281	99657	15
46	01338	99991	03083	99952	04827	99883	06569	99784	08310	99654	14
47	01367	99991	03112	99952	04856	99882	06598	99782	08339	99652	13
48	01396	99990	03141	99951	04885	99881	06627	99780	08368	99649	12
49	01425	99990	03170	99950	04914	99879	06656	99778	08397	99647	11
50	01454	99989	03199	99949	04943	99878	06685	99776	08426	99644	10
51	01483	99989	03228	99948	04972	99876	06714	99774	08455	99642	9
52	01513	99989	03257	99947	05001	99875	06743	99772	08484	99639	8
53	01542	99988	03286	99946	05030	99873	06773	99770	08513	99637	7
54	01571	99988	03316	99945	05059	99872	06802	99768	08542	99635	6
55	01600	99987	03345	99944	05088	99870	06831	99766	08571	99632	5
56	01629	99987	03374	99943	05117	99869	06860	99764	08600	99630	4
57	01658	99986	03403	99942	05146	99867	06889	99762	08629	99627	3
58	01687	99986	03432	99941	05175	99866	06918	99760	08658	99625	2
59	01716	99985	03461	99940	05205	99864	06947	99758	08687	99622	1
60	01745	99985	03490	99939	05234	99863	06976	99756	08716	99619	0
′	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	′
	89°		88°		87°		86°		85°		

4°		
Sinus.	Cos.	′
06976	99756	60
07005	99754	59
07034	99752	58
07063	99750	57
07092	99748	56
07121	99746	55
07150	99744	54
07179	99742	53
07208	99740	52
07237	99738	51
07266	99736	50
07295	99734	49
07324	99731	48
07353	99729	47
07382	99727	46
07411	99725	45
07440	99723	44
07469	99721	43
07498	99719	42
07527	99716	41
07556	99714	40
07585	99712	39
07614	99710	38
07643	99708	37
07672	99705	36
07701	99703	35
07730	99701	34
07759	99699	33
07788	99696	32
07817	99694	31
07846	99692	30
07875	99689	29
07904	99687	28
07933	99685	27
07962	99683	26
07991	99680	25
08020	99678	24
08049	99676	23
08078	99673	22
08107	99671	21
08136	99668	20
08165	99666	19
08194	99664	18
08223	99661	17
08252	99659	16
08281	99657	15
8310	99654	14
8339	99652	13
8368	99649	12
8397	99647	11
8426	99644	10
8455	99642	9
8484	99639	8
8513	99637	7
8542	99635	6
8571	99632	5
8600	99630	4
8629	99627	3
8658	99625	2
8687	99622	1
8716	99619	0
s.	Sinus.	′
85°		

′	5°		6°		7°		8°		9°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	08716	99619	10453	99452	12187	99255	13917	99027	15643	98769	60
1	08745	99617	10482	99449	12216	99251	13946	99023	1567[illegible]	98764	59
2	08774	99614	10511	99446	12245	99248	13975	99019	15701	98760	58
3	08803	99612	10540	99443	12274	99244	14004	99015	15730	98755	57
4	08831	99609	10569	99440	12302	99240	14033	99011	15758	98751	56
5	08860	99607	10597	99437	12331	99237	14061	99006	15787	98746	55
6	08889	99604	10626	99434	12360	99233	14090	99002	15816	98741	54
7	08918	99602	10655	99431	12389	99230	14119	98998	15845	8737	53
8	08947	99599	10684	99428	12418	99226	14148	89[illegible]4	15873	98732	52
9	08976	99596	10713	99424	12447	99222	14177	899[illegible]	15902	8728	51
10	09005	99594	10742	99421	12476	99219	14205	98986	15931	98723	50
11	09034	99591	10771	99418	12504	99215	14234	98982	15959	98718	49
12	09063	99588	10800	99415	12533	99211	14263	98978	15988	98714	48
13	09092	99586	10829	99412	12562	99208	14292	98973	16017	98709	47
14	09121	99583	10858	99409	12591	99204	14320	98969	16046	98704	46
15	09150	99580	10887	99406	12620	99200	14349	98965	16074	98700	45
16	09179	99578	10916	99402	12649	99197	14378	98961	16103	98695	44
17	09208	99575	10945	99399	12678	99193	14407	98957	16132	98690	43
18	09237	99572	10973	99396	12706	99189	14436	98953	16160	98686	42
19	09266	99570	11002	99393	12735	99186	14464	98948	16189	98681	41
20	09295	99567	11031	99390	12764	99182	14493	98944	16218	8676	40
21	09324	99564	11060	99386	12798	99178	14522	98940	16246	98671	39
22	09353	99562	11089	99383	12822	99175	14551	98936	16275	98667	38
23	09382	99559	11118	99380	12851	99171	14580	98931	16304	98662	37
24	09411	99556	11147	99377	12880	99167	14608	98927	16333	98657	36
25	09440	99553	11176	99374	12908	99163	14637	98923	16361	98652	35
26	09469	99551	11205	99370	12937	99160	14666	98919	16390	98648	34
27	09498	99548	11234	99367	12966	99156	14695	98914	16419	98643	33
28	09527	99545	11263	99364	12995	99152	14723	98910	16447	98638	32
29	09556	99542	11291	99360	13024	99148	14752	98906	16476	98633	31
30	09585	99540	11320	99357	13053	99144	14781	98902	16505	98629	30
31	09614	99537	11349	99354	13981	99141	14810	98897	16533	98624	29
32	09642	99534	11378	99351	13110	99137	14838	98893	16562	8619	28
33	09671	99531	11407	99347	13139	99133	14867	98889	16591	98614	27
34	09700	99528	11436	99344	13168	99129	14896	98884	16620	98609	26
35	09729	99526	11465	99341	13197	99125	14925	98880	16648	98604	25
36	09758	99523	11494	99337	13226	99122	14954	98876	16677	98600	24
37	09787	99520	11523	99334	13254	99118	14982	98871	16706	98595	23
38	09816	99517	11552	99331	13283	99114	15011	98867	16734	98590	22
39	09845	99514	11580	99327	13312	99110	15040	98863	16763	98585	21
40	09874	99511	11609	99324	13341	99106	15069	98858	16792	98580	20
41	09903	99508	11638	99320	13370	99102	15097	98854	16820	98575	19
42	09932	99506	11667	99317	13399	99098	15126	98849	16849	98570	18
43	09961	99503	11696	99314	13427	99094	15155	98845	16878	98565	17
44	09990	99500	11725	99310	13456	99091	15184	98841	16906	8561	16
45	10019	99497	11754	99307	13485	99087	15212	98836	16935	98556	15
46	10048	99494	11783	99303	13514	99083	15241	98832	16964	98551	14
47	10077	99491	11812	99300	13543	99079	15270	98827	16992	98546	13
48	10106	99488	11840	99297	13572	99075	15299	98823	17021	98541	12
49	10135	99485	11869	99293	13600	99071	15327	98818	17050	98536	11
50	10164	99482	11898	99290	13629	99067	15356	98814	17078	98531	10
51	10192	99479	11927	99286	13658	99063	15385	98809	17107	98526	9
52	10221	99476	11956	99283	13687	99059	15414	98805	17136	98521	8
53	10250	99473	11985	99279	13716	99055	15442	98[illegible]00	17164	98516	7
54	10279	99470	12014	99276	13744	99051	15471	98796	17193	98511	6
55	10308	99467	12043	99272	13773	99047	15500	98791	17222	98506	5
56	10337	99464	12071	99269	13802	99043	15529	98787	17250	98501	4
57	10366	99461	12100	99265	13831	99039	15557	9878[illegible]	17279	98496	3
58	10395	99458	12129	99262	13860	99035	15586	98778	17308	98491	2
59	10424	99455	12158	99258	13889	99031	15615	98773	17336	8486	1
60	10453	99452	12187	99255	13917	99027	15643	98769	17365	98481	0
′	Cos.	Sinus.	Cos	Sinus	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus	
	84°		83°		82°		81°		80°		

′	10°		11°		12°		13°		14°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	17365	98481	19081	98163	20791	97815	22495	97437	24192	97030	60
1	17393	98476	19109	98157	20820	97809	22523	97430	24220	97023	59
2	17422	98471	19138	98152	20848	97803	22552	97424	24249	97015	58
3	17451	98466	19167	98146	20877	97797	22580	97417	24277	97008	57
4	17479	98461	19195	98140	20905	97791	22608	97411	24305	97001	56
5	17508	98455	19224	98135	20933	97784	22637	97404	24333	96994	55
6	17537	98450	19252	98129	20962	97778	22665	97398	24362	96987	54
7	17565	98445	19281	98124	20990	97772	22693	97391	24390	96980	53
8	17594	98440	19309	98118	21019	97766	22722	97384	24418	96973	52
9	17623	98435	19338	98112	21047	97760	22750	97378	24446	96966	51
10	17651	98430	19366	98107	21076	97754	22778	97371	24474	96959	50
11	17680	98425	19395	98101	21104	97748	22807	97365	24503	96952	49
12	17708	98420	19423	98096	21132	97742	22835	97358	24531	96945	48
13	17737	98414	19452	98090	21161	97735	22863	97351	24559	96937	47
14	17766	98409	19481	98084	21189	97729	22892	97345	24587	96930	46
15	17794	98404	19509	98079	21218	97723	22920	97338	24615	96923	45
16	17823	98399	19538	98073	21246	97717	22948	97331	24644	96916	44
17	17852	98394	19566	98067	21275	97711	22977	97325	24672	96909	43
18	17880	98389	19595	98061	21303	97705	23005	97318	24700	96902	42
19	17909	98383	19623	98056	21331	97698	23033	97311	24728	96894	41
20	17937	98378	19652	98050	21360	97692	23062	97304	24756	96887	40
21	17966	98373	19680	98044	21388	97686	23090	97298	24784	96880	39
22	17995	98368	19709	98039	21417	97680	23118	97291	24813	96873	38
23	18023	98362	19737	98033	21445	97673	23146	97284	24841	96866	37
24	18052	98357	19766	98027	21474	97667	23175	97278	24869	96858	36
25	18081	98352	19794	98021	21502	97661	23203	97271	24897	96851	35
26	18109	98347	19823	98016	21530	97655	23231	97264	24925	96844	34
27	18138	98341	19851	98010	21559	97648	23260	97257	24954	96837	33
28	18166	98336	19880	98004	21587	97642	23288	97251	24982	96829	32
29	18195	98331	19908	97998	21616	97636	23316	97244	25010	96822	31
30	18224	98325	19937	97992	21644	97630	23345	97237	25038	96815	30
31	18252	98320	19965	97987	21672	97623	23373	97230	25066	96807	29
32	18281	98315	19994	97981	21701	97617	23401	97223	25094	96800	28
33	18309	98310	20022	97975	21729	97611	23429	97217	25122	96793	27
34	18338	98304	20051	97969	21758	97604	23458	97210	25151	96786	26
35	18367	98299	20079	97963	21786	97598	23486	97203	25179	96778	25
36	18395	98294	20108	97958	21814	97592	23514	97196	25207	96771	24
37	18424	98288	20136	97952	21843	97585	23542	97189	25235	96764	23
38	18452	98283	20165	97946	21871	97579	23571	97182	25263	96756	22
39	18481	98277	20193	97940	21899	97573	23599	97176	25291	96749	21
40	18509	98272	20222	97934	21928	97566	23627	97169	25320	96742	20
41	18538	98267	20250	97928	21956	97560	23656	97162	25348	96734	19
42	18567	98261	20279	97922	21985	97553	23684	97155	25376	96727	18
43	18595	98256	20307	97916	22013	97547	23712	97148	25404	96719	17
44	18624	98250	20336	97910	22041	97541	23740	97141	25432	96712	16
45	18652	98245	20364	97905	22070	97534	23769	97134	25460	96705	15
46	18681	98240	20393	97899	22098	97528	23797	97127	25488	96697	14
47	18710	98234	20421	97893	22126	97521	23825	97120	25516	96690	13
48	18738	98229	20450	97887	22155	97515	23853	97113	25545	96682	12
49	18767	98223	20478	97881	22183	97508	23882	97106	25573	96675	11
50	18795	98218	20507	97875	22212	97502	23910	97100	25601	96667	10
51	18824	98212	20535	97869	22240	97496	23938	97093	25629	96660	9
52	18852	98207	20563	97863	22268	97489	23966	97086	25657	96653	8
53	18881	98201	20592	97857	22297	97483	23995	97079	25685	96645	7
54	18910	98196	20620	97851	22325	97476	24023	97072	25713	96638	6
55	18938	98190	20649	97845	22353	97470	24051	97065	25741	96630	5
56	18967	98185	20677	97839	22382	97463	24079	97058	25769	96623	4
57	18995	98179	20706	97833	22410	97457	24108	97051	25798	96615	3
58	19024	98174	20734	97827	22438	97450	24136	97044	25826	96608	2
59	19052	98168	20763	97821	22467	97444	24164	97037	25854	96600	1
60	19081	98163	20791	97815	22495	97437	24192	97030	25882	96593	0
′	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	′
	79°		78°		77°		76°		75°		

′	15° Sinus.	15° Cos.	16° Sinus.	16° Cos.	17° Sinus.	17° Cos.	18° Sinus.	18° Cos.	19° Sinus.	19° Cos.	′
0	25882	96593	27564	96126	29237	95630	30902	95106	32557	94552	60
1	25910	96585	27592	96118	29265	95622	30929	95097	32584	94542	59
2	25938	96578	27620	96110	29293	95613	30957	95088	32612	94533	58
3	25966	96570	27648	96102	29321	95605	30985	95079	32639	94523	57
4	25994	96562	27676	96094	29348	95596	31012	95070	32667	94514	56
5	26022	96555	27704	96086	29376	95588	31040	95061	32694	94504	55
6	26050	96547	27731	96078	29404	95579	31068	95052	32722	94495	54
7	26079	96540	27759	96070	29432	95571	31095	95043	32749	94485	53
8	26107	96532	27787	96062	29460	95562	31123	95033	32777	94476	52
9	26135	96524	27815	96054	29487	95554	31151	95024	32804	94466	51
10	26163	96517	27843	96046	29515	95545	31178	95015	32832	94457	50
11	26191	96509	27871	96037	29543	95536	31206	95006	32859	94447	49
12	26219	96502	27899	96029	29571	95528	31233	94997	32887	94438	48
13	26247	96494	27927	96021	29599	95519	31261	94988	32914	94428	47
14	26275	96486	27955	96013	29626	95511	31289	94979	32942	94418	46
15	26303	96479	27983	96005	29654	95502	31316	94970	32969	94409	45
16	26331	96471	28011	95997	29682	95493	31344	94961	32997	94399	44
17	26359	96463	28039	95989	29710	95485	31372	94952	33024	94390	43
18	26387	96456	28067	95981	29737	95476	31399	94943	33051	94380	42
19	26415	96448	28095	95972	29765	95467	31427	94933	33079	94370	41
20	26443	96440	28123	95964	29793	95459	31454	94924	33106	94361	40
21	26471	96433	28150	95956	29821	95450	31482	94915	33134	[illegible]	39
22	26500	96425	28178	95948	29849	95441	31510	94906	33161	[illegible]	38
23	26528	96417	28206	95940	29876	95433	31537	94897	33189	94332	37
24	26556	96410	28234	95931	29904	95424	31565	94888	33216	94322	36
25	26584	96402	28262	95923	29932	95415	31593	94878	33244	94313	35
26	26612	96394	28290	95915	29960	95407	31620	94869	33271	94303	34
27	26640	96386	28318	95907	29987	95398	31648	94860	33298	94293	33
28	26668	96379	28346	95898	30015	95389	31675	94851	33326	94284	32
29	26696	96371	28374	95890	30043	95380	31703	94842	33353	94274	31
30	26724	96363	28402	95882	30071	95372	31730	94832	33381	94264	30
31	26752	96355	28429	95874	30098	95363	31758	94823	33408	94254	29
32	26780	96347	28457	95865	30126	95354	31786	94814	33436	94245	28
33	26808	96340	28485	95857	30154	95345	31813	94805	33463	94235	27
34	26836	96332	28513	95849	30182	95337	31841	94795	33490	94225	26
35	26864	96324	28541	95841	30209	95328	31868	94786	33518	94215	25
36	26892	96316	28569	95832	30237	95319	31896	94777	33545	94206	24
37	26920	96308	28597	95824	30265	95310	31923	94768	33573	94196	23
38	26948	96301	28625	95816	30292	95301	31951	94758	33600	94186	22
39	26976	96293	28652	95807	30320	95293	31979	94749	33627	94176	21
40	27004	96285	28680	95799	30348	95284	32006	94740	33655	94167	20
41	27032	96277	28708	95791	30376	95275	32034	94730	33682	94157	19
42	27060	96269	28736	95782	30403	95266	32061	94721	33710	94147	18
43	27088	96261	28764	95774	30431	95257	32089	94712	33737	94137	17
44	27116	96253	28792	95766	30459	95248	32116	94702	33764	94127	16
45	27144	96246	28820	95757	30486	95240	32144	94693	33792	[illegible]	15
46	27172	96238	28847	95749	30514	95231	32171	94684	33819	94108	14
47	27200	96230	28875	95740	30542	95222	32199	94674	33846	94098	13
48	27228	96222	28903	95732	30570	95213	32227	94665	33874	94088	12
49	27256	96214	28931	95724	30597	95204	32254	94656	33901	94078	11
50	27284	96206	28959	95715	30625	95195	32282	94646	33929	94068	10
51	27312	96198	28987	95707	30653	95186	32309	94637	33956	94058	9
52	27340	96190	29015	95698	30680	95177	32337	94627	33983	94049	8
53	27368	96182	29042	95690	30708	95168	32364	94618	34011	94039	7
54	27396	96174	29070	95681	30736	95159	32392	94609	34038	94029	6
55	27424	96166	29098	95673	30763	95150	32419	94599	34065	94019	5
56	27452	96158	29126	95664	30791	95142	32447	94590	34093	94009	4
57	27480	96150	29154	95656	30819	95133	32474	94580	34120	93999	3
58	27508	96142	29182	95647	30846	95124	32502	94571	34147	93989	2
59	27536	96134	29209	95639	30874	95115	32529	94561	34175	93979	1
60	27564	96126	29237	95630	30902	95106	32557	94552	34202	93969	0
′	74° Cos.	74° Sinus.	73° Cos.	73° Sinus.	72° Cos.	72° Sinus.	71° Cos.	71° Sinus.	70° Cos.	70° Sinus.	′



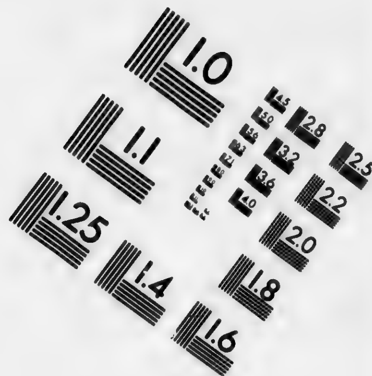
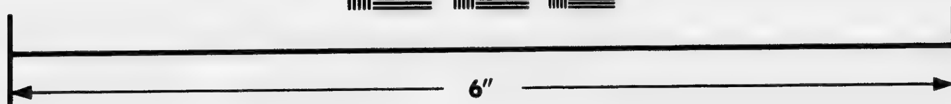
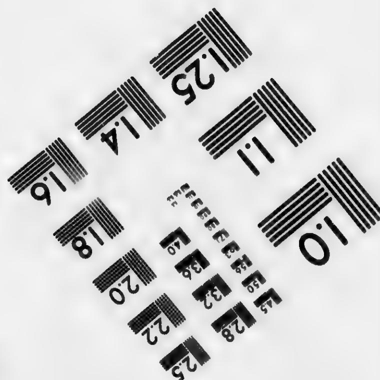
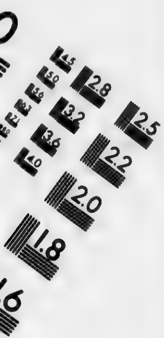


IMAGE EVALUATION
TEST TARGET (MT-3)








2.8
2.5
3.2
2.2
2.0
1.8


1.1
1.0

′	20°		21°		22°		23°		24°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	34202	93969	35837	93358	37461	92718	39073	92050	40674	91355	60
1	34229	93959	35864	93348	37488	92707	39100	92039	40700	91343	59
2	34257	93949	35891	93337	37515	92697	39127	92028	40727	91331	58
3	34284	93939	35918	93327	37542	92686	39153	92016	40753	91319	57
4	34311	93929	35945	93316	37569	92675	39180	92005	40780	91307	56
5	34339	93919	35973	93306	37595	92664	39207	91994	40806	91295	55
6	34366	93909	36000	93295	37622	92653	39234	91982	40833	91283	54
7	34393	93899	36027	93285	37649	92642	39260	91971	40860	91272	53
8	34421	93889	36054	93274	37676	92631	39287	91959	40886	91260	52
9	34448	93879	36081	93264	37703	92620	39314	91948	40913	91248	51
10	34475	93869	36108	93253	37730	92609	39341	91936	40939	91236	50
11	34503	93859	36135	93243	37757	92598	39367	91925	40966	91224	49
12	34530	93849	36162	93232	37784	92587	39394	91914	40992	91212	48
13	34557	93839	36190	93222	37811	92576	39421	91902	41019	91200	47
14	34584	93829	36217	93211	37838	92565	39448	91891	41045	91188	46
15	34612	93819	36244	93201	37865	92554	39474	91879	41072	91176	45
16	34639	93809	36271	93190	37892	92543	39501	91868	41098	91164	44
17	34666	93799	36298	93180	37919	92532	39528	91856	41125	91152	43
18	34694	93789	36325	93169	37946	92521	39555	91845	41151	91140	42
19	34721	93779	36352	93159	37973	92510	39581	91833	41178	91128	41
20	34748	93769	36379	93148	37999	92499	39608	91822	41204	91116	40
21	34775	93759	36406	93137	38026	92488	39635	91810	41231	91104	39
22	34803	93748	36434	93127	38053	92477	39661	91799	41257	91092	38
23	34830	93738	36461	93116	38080	92466	39688	91787	41284	91080	37
24	34857	93728	36488	93106	38107	92455	39715	91775	41310	91068	36
25	34884	93718	36515	93095	38134	92444	39741	91764	41337	91056	35
26	34912	93708	36542	93084	38161	92432	39768	91752	41363	91044	34
27	34939	93698	36569	93074	38188	92421	39795	91741	41390	91032	33
28	34966	93688	36596	93063	38215	92410	39822	91729	41416	91020	32
29	34993	93677	36623	93052	38241	92399	39848	91718	41443	91008	31
30	35021	93667	36650	93042	38268	92388	39875	91706	41469	90996	30
31	35048	93657	36677	93031	38295	92377	39902	91694	41496	90984	29
32	35075	93647	36704	93020	38322	92366	39928	91683	41522	90972	28
33	35102	93637	36731	93010	38349	92355	39955	91671	41549	90960	27
34	35130	93626	36758	92999	38376	92343	39982	91660	41575	90948	26
35	35157	93616	36785	92988	38403	92332	40008	91648	41602	90936	25
36	35184	93606	36812	92978	38430	92321	40035	91636	41628	90924	24
37	35211	93596	36839	92967	38456	92310	40062	91625	41655	90911	23
38	35239	93585	36867	92956	38483	92299	40088	91613	41681	90899	22
39	35266	93575	36894	92945	38510	92287	40115	91601	41707	90887	21
40	35293	93565	36921	92935	38537	92276	40141	91590	41734	90875	20
41	35320	93555	36948	92924	38564	92265	40168	91578	41760	90863	19
42	35347	93544	36975	92913	38591	92254	40195	91566	41787	90851	18
43	35375	93534	37002	92902	38617	92243	40221	91555	41813	90839	17
44	35402	93524	37029	92892	38644	92231	40248	91543	41840	90826	16
45	35429	93514	37056	92881	38671	92220	40275	91531	41866	90814	15
46	35456	93503	37083	92870	38698	92209	40301	91519	41892	90802	14
47	35484	93493	37110	92859	38725	92198	40328	91508	41919	90790	13
48	35511	93483	37137	92849	38752	92186	40355	91496	41945	90778	12
49	35538	93472	37164	92838	38778	92175	40381	91484	41972	90766	11
50	35565	93462	37191	92827	38805	92164	40408	91472	41998	90753	10
51	35592	93452	37218	92816	38832	92152	40434	91461	42024	90741	9
52	35619	93441	37245	92805	38859	92141	40461	91449	42051	90729	8
53	35647	93431	37272	92794	38886	92130	40488	91437	42077	90717	7
54	35674	93420	37299	92784	38912	92119	40514	91425	42104	90704	6
55	35701	93410	37326	92773	38939	92107	40541	91414	42130	90692	5
56	35728	93400	37353	92762	38966	92096	40567	91402	42156	90680	4
57	35755	93389	37380	92751	38993	92085	40594	91390	42183	90668	3
58	35782	93379	37407	92740	39020	92073	40621	91378	42209	90655	2
59	35810	93368	37434	92729	39046	92062	40647	91366	42235	90643	1
60	35837	93358	37461	92718	39073	92050	40674	91355	42262	90631	0
′	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	′
	69°		68°		67°		66°		65°		

′	25°		26°		27°		28°		29°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	42262	90631	43837	89879	45399	89101	46947	88295	48481	87462	60
1	42288	90618	43863	89867	45425	89087	46973	88281	48506	87448	59
2	42315	90606	43889	89854	45451	89074	46999	88267	48532	87434	58
3	42341	90594	43916	89841	45477	89061	47024	88254	48557	87420	57
4	42367	90582	43942	89828	45503	89048	47050	88240	48583	87406	56
5	42394	90569	43968	89816	45529	89035	47076	88226	48608	87391	55
6	42420	90557	43994	89803	45554	89021	47101	88213	48634	87377	54
7	42446	90545	44020	89790	45580	89008	47127	88199	48659	87363	53
8	42473	90532	44046	89777	45606	88995	47153	88185	48684	87349	52
9	42499	90520	44072	89764	45632	88981	47178	88172	48710	87335	51
10	42525	90507	44098	89752	45658	88968	47204	88158	48735	87321	50
11	42552	90495	44124	89739	45684	88955	47229	88144	48761	87306	49
12	42578	90483	44151	89726	45710	88942	47255	88130	48786	87292	48
13	42604	90470	44177	89713	45736	88928	47281	88117	48811	87278	47
14	42631	90458	44203	89700	45762	88915	47306	88103	48837	87264	46
15	42657	90446	44229	89687	45787	88902	47332	88089	48862	87250	45
16	42683	90433	44255	89674	45813	88888	47358	88075	48888	87235	44
17	42709	90421	44281	89662	45839	88875	47383	88062	48913	87221	43
18	42736	90408	44307	89649	45865	88862	47409	88048	48938	87207	42
19	42762	90396	44333	89636	45891	88848	47434	88034	48964	87193	41
20	42788	90383	44359	89623	45917	88835	47460	88020	48989	87178	40
21	42815	90371	44385	89610	45942	88822	47486	88006	49014	87164	39
22	42841	90358	44411	89597	45968	88808	47511	87993	49040	87150	38
23	42867	90346	44437	89584	45994	88795	47537	87979	49065	87136	37
24	42894	90334	44464	89571	46020	88782	47562	87965	49090	87121	36
25	42920	90321	44490	89558	46046	88768	47588	87951	49116	87107	35
26	42946	90309	44516	89545	46072	88755	47614	87937	49141	87093	34
27	42972	90296	44542	89532	46097	88741	47639	87923	49166	87079	33
28	42999	90284	44568	89519	46123	88728	47665	87909	49192	87064	32
29	43025	90271	44594	89506	46149	88715	47690	87896	49217	87050	31
30	43051	90259	44620	89493	46175	88701	47716	87882	49242	87036	30
31	43077	90246	44646	89480	46201	88688	47741	87868	49268	87021	29
32	43104	90233	44672	89467	46226	88674	47767	87854	49293	87007	28
33	43130	90221	44698	89454	46252	88661	47793	87840	49318	86993	27
34	43156	90208	44724	89441	46278	88647	47818	87826	49344	86978	26
35	43182	90196	44750	89428	46304	88634	47844	87812	49369	86964	25
36	43209	90183	44776	89415	46330	88620	47869	87798	49394	86949	24
37	43235	90171	44802	89402	46355	88607	47895	87784	49419	86935	23
38	43261	90158	44828	89389	46381	88593	47920	87770	49445	86921	22
39	43287	90146	44854	89376	46407	88580	47946	87756	49470	86906	21
40	43313	90133	44880	89363	46433	88566	47971	87743	49495	86892	20
41	43340	90120	44900	89350	46458	88553	47997	87729	49521	86878	19
42	43366	90108	44932	89337	46484	88539	48022	87715	49546	86863	18
43	43392	90095	44958	89324	46510	88526	48048	87701	49571	86849	17
44	43418	90082	44984	89311	46536	88512	48073	87687	49596	86834	16
45	43445	90070	45010	89298	46561	88499	48099	87673	49622	86820	15
46	43471	90057	45036	89285	46587	88485	48124	87659	49647	86805	14
47	43497	90045	45062	89272	46613	88472	48150	87645	49672	86791	13
48	43523	90032	45088	89259	46639	88458	48175	87631	49697	86777	12
49	43549	90019	45114	89245	46664	88445	48201	87617	49723	86762	11
50	43575	90007	45140	89232	46690	88431	48226	87603	49748	86748	10
51	43602	89994	45166	89219	46716	88417	48252	87589	49773	86733	9
52	43628	89981	45192	89206	46742	88404	48277	87575	49798	86719	8
53	43654	89968	45218	89193	46767	88390	48303	87561	49824	86704	7
54	43680	89956	45243	89180	46793	88377	48328	87546	49849	86690	6
55	43706	89943	45269	89167	46819	88363	48354	87532	49874	86675	5
56	43733	89930	45295	89153	46844	88349	48379	87518	49899	86661	4
57	43759	89918	45321	89140	46870	88336	48405	87504	49924	86646	3
58	43785	89905	45347	89127	46896	88322	48430	87490	49950	86632	2
59	43811	89892	45373	89114	46921	88308	48456	87476	49975	86617	1
60	43837	89879	45399	89101	46947	88295	48481	87462	50000	86603	0
′	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	′
	64°		63°		62°		61°		60°		

'	30°		31°		32°		33°		34°		'
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	50000	86603	51504	85717	52992	84805	54464	83867	55919	82904	60
1	50025	86588	51529	85702	53017	84789	54488	83851	55943	82887	59
2	50050	86573	51554	85687	53041	84774	54513	83835	55968	82871	58
3	50076	86559	51579	85672	53066	84759	54537	83819	55992	82855	57
4	50101	86544	51604	85657	53091	84743	54561	83804	56016	82839	56
5	50126	86530	51628	85642	53115	84728	54586	83788	56040	82822	55
6	50151	86515	51653	85627	53140	84712	54610	83772	56064	82806	54
7	50176	86501	51678	85612	53164	84697	54635	83756	56088	82790	53
8	50201	86486	51703	85597	53189	84681	54659	83740	56112	82773	52
9	50227	86471	51728	85582	53214	84666	54683	83724	56136	82757	51
10	50252	86457	51753	85567	53238	84650	54708	83708	56160	82741	50
11	50277	86442	51778	85551	53263	84635	54732	83692	56184	82724	49
12	50302	86427	51803	85536	53288	84619	54756	83676	56208	82708	48
13	50327	86413	51828	85521	53312	84604	54781	83660	56232	82692	47
14	50352	86398	51852	85506	53337	84588	54805	83645	56256	82675	46
15	50377	86384	51877	85491	53361	84573	54829	83629	56280	82659	45
16	50403	86369	51902	85476	53386	84557	54854	83613	56305	82643	44
17	50428	86354	51927	85461	53411	84542	54878	83597	56329	82626	43
18	50453	86340	51952	85446	53435	84526	54902	83581	56353	82610	42
19	50478	86325	51977	85431	53460	84511	54927	83565	56377	82593	41
20	50503	86310	52002	85416	53484	84495	54951	83549	56401	82577	40
21	50528	86295	52026	85401	53509	84480	54975	83533	56425	82561	39
22	50553	86281	52051	85385	53534	84464	54999	83517	56449	82544	38
23	50578	86266	52076	85370	53558	84448	55024	83501	56473	82528	37
24	50603	86251	52101	85355	53583	84433	55048	83485	56497	82511	36
25	50628	86237	52126	85340	53607	84417	55072	83469	56521	82495	35
26	50654	86222	52151	85325	53632	84402	55097	83453	56545	82478	34
27	50679	86207	52175	85310	53656	84386	55121	83437	56569	82462	33
28	50704	86192	52200	85294	53681	84370	55145	83421	56593	82446	32
29	50729	86178	52225	85279	53705	84355	55169	83405	56617	82429	31
30	50754	86163	52250	85264	53730	84339	55194	83389	56641	82413	30
31	50779	86148	52275	85249	53754	84324	55218	83373	56665	82396	29
32	50804	86133	52299	85234	53779	84308	55242	83356	56689	82380	28
33	50829	86119	52324	85218	53804	84292	55266	83340	56713	82363	27
34	50854	86104	52349	85203	53828	84277	55291	83324	56736	82347	26
35	50879	86089	52374	85188	53853	84261	55315	83308	56760	82330	25
36	50904	86074	52399	85173	53877	84245	55339	83292	56784	82314	24
37	50929	86059	52423	85157	53902	84230	55363	83276	56808	82297	23
38	50954	86045	52448	85142	53926	84214	55388	83260	56832	82281	22
39	50979	86030	52473	85127	53951	84198	55412	83244	56856	82264	21
40	51004	86015	52498	85112	53975	84182	55436	83228	56880	82248	20
41	51029	86000	52522	85096	54000	84167	55460	83212	56904	82231	19
42	51054	85985	52547	85081	54024	84151	55484	83195	56928	82214	18
43	51079	85970	52572	85066	54049	84135	55509	83179	56952	82198	17
44	51104	85956	52597	85051	54073	84120	55533	83163	56976	82181	16
45	51129	85941	52621	85035	54097	84104	55557	83147	57000	82165	15
46	51154	85926	52646	85020	54122	84088	55581	83131	57024	82148	14
47	51179	85911	52671	85005	54146	84072	55605	83115	57047	82132	13
48	51204	85896	52696	84989	54171	84057	55630	83098	57071	82115	12
49	51229	85881	52720	84974	54195	84041	55654	83082	57095	82098	11
50	51254	85866	52745	84959	54220	84025	55678	83066	57119	82082	10
51	51279	85851	52770	84943	54244	84009	55702	83050	57143	82065	9
52	51304	85836	52794	84928	54269	83994	55726	83034	57167	82048	8
53	51329	85821	52819	84913	54293	83978	55750	83017	57191	82032	7
54	51354	85806	52844	84897	54317	83962	55775	83001	57215	82015	6
55	51379	85792	52869	84882	54342	83946	55799	82985	57238	81999	5
56	51404	85777	52893	84866	54366	83930	55823	82969	57262	81982	4
57	51429	85762	52918	84851	54391	83915	55847	82953	57286	81965	3
58	51454	85747	52943	84836	54415	83899	55871	82936	57310	81949	2
59	51479	85732	52967	84820	54440	83883	55895	82920	57334	81932	1
60	51504	85717	52992	84805	54464	83867	55919	82904	57358	81915	0
'	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus	Cos.	Sinus.	'
	59°		58°		57°		56°		55°		

′	35°		36°		37°		38°		39°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	57358	81915	58779	80902	60182	79864	61566	78801	62932	77715	60
1	57381	81899	58802	80885	60205	79846	61589	78783	62955	77696	59
2	57405	81882	58826	80867	60228	79829	61612	78765	62977	77678	58
3	57429	81865	58849	80850	60251	79811	61635	78747	63000	77660	57
4	57453	81848	58873	80833	60274	79793	61658	78729	63022	77641	56
5	57477	81832	58896	80816	60298	79776	61681	78711	63045	77623	55
6	57501	81815	58920	80799	60321	79758	61704	78694	63068	77605	54
7	57524	81798	58943	80782	60344	79741	61726	78676	63090	77586	53
8	57548	81782	58967	80765	60367	79723	61749	78658	63113	77568	52
9	57572	81765	58990	80748	60390	79706	61772	78640	63135	77550	51
10	57596	81748	59014	80730	60414	79688	61795	78622	63158	77531	50
11	57619	81731	59037	80713	60437	79671	61818	78604	63180	77513	49
12	57643	81714	59061	80696	60460	79653	61841	78586	63203	77494	48
13	57667	81698	59084	80679	60483	79635	61864	78568	63225	77476	47
14	57691	81681	59108	80662	60506	79618	61887	78550	63248	77458	46
15	57715	81664	59131	80644	60529	79600	61909	78532	63271	77439	45
16	57738	81647	59154	80627	60553	79583	61932	78514	63293	77421	44
17	57762	81631	59178	80610	60576	79565	61955	78496	63316	77402	43
18	57786	81614	59201	80593	60599	79547	61978	78478	63338	77384	42
19	57810	81597	59225	80576	60622	79530	62001	78460	63361	77366	41
20	57833	81580	59248	80558	60645	79512	62024	78442	63383	77347	40
21	57857	81563	59272	80541	60668	79494	62046	78424	63406	77329	39
22	57881	81546	59295	80524	60691	79477	62069	78405	63428	77310	38
23	57904	81530	59318	80507	60714	79459	62092	78387	63451	77292	37
24	57928	81513	59342	80489	60738	79441	62115	78369	63473	77273	36
25	57952	81496	59365	80472	60761	79424	62138	78351	63496	77255	35
26	57976	81479	59389	80455	60784	79406	62160	78333	63518	77236	34
27	57999	81462	59412	80438	60807	79388	62183	78315	63540	77218	33
28	58023	81445	59436	80420	60830	79371	62206	78297	63563	77199	32
29	58047	81428	59459	80403	60853	79353	62229	78279	63585	77181	31
30	58070	81412	59482	80386	60876	79335	62251	78261	63608	77162	30
31	58094	81395	59506	80368	60899	79318	62274	78243	63630	77144	29
32	58118	81378	59529	80351	60922	79300	62297	78225	63653	77125	28
33	58141	81361	59552	80334	60945	79282	62320	78206	63675	77107	27
34	58165	81344	59576	80316	60968	79264	62342	78188	63698	77088	26
35	58189	81327	59599	80299	60991	79247	62365	78170	63720	77070	25
36	58212	81310	59622	80282	61015	79229	62388	78152	63742	77051	24
37	58236	81293	59646	80264	61038	79211	62411	78134	63765	77033	23
38	58260	81276	59669	80247	61061	79193	62433	78116	63787	77014	22
39	58283	81259	59693	80230	61084	79176	62456	78098	63810	76996	21
40	58307	81242	59716	80212	61107	79158	62479	78079	63832	76977	20
41	58330	81225	59739	80195	61130	79140	62502	78061	63854	76959	19
42	58354	81208	59763	80178	61153	79122	62524	78043	63877	76940	18
43	58378	81191	59786	80160	61176	79105	62547	78025	63899	76921	17
44	58401	81174	59809	80143	61199	79087	62570	78007	63922	76903	16
45	58425	81157	59832	80125	61222	79069	62592	77988	63944	76884	15
46	58449	81140	59856	80108	61245	79051	62615	77970	63966	76866	14
47	58472	81123	59879	80091	61268	79033	62638	77952	63989	76847	13
48	58496	81106	59902	80073	61291	79016	62660	77934	64011	76828	12
49	58519	81089	59926	80056	61314	78998	62683	77916	64033	76810	11
50	58543	81072	59949	80038	61337	78980	62706	77897	64056	76791	10
51	58567	81055	59972	80021	61360	78962	62728	77879	64078	76772	9
52	58590	81038	59995	80003	61383	78944	62751	77861	64100	76754	8
53	58614	81021	60019	79986	61406	78926	62774	77843	64123	76735	7
54	58637	81004	60042	79968	61429	78908	62796	77824	64145	76717	6
55	58661	80987	60065	79951	61451	78891	62819	77806	64167	76698	5
56	58684	80970	60089	79934	61474	78873	62842	77788	64190	76679	4
57	58708	80953	60112	79916	61497	78855	62864	77769	64212	76661	3
58	58731	80936	60135	79899	61520	78837	62887	77751	64234	76642	2
59	58755	80919	60158	79881	61543	78819	62909	77733	64256	76623	1
60	58779	80902	60182	79864	61566	78801	62932	77715	64279	76604	0
′	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	′
	54°		53°		52°		51°		50°		

′	40°		41°		42°		43°		44°		′
	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	
0	64279	76604	65606	75471	66913	74314	68200	73135	69466	71934	60
1	64301	76586	65628	75452	66935	74295	68221	73116	69487	71914	59
2	64323	76567	65650	75433	66956	74276	68242	73096	69508	71894	58
3	64346	76548	65672	75414	66978	74256	68264	73076	69529	71873	57
4	64368	76530	65694	75395	66999	74237	68285	73056	69549	71853	56
5	64390	76511	65716	75375	67021	74217	68306	73036	69570	71833	55
6	64412	76492	65738	75356	67043	74198	68327	73016	69591	71813	54
7	64435	76473	65759	75337	67064	74178	68349	72996	69612	71792	53
8	64457	76455	65781	75318	67086	74159	68370	72976	69633	71772	52
9	64479	76436	65803	75299	67107	74139	68391	72957	69654	71752	51
10	64501	76417	65825	75280	67129	74120	68412	72937	69675	71732	50
11	64524	76398	65847	75261	67151	74100	68434	72917	69696	71711	49
12	64546	76380	65869	75241	67172	74080	68455	72897	69717	71691	48
13	64568	76361	65891	75222	67194	74061	68476	72877	69737	71671	47
14	64590	76342	65913	75203	67215	74041	68497	72857	69758	71650	46
15	64612	76323	65935	75184	67237	74022	68518	72837	69779	71630	45
16	64635	76304	65956	75165	67258	74002	68539	72817	69800	71610	44
17	64657	76286	65978	75146	67280	73983	68561	72797	69821	71590	43
18	64679	76267	66000	75126	67301	73963	68582	72777	69842	71569	42
19	64701	76248	66022	75107	67323	73944	68603	72757	69862	71549	41
20	64723	76229	66044	75088	67344	73924	68624	72737	69883	71529	40
21	64746	76210	66066	75069	67366	73904	68645	72717	69904	71508	39
22	64768	76192	66088	75050	67387	73885	68666	72697	69925	71488	38
23	64790	76173	66109	75030	67409	73865	68688	72677	69946	71468	37
24	64812	76154	66131	75011	67430	73846	68709	72657	69966	71447	36
25	64834	76135	66153	74992	67452	73826	68730	72637	69987	71427	35
26	64856	76116	66175	74973	67473	73806	68751	72617	70008	71407	34
27	64878	76097	66197	74953	67495	73787	68772	72597	70029	71386	33
28	64901	76078	66218	74934	67516	73767	68793	72577	70049	71366	32
29	64923	76059	66240	74915	67538	73747	68814	72557	70070	71345	31
30	64945	76041	66262	74896	67559	73728	68835	72537	70091	71325	30
31	64967	76022	66284	74876	67580	73708	68857	72517	70112	71305	29
32	64989	76003	66306	74857	67602	73688	68878	72497	70132	71284	28
33	65011	75984	66327	74838	67623	73669	68899	72477	70153	71264	27
34	65033	75965	66349	74818	67645	73649	68920	72457	70174	71243	26
35	65055	75946	66371	74799	67666	73629	68941	72437	70195	71223	25
36	65077	75927	66393	74780	67688	73610	68962	72417	70215	71203	24
37	65100	75908	66414	74760	67709	73590	68983	72397	70236	71182	23
38	65122	75889	66436	74741	67730	73570	69004	72377	70257	71162	22
39	65144	75870	66458	74722	67752	73551	69025	72357	70277	71141	21
40	65166	75851	66480	74703	67773	73531	69046	72337	70298	71121	20
41	65188	75832	66501	74683	67795	73511	69067	72317	70319	71100	19
42	65210	75813	66523	74664	67816	73491	69088	72297	70339	71080	18
43	65232	75794	66545	74644	67837	73472	69109	72277	70360	71059	17
44	65254	75775	66566	74625	67859	73452	69130	72257	70381	71039	16
45	65276	75756	66588	74606	67880	73432	69151	72236	70401	71019	15
46	65298	75738	66610	74586	67901	73413	69172	72216	70422	70998	14
47	65320	75719	66632	74567	67923	73393	69193	72196	70443	70978	13
48	65342	75700	66653	74548	67944	73373	69214	72176	70463	70957	12
49	65364	75680	66675	74528	67965	73353	69235	72156	70484	70937	11
50	65386	75661	66697	74509	67987	73333	69256	72136	70505	70916	10
51	65408	75642	66718	74489	68008	73314	69277	72116	70525	70896	9
52	65430	75623	66740	74470	68029	73294	69298	72095	70546	70875	8
53	65452	75604	66762	74451	68051	73274	69319	72075	70567	70855	7
54	65474	75585	66783	74431	68072	73254	69340	72055	70587	70834	6
55	65496	75566	66805	74412	68093	73234	69361	72035	70608	70813	5
56	65518	75547	66827	74392	68115	73215	69382	72015	70628	70793	4
57	65540	75528	66848	74373	68136	73195	69403	71995	70649	70772	3
58	65562	75509	66870	74353	68157	73175	69424	71974	70670	70752	2
59	65584	75490	66891	74334	68179	73155	69445	71954	70690	70731	1
60	65606	75471	66913	74314	68200	73135	69466	71934	70711	70711	0
′	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	Cos.	Sinus.	′
	49°		48°		47°		46°		45°		

′	0°		1°		2°		3°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	00000	Infinie.	01746	57.2900	03492	28.6363	05241	19.0811	60
1	00029	3437.75	01775	56.3506	03521	28.3994	05270	18.9755	59
2	00058	1718.87	01804	55.4415	03550	28.1664	05299	18.8711	58
3	00087	1145.92	01833	54.5613	03579	27.9372	05328	18.7678	57
4	00116	859.436	01862	53.7086	03609	27.7117	05357	18.6656	56
5	00145	687.549	01891	52.8821	03638	27.4899	05387	18.5645	55
6	00175	572.957	01920	52.0807	03667	27.2715	05416	18.4645	54
7	00204	491.106	01949	51.3032	03696	27.0566	05445	18.3655	53
8	00233	429.718	01978	50.5485	03725	26.8450	05474	18.2677	52
9	00262	381.971	02007	49.8157	03754	26.6367	05503	18.1708	51
10	00291	343.774	02036	49.1039	03783	26.4316	05533	18.0750	50
11	00320	312.521	02066	48.4121	03812	26.2296	05562	17.9802	49
12	00349	286.478	02095	47.7395	03842	26.0307	05591	17.8863	48
13	00378	264.441	02124	47.0853	03871	25.8348	05620	17.7934	47
14	00407	245.552	02153	46.4489	03900	25.6418	05649	17.7015	46
15	00436	229.182	02182	45.8294	03929	25.4517	05678	17.6106	45
16	00465	214.858	02211	45.2261	03958	25.2644	05708	17.5205	44
17	00495	202.219	02240	44.6386	03987	25.0798	05737	17.4314	43
18	00524	190.984	02269	44.0661	04016	24.8978	05766	17.3432	42
19	00553	180.932	02298	43.5081	04046	24.7185	05795	17.2558	41
20	00582	171.885	02328	42.9641	04075	24.5418	05824	17.1693	40
21	00611	163.700	02357	42.4335	04104	24.3675	05854	17.0837	39
22	00640	156.259	02386	41.9158	04133	24.1957	05883	16.9990	38
23	00669	149.465	02415	41.4106	04162	24.0263	05912	16.9150	37
24	00698	143.237	02444	40.9174	04191	23.8593	05941	16.8319	36
25	00727	137.507	02473	40.4358	04220	23.6945	05970	16.7496	35
26	00756	132.219	02502	39.9655	04250	23.5321	05999	16.6681	34
27	00785	127.321	02531	39.5059	04279	23.3718	06029	16.5874	33
28	00814	122.774	02560	39.0568	04308	23.2137	06058	16.5075	32
29	00844	118.540	02589	38.6177	04337	23.0577	06087	16.4283	31
30	00873	114.589	02619	38.1885	04366	22.9038	06116	16.3499	30
31	00902	110.892	02648	37.7686	04395	22.7519	06145	16.2722	29
32	00931	107.426	02677	37.3579	04424	22.6020	06175	16.1952	28
33	00960	104.171	02706	36.9560	04454	22.4541	06204	16.1190	27
34	00989	101.107	02735	36.5627	04483	22.3081	06233	16.0435	26
35	01018	98.2179	02764	36.1776	04512	22.1640	06262	15.9687	25
36	01047	95.4895	02793	35.8006	04541	22.0217	06291	15.8945	24
37	01076	92.9085	02822	35.4313	04570	21.8813	06321	15.8211	23
38	01105	90.4633	02851	35.0695	04599	21.7426	06350	15.7483	22
39	01135	88.1436	02881	34.7151	04628	21.6056	06379	15.6762	21
40	01164	85.9398	02910	34.3678	04658	21.4704	06408	15.6048	20
41	01193	83.8435	02939	34.0273	04687	21.3369	06437	15.5340	19
42	01222	81.8470	02968	33.6935	04716	21.2049	06467	15.4638	18
43	01251	79.9434	02997	33.3662	04745	21.0747	06496	15.3943	17
44	01280	78.1263	03026	33.0452	04774	20.9460	06525	15.3254	16
45	01309	76.3900	03055	32.7303	04803	20.8188	06554	15.2571	15
46	01338	74.7292	03084	32.4213	04832	20.6932	06584	15.1893	14
47	01367	73.1390	03114	32.1181	04862	20.5691	06613	15.1222	13
48	01396	71.6151	03143	31.8205	04891	20.4465	06642	15.0557	12
49	01425	70.1533	03172	31.5284	04920	20.3253	06671	14.9898	11
50	01455	68.7501	03201	31.2416	04949	20.2056	06700	14.9244	10
51	01484	67.4019	03230	30.9599	04978	20.0872	06730	14.8596	9
52	01513	66.1055	03259	30.6833	05007	19.9702	06759	14.7954	8
53	01542	64.8580	03288	30.4116	05037	19.8546	06788	14.7317	7
54	01571	63.6567	03317	30.1446	05066	19.7403	06817	14.6685	6
55	01600	62.4992	03346	29.8823	05095	19.6273	06847	14.6059	5
56	01629	61.3829	03376	29.6245	05124	19.5156	06876	14.5438	4
57	01658	60.3058	03405	29.3711	05153	19.4051	06905	14.4823	3
58	01687	59.2659	03434	29.1220	05182	19.2959	06934	14.4212	2
59	01716	58.2612	03463	28.8771	05212	19.1879	06963	14.3607	1
60	01746	57.2900	03492	28.6363	05241	19.0811	06993	14.3007	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	89°		88°		87°		86°		

′	4°		5°		6°		7°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	06993	14.3007	08749	11.4301	10510	9.51436	12278	8.14435	60
1	07022	14.2411	08778	11.3919	10540	9.48781	12308	8.12481	59
2	07051	14.1821	08807	11.3540	10569	9.46141	12338	8.10536	58
3	07080	14.1235	08837	11.3163	10599	9.43515	12367	8.08600	57
4	07110	14.0655	08866	11.2789	10628	9.40904	12397	8.06674	56
5	07139	14.0079	08895	11.2417	10657	9.38307	12426	8.04756	55
6	07168	13.9507	08925	11.2048	10687	9.35724	12456	8.02848	54
7	07197	13.8940	08954	11.1681	10716	9.33154	12485	8.00948	53
8	07227	13.8378	08983	11.1316	10746	9.30599	12515	7.99058	52
9	07256	13.7821	09013	11.0954	10775	9.28058	12544	7.97176	51
10	07285	13.7267	09042	11.0594	10805	9.25530	12574	7.95302	50
11	07314	13.6719	09071	11.0237	10834	9.23016	12603	7.93438	49
12	07344	13.6174	09101	10.9882	10863	9.20516	12633	7.91582	48
13	07373	13.5634	09130	10.9529	10893	9.18028	12662	7.89734	47
14	07402	13.5098	09159	10.9178	10922	9.15554	12692	7.87895	46
15	07431	13.4566	09189	10.8829	10952	9.13093	12722	7.86064	45
16	07461	13.4039	09218	10.8483	10981	9.10646	12751	7.84242	44
17	07490	13.3515	09247	10.8139	11011	9.08211	12781	7.82428	43
18	07519	13.2996	09277	10.7797	11040	9.05789	12810	7.80622	42
19	07548	13.2480	09306	10.7457	11070	9.03379	12840	7.78825	41
20	07578	13.1969	09335	10.7119	11099	9.00983	12869	7.77035	40
21	07607	13.1461	09365	10.6783	11128	8.98598	12899	7.75254	39
22	07636	13.0958	09394	10.6450	11158	8.96227	12929	7.73480	38
23	07665	13.0458	09423	10.6118	11187	8.93867	12958	7.71715	37
24	07695	12.9962	09453	10.5789	11217	8.91520	12988	7.69957	36
25	07724	12.9469	09482	10.5462	11246	8.89185	13017	7.68208	35
26	07753	12.8981	09511	10.5136	11276	8.86862	13047	7.66466	34
27	07782	12.8496	09541	10.4813	11305	8.84551	13076	7.64732	33
28	07812	12.8014	09570	10.4491	11335	8.82252	13106	7.63005	32
29	07841	12.7536	09600	10.4172	11364	8.79964	13136	7.61287	31
30	07870	12.7062	09629	10.3854	11394	8.77689	13165	7.59575	30
31	07899	12.6591	09658	10.3538	11423	8.75425	13195	7.57872	29
32	07929	12.6124	09688	10.3224	11452	8.73172	13224	7.56176	28
33	07958	12.5660	09717	10.2913	11482	8.70931	13254	7.54487	27
34	07987	12.5199	09746	10.2602	11511	8.68701	13284	7.52806	26
35	08017	12.4742	09776	10.2294	11541	8.66482	13313	7.51132	25
36	08046	12.4288	09805	10.1988	11570	8.64275	13343	7.49465	24
37	08075	12.3838	09834	10.1683	11600	8.62078	13372	7.47806	23
38	08104	12.3390	09864	10.1381	11629	8.59893	13402	7.46154	22
39	08134	12.2946	09893	10.1080	11659	8.57718	13432	7.44509	21
40	08163	12.2505	09923	10.0780	11688	8.55555	13461	7.42871	20
41	08192	12.2067	09952	10.0483	11718	8.53402	13491	7.41240	19
42	08221	12.1632	09981	10.0187	11747	8.51259	13521	7.39616	18
43	08251	12.1201	10011	9.98930	11777	8.49128	13550	7.37999	17
44	08280	12.0772	10040	9.96007	11806	8.47007	13580	7.36389	16
45	08309	12.0346	10069	9.93101	11836	8.44896	13609	7.34786	15
46	08339	11.9923	10099	9.90211	11865	8.42795	13639	7.33190	14
47	08368	11.9504	10128	9.87338	11895	8.40705	13669	7.31600	13
48	08397	11.9087	10158	9.84482	11924	8.38625	13698	7.30018	12
49	08427	11.8673	10187	9.81641	11954	8.36555	13728	7.28442	11
50	08456	11.8262	10216	9.78817	11983	8.34496	13758	7.26873	10
51	08485	11.7853	10246	9.76009	12013	8.32446	13787	7.25310	9
52	08514	11.7448	10275	9.73217	12042	8.30406	13817	7.23754	8
53	08544	11.7045	10305	9.70441	12072	8.28376	13846	7.22204	7
54	08573	11.6645	10334	9.67680	12101	8.26355	13876	7.20661	6
55	08602	11.6248	10363	9.64935	12131	8.24345	13906	7.19125	5
56	08632	11.5853	10393	9.62205	12160	8.22344	13935	7.17594	4
57	08661	11.5461	10422	9.59490	12190	8.20352	13965	7.16071	3
58	08690	11.5072	10452	9.56791	12219	8.18370	13995	7.14553	2
59	08720	11.4685	10481	9.54106	12249	8.16398	14024	7.13042	1
60	08749	11.4301	10510	9.51436	12278	8.14435	14054	7.11537	0
	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	
′	85°		84°		83°		82°		′

'	8° Tang.	8° Cotang.	9° Tang.	9° Cotang.	10° Tang.	10° Cotang.	11° Tang.	11° Cotang.	'
0	14054	7.11537	15838	6.31375	17633	5.67128	19438	5.14455	60
1	14084	7.10038	15868	6.30189	17663	5.66165	19468	5.13658	59
2	14113	7.08546	15898	6.29007	17693	5.65205	19498	5.12862	58
3	14143	7.07059	15928	6.27829	17723	5.64248	19529	5.12069	57
4	14173	7.05579	15958	6.26655	17753	5.63295	19559	5.11279	56
5	14202	7.04105	15988	6.25486	17783	5.62344	19589	5.10490	55
6	14232	7.02637	16017	6.24321	17813	5.61397	19619	5.09704	54
7	14262	7.01174	16047	6.23160	17843	5.60452	19649	5.08921	53
8	14291	6.99718	16077	6.22003	17873	5.59511	19680	5.08139	52
9	14321	6.98268	16107	6.20851	17903	5.58573	19710	5.07360	51
10	14351	6.96823	16137	6.19703	17933	5.57638	19740	5.06584	50
11	14381	6.95385	16167	6.18559	17963	5.56706	19770	5.05809	49
12	14410	6.93952	16196	6.17419	17993	5.55777	19801	5.05037	48
13	14440	6.92525	16226	6.16283	18023	5.54851	19831	5.04267	47
14	14470	6.91104	16256	6.15151	18053	5.53927	19861	5.03499	46
15	14499	6.89688	16286	6.14023	18083	5.53007	19891	5.02734	45
16	14529	6.88278	16316	6.12899	18113	5.52090	19921	5.01971	44
17	14559	6.86874	16346	6.11779	18143	5.51176	19952	5.01210	43
18	14588	6.85475	16376	6.10664	18173	5.50264	19982	5.00451	42
19	14618	6.84082	16405	6.09552	18203	5.49356	20012	4.99695	41
20	14648	6.82694	16435	6.08444	18233	5.48451	20042	4.98940	40
21	14678	6.81312	16465	6.07340	18263	5.47548	20073	4.98188	39
22	14707	6.79936	16495	6.06240	18293	5.46648	20103	4.97438	38
23	14737	6.78564	16525	6.05143	18323	5.45751	20133	4.96690	37
24	14767	6.77199	16555	6.04051	18353	5.44857	20164	4.95945	36
25	14796	6.75838	16585	6.02962	18383	5.43966	20194	4.95201	35
26	14826	6.74483	16615	6.01878	18414	5.43077	20224	4.94460	34
27	14856	6.73133	16645	6.00797	18444	5.42192	20254	4.93721	33
28	14886	6.71789	16674	5.99720	18474	5.41309	20285	4.92984	32
29	14915	6.70450	16704	5.98646	18504	5.40429	20315	4.92249	31
30	14945	6.69116	16734	5.97576	18534	5.39552	20345	4.91516	30
31	14975	6.67787	16764	5.96510	18564	5.38677	20376	4.90785	29
32	15005	6.66463	16794	5.95448	18594	5.37805	20406	4.90056	28
33	15034	6.65144	16824	5.94390	18624	5.36936	20436	4.89330	27
34	15064	6.63831	16854	5.93335	18654	5.36070	20466	4.88605	26
35	15094	6.62523	16884	5.92283	18684	5.35206	20497	4.87882	25
36	15124	6.61219	16914	5.91235	18714	5.34345	20527	4.87162	24
37	15153	6.59921	16944	5.90191	18745	5.33487	20557	4.86444	23
38	15183	6.58627	16974	5.89151	18775	5.32631	20588	4.85727	22
39	15213	6.57339	17004	5.88114	18805	5.31778	20618	4.85013	21
40	15243	6.56055	17033	5.87080	18835	5.30928	20648	4.84300	20
41	15272	6.54777	17063	5.86051	18865	5.30080	20679	4.83590	19
42	15302	6.53503	17093	5.85024	18895	5.29235	20709	4.82882	18
43	15332	6.52234	17123	5.84001	18925	5.28393	20739	4.82175	17
44	15362	6.50970	17153	5.82982	18955	5.27553	20770	4.81471	16
45	15391	6.49710	17183	5.81966	18986	5.26715	20800	4.80769	15
46	15421	6.48456	17213	5.80953	19016	5.25880	20830	4.80068	14
47	15451	6.47206	17243	5.79944	19046	5.25048	20861	4.79370	13
48	15481	6 45961	17273	5.78938	19076	5.24218	20891	4.78673	12
49	15511	6.44720	17303	5.77936	19106	5.23391	20921	4.77978	11
50	15540	6.43484	17333	5.76937	19136	5.22566	20952	4.77286	10
51	15570	6.42253	17363	5.75941	19166	5.21744	20982	4.76595	9
52	15600	6.41026	17393	5.74949	19197	5.20925	21013	4.75906	8
53	15630	6.39804	17423	5.73960	19227	5.20107	21043	4.75219	7
54	15660	6.38587	17453	5 72974	19257	5 19293	21073	4.74534	6
55	15689	6.37374	17483	5.71992	19287	5.18480	21104	4.73851	5
56	15719	6.36165	17513	5.71013	19317	5.17671	21134	4.73170	4
57	15749	6.34961	17543	5.70037	19347	5 16863	21164	4.72490	3
58	15779	6.33761	17573	5.69064	19378	5.16058	21195	4.71813	2
59	15809	6.32566	17603	5.68094	19408	5.15256	21225	4.71137	1
60	15838	6.31375	17633	5.67128	19438	5.14455	21256	4.70463	0
'	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	'
	81°		80°		79°		78°		

′	12°		13°		14°		15°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	21256	4.70463	23087	4.33148	24933	4.01078	26795	3.73205	60
1	21286	4.69791	23117	4.32573	24964	4.00582	26826	3.72771	59
2	21316	4.69121	23148	4.32001	24995	4.00086	26857	3.72338	58
3	21347	4.68452	23179	4.31430	25026	3.99592	26888	3.71907	57
4	21377	4.67786	23209	4.30860	25056	3.99099	26920	3.71476	56
5	21408	4.67121	23240	4.30291	25087	3.98607	26951	3.71046	55
6	21438	4.66458	23271	4.29724	25118	3.98117	26982	3.70616	54
7	21469	4.65797	23301	4.29159	25149	3.97627	27013	3.70188	53
8	21499	4.65138	23332	4.28595	25180	3.97139	27044	3.69761	52
9	21529	4.64480	23363	4.28032	25211	3.96651	27076	3.69335	51
10	21560	4.63825	23393	4.27471	25242	3.96165	27107	3.68909	50
11	21590	4.63171	23424	4.26911	25273	3.95680	27138	3.68485	49
12	21621	4.62518	23455	4.26352	25304	3.95196	27169	3.68061	48
13	21651	4.61868	23485	4.25795	25335	3.94713	27201	3.67638	47
14	21682	4.61219	23516	4.25239	25366	3.94232	27232	3.67217	46
15	21712	4.60572	23547	4.24685	25397	3.93751	27263	3.66796	45
16	21743	4.59927	23578	4.24132	25428	3.93271	27294	3.66376	44
17	21773	4.59283	23608	4.23580	25459	3.92793	27326	3.65957	43
18	21804	4.58641	23639	4.23030	25490	3.92316	27357	3 65538	42
19	21834	4 58001	23670	4.22481	25521	3.91839	27388	3 65121	41
20	21864	4.57363	23700	4.21933	25552	3.91364	27419	3.64705	40
21	21895	4.56726	23731	4.21387	25583	3.90890	27451	3.64289	39
22	21925	4.56091	23762	4.20842	25614	3.90417	27482	3.63874	38
23	21956	4.55458	23793	4.20298	25645	3.89945	27513	3.63461	37
24	21986	4.54826	23823	4.19756	25676	3.89474	27545	3.63048	36
25	22017	4.54196	23854	4.19215	25707	3.89004	27576	3.62636	35
26	22047	4.53568	23885	4.18675	25738	3.88536	27607	3.62224	34
27	22078	4.52941	23916	4.18137	25769	3.88068	27638	3.61814	33
28	22108	4.52316	23946	4.17600	25800	3.87601	27670	3.61405	32
29	22139	4 51693	23977	4.17064	25831	3.87136	27701	3.60996	31
30	22169	4.51071	24008	4.16530	25862	3.86671	27732	3.60588	30
31	22200	4.50451	24039	4.15997	25893	3.86208	27764	3.60181	29
32	22231	4.49832	24069	4.15465	25924	3.85745	27795	3.59775	28
33	22261	4.49215	24100	4.14934	25955	3.85284	27826	3.59370	27
34	22292	4.48600	24131	4.14405	25986	3.84824	27858	3.58966	26
35	22322	4.47986	24162	4.13877	26017	3.84364	27889	3.58562	25
36	22353	4.47374	24193	4.13350	26048	3.83906	27920	3.58160	24
37	22383	4.46764	24223	4.12825	26079	3.83449	27952	3.57758	23
38	22414	4.46155	24254	4.12301	26110	3.82992	27983	3.57357	22
39	22444	4.45548	24285	4.11778	26141	3.82537	28015	3.56957	21
40	22475	4.44942	24316	4.11256	26172	3.82083	28046	3.56557	20
41	22505	4.44338	24347	4.10736	26203	3.81630	28077	3.56159	19
42	22536	4.43735	24377	4.10216	26235	3.81177	28109	3.55761	18
43	22567	4.43134	24408	4.09699	26266	3.80726	28140	3.55364	17
44	22597	4.42534	24439	4.09182	26297	3.80276	28172	3.54968	16
45	22628	4.41936	24470	4.08666	26328	3.79827	28203	3.54573	15
46	22658	4.41340	24501	4.08152	26359	3.79378	28234	3.54179	14
47	22689	4.40745	24532	4.07639	26390	3.78931	28266	3.53785	13
48	22719	4.40152	24562	4.07127	26421	3.78485	28297	3.53393	12
49	22750	4.39560	24593	4.06616	26452	3.78040	28329	3.53001	11
50	22781	4.38969	24624	4.06107	26483	3.77595	28360	3.52609	10
51	22811	4.38381	24655	4.05599	26515	3.77152	28391	3.52219	9
52	22842	4.37793	24686	4.05092	26546	3.76709	28423	3.51829	8
53	22872	4.37207	24717	4.04586	26577	3.76268	28454	3.51441	7
54	22903	4.36623	24747	4.04081	26608	3.75828	28486	3.51053	6
55	22934	4.36040	24778	4.03578	26639	3.75388	28517	3.50666	5
56	22964	4.35459	24809	4.03075	26670	3.74950	28549	3.50279	4
57	22995	4.34879	24840	4.02574	26701	3.74512	28580	3.49894	3
58	23026	4.34300	24871	4.02074	26733	3.74075	28612	3.49509	2
59	23056	4.33723	24902	4.01576	26764	3.73640	28643	3.49125	1
60	23087	4.33148	24933	4.01078	26795	3.73205	28675	3.48741	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	77°		76°		75°		74°		

′	16°		17°		18°		19°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	28675	3.48741	30573	3.27085	32492	3.07768	34433	2.90421	60
1	28706	3.48359	30605	3.26745	32524	3.07464	34465	2.90147	59
2	28738	3 47977	30637	3.26406	32556	3.07160	34498	2.89873	58
3	28769	3.47596	30669	3.26067	32588	3.06857	34530	2.89600	57
4	28800	3.47216	30700	3.25729	32621	3.06554	34563	2.89327	56
5	28832	3.46837	30732	3.25392	32653	3.06252	34596	2.89055	55
6	28864	3.46458	30764	3.25055	32685	3.05950	34628	2.88783	54
7	28895	3.46080	30796	3.24719	32717	3.05649	34661	2.88511	53
8	28927	3.45703	30828	3.24383	32749	3.05349	34693	2.88240	52
9	28958	3.45327	30860	3.24049	32782	3.05049	34726	2.87970	51
10	28990	3.44951	30891	3.23714	32814	3.04749	34758	2.87700	50
11	29021	3.44576	30923	3.23381	32846	3.04450	34791	2.87430	49
12	29053	3.44202	30955	3.23048	32878	3.04152	34824	2.87161	48
13	29084	3.43829	30987	3.22715	32911	3.03854	34856	2.86892	47
14	29116	3.43456	31019	3.22384	32943	3.03556	34889	2.86624	46
15	29147	3.43084	31051	3.22053	32975	3.03260	34922	2.86356	45
16	29179	3.42713	31083	3.21722	33007	3.02963	34954	2.86089	44
17	29210	3 42343	31115	3.21392	33040	3.02667	34987	2.85822	43
18	29242	3 41973	31147	3.21063	33072	3.02372	35019	2.85555	42
19	29274	3.41604	31178	3.20734	33104	3.02077	35052	2.85289	41
20	29305	3.41236	31210	3.20406	33136	3.01783	35085	2.85023	40
21	29337	3.40869	31242	3.20079	33169	3.01489	35117	2.84758	39
22	29368	3.40502	31274	3.19752	33201	3.01196	35150	2.84494	38
23	29400	3.40136	31306	3.19426	33233	3.00903	35183	2.84229	37
24	29432	3.39771	31338	3.19100	33266	3.00611	35216	2.83965	36
25	29463	3.39406	31370	3.18775	33298	3.00319	35248	2.83702	35
26	29495	3.39042	31402	3.18451	33330	3.00028	35281	2.83439	34
27	29526	3.38679	31434	3.18127	33363	2.99738	35314	2.83176	33
28	29558	3.38317	31466	3.17804	33395	2.99447	35346	2.82914	32
29	29590	3.37955	31498	3.17481	33427	2.99158	35379	2.82653	31
30	29621	3.37594	31530	3.17159	33460	2.98868	35412	2.82391	30
31	29653	3.37234	31562	3.16838	33492	2.98580	35445	2.82130	29
32	29685	3.36875	31594	3.16517	33524	2.98292	35477	2.81870	28
33	29716	3.36516	31626	3 16197	33557	2.98004	35510	2.81610	27
34	29748	3.36158	31658	3.15877	33589	2.97717	35543	2.81350	26
35	29780	3.35800	31690	3.15558	33621	2.97430	35576	2.81091	25
36	29811	3.35443	31722	3.15240	33654	2.97144	35608	2.80833	24
37	29843	3.35087	31754	3.14922	33686	2.96858	35641	2.80574	23
38	29875	3.34732	31786	3.14605	33718	2.96573	35674	2.80316	22
39	29906	3.34377	31818	3.14288	33751	2.96288	35707	2.80059	21
40	29938	3.34023	31850	3.13972	33783	2.96004	35740	2.79802	20
41	29970	3.33670	31882	3.13656	33816	2.95721	35772	2.79545	19
42	30001	3.33317	31914	3.13341	33848	2.95437	35805	2.79289	18
43	30033	3.32965	31946	3.13027	33881	2.95155	35838	2.79033	17
44	30065	3.32614	31978	3.12713	33913	2.94872	35871	2.78778	16
45	30097	3.32264	32010	3.12400	33945	2.94590	35904	2.78523	15
46	30128	3.31914	32042	3.12087	33978	2.94309	35937	2.78269	14
47	30160	3.31565	32074	3.11775	34010	2.94028	35969	2.78014	13
48	30192	3.31216	32106	3.11464	34043	2.93748	36002	2.77761	12
49	30224	3.30868	32139	3.11153	34075	2.93468	36035	2.77507	11
50	30255	3.30521	32171	3.10842	34108	2.93189	36068	2.77254	10
51	30287	3.30174	32203	3.10532	34140	2.92910	36101	2.77002	9
52	30319	3.29829	32235	3.10223	34173	2.92632	36134	2.76750	8
53	30351	3.29483	32267	3.09914	34205	2.92354	36167	2.76498	7
54	30382	3.29139	32299	3.09606	34238	2.92076	36199	2.76247	6
55	30414	3.28795	32331	3.09298	34270	2.91799	36232	2.75996	5
56	30446	3.28452	32363	3.08991	34303	2.91523	36265	2.75746	4
57	30478	3.28109	32396	3.08685	34335	2.91246	36298	2.75496	3
58	30509	3.27767	32428	3 08379	34368	2.90971	36331	2.75246	2
59	30541	3.27426	32460	3.08073	34400	2.90696	36364	2.74997	1
60	30573	3.27085	32492	3.07768	34433	2.90421	36397	2.74748	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	73°		72°		71°		70°		

′	20°		21°		22°		23°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	36397	2.74748	38386	2.60509	40403	2.47509	42447	2 35585	60
1	36430	2.74499	38420	2.60283	40436	2.47302	42482	2.35395	59
2	36463	2.74251	38453	2.60057	40470	2.47095	42516	2.35205	58
3	36496	2.74004	38487	2.59831	40504	2.46888	42551	2.35015	57
4	36529	2.73756	38520	2.59606	40538	2.46682	42585	2.34825	56
5	36562	2.73509	38553	2 59381	40572	2.46476	42619	2.34636	55
6	36595	2.73263	38587	2.59156	40606	2.46270	42654	2.34447	54
7	36628	2.73017	38620	2.58932	40640	2.46065	42688	2.34258	53
8	36661	2.72771	38654	2.58708	40674	2.45860	42722	2.34069	52
9	36694	2.72526	38687	2.58484	40707	2.45655	42757	2.33881	51
10	36727	2.72281	38721	2.58261	40741	2.45451	42791	2.33693	50
11	36760	2.72036	38754	2.58038	40775	2.45246	42826	2.33505	49
12	36793	2.71792	38787	2.57815	40809	2.45043	42860	2.33317	48
13	36826	2.71548	38821	2.57593	40843	2.44839	42894	2.33130	47
14	36859	2.71305	38854	2.57371	40877	2.44636	42929	2.32943	46
15	36892	2.71062	38888	2.57150	40911	2.44433	42963	2.32756	45
16	36925	2.70819	38921	2.56928	40945.	2.44230	42998	2.32570	44
17	36958	2.70577	38955	2.56707	40979	2.44027	43032	2.32383	43
18	36991	2.70335	38988	2.56487	41013	2.43825	43067	2.32197	42
19	37024	2.70094	39022	2.56266	41047	2.43623	43101	2.32012	41
20	37057	2.69853	39055	2.56046	41081	2.43422	43136	2.31826	40
21	37090	2.69612	39089	2.55827	41115	2.43220	43170	2.31641	39
22	37124	2.69371	39122	2.55608	41149	2.43019	43205	2.31456	38
23	37157	2.69131	39156	2.55389	41183	2.42819	43239	2.31271	37
24	37190	2.68892	39190	2.55170	41217	2.42618	43274	2.31086	36
25	37223	2.68653	39223	2.54952	41251	2.42418	43308	2.30902	35
26	37256	2.68414	39257	2.54734	41285	2.42218	43343	2.30718	34
27	37289	2.68175	39290	2.54516	41319	2.42019	43378	2.30534	33
28	37322	2.67937	39324	2.54299	41353	2.41819	43412	2.30351	32
29	37355	2.67700	39357	2.54082	41387	2.41620	43447	2.30167	31
30	37388	2.67462	39391	2.53865	41421	2.41421	43481	2.29984	30
31	37422	2.67225	39425	2.53648	41455	2.41223	43516	2.29801	29
32	37455	2.66989	39458	2.53432	41490	2.41025	43550	2.29619	28
33	37488	2.66752	39492	2.53217	41524	2.40827	43585	2.29437	27
34	37521	2.66516	39526	2.53001	41558	2.40629	43620	2.29254	26
35	37554	2.66281	39559	2.52786	41592	2.40432	43654	2.29073	25
36	37588	2.66046	39593	2.52571	41626	2.40235	43689	2.28891	24
37	37621	2.65811	39626	2.52357	41660	2.40038	43724	2.28710	23
38	37654	2.65576	39660	2.52142	41694	2.39841	43758	2.28528	22
39	37687	2.65342	39694	2.51929	41728	2.39645	43793	2.28348	21
40	37720	2.65109	39727	2.51715	41763	2.39449	43828	2.28167	20
41	37754	2.64875	39761	2.51502	41797	2.39253	43862	2.27987	19
42	37787	2.64642	39795	2.51289	41831	2.39058	43897	2.27806	18
43	37820	2.64410	39829	2.51076	41865	2.38862	43932	2.27626	17
44	37853	2.64177	39862	2.50864	41899	2.38668	43966	2.27447	16
45	37887	2.63945	39896	2.50652	41933	2.38473	44001	2.27267	15
46	37920	2.63714	39930	2.50440	41968	2.38279	44036	2.27088	14
47	37953	2.63483	39963	2.50229	42002	2.38084	44071	2.26909	13
48	37986	2.63252	39997	2.50018	42036	2.37891	44105	2.26730	12
49	38020	2.63021	40031	2.49807	42070	2.37697	44140	2.26552	11
50	38053	2.62791	40065	2.49597	42105	2.37504	44175	2.26374	10
51	38086	2.62561	40098	2.49386	42139	2.37311	44210	2.26196	9
52	38120	2.62332	40132	2.49177	42173	2.37118	44244	2.26018	8
53	38153	2.62103	40166	2.48967	42207	2.36925	44279	2.25840	7
54	38186	2.61874	40200	2.48758	42242	2.36733	44314	2.25663	6
55	38220	2.61646	40234	2.48549	42276	2.36541	44349	2.25486	5
56	38253	2.61418	40267	2.48340	42310	2.36349	44384	2.25309	4
57	38286	2.61190	40301	2.48132	42345	2.36158	44418	2.25132	3
58	38320	2.60963	40335	2.47924	42379	2.35967	44453	2.24956	2
59	38353	2.60736	40369	2.47716	42413	2.35776	44488	2.24780	1
60	38386	2.60509	40403	2.47509	42447	2.35585	44523	2 24604	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	69°		68°		67°		66°		

′	24°		25°		26°		27°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	44523	2.24604	46631	2.14451	48773	2.05030	50953	1.96261	
1	44558	2.24428	46666	2.14288	48809	2.04879	50989	1.96120	59
2	44593	2.24252	46702	2.14125	48845	2.04728	51026	1.95979	58
3	44627	2.24077	46737	2.13963	48881	2.04577	51063	1.95838	57
4	44662	2.23902	46772	2.13801	48917	2.04426	51099	1.95698	56
5	44697	2.23727	46808	2.13639	48953	2.04276	51136	1.95557	55
6	44732	2.23553	46843	2.13477	48989	2.04125	51173	1.95417	54
7	44767	2.23378	46879	2.13316	49026	2 03975	51209	1.95277	53
8	44802	2.23204	46914	2 13154	49062	2.03825	51246	1.95137	52
9	44837	2.23030	46950	2.12993	49098	2.03675	51283	1.94997	51
10	44872	2.22857	46985	2.12832	49134	2.03526	51319	1.94858	50
11	44907	2.22683	47021	2.12671	49170	2.03376	51356	1.94718	49
12	44942	2.22510	47056	2.12511	49206	2.03227	51393	1.94579	48
13	44977	2 22337	47092	2.12350	49242	2.03078	51430	1.94440	47
14	45012	2.22164	47128	2.12190	49278	2.02929	51467	1.94301	46
15	45047	2.21992	47163	2.12030	49315	2.02780	51503	1.94162	45
16	45082	2.21819	47199	2.11871	49351	2.02631	51540	1.94023	44
17	45117	2.21647	47234	2 11711	49387	2.02483	51577	1.93885	43
18	45152	2.21475	47270	2.11552	49423	2.02335	51614	1.93746	42
19	45187	2.21304	47305	2 11392	49459	2.02187	51651	1.93608	41
20	45222	2.21132	47341	2.11233	49495	2.02039	51688	1.93470	40
21	45257	2.20961	47377	2.11075	49532	2.01891	51724	1.93332	39
22	45292	2.20790	47412	2.10916	49568	2.01743	51761	1.93195	38
23	45327	2.20619	47448	2.10758	49604	2.01596	51798	1.93057	37
24	45362	2.20449	47483	2.10600	49640	2.01449	51835	1.92920	36
25	45397	2.20278	47519	2.10442	49677	2.01302	51872	1.92782	35
26	45432	2.20108	47555	2.10284	49713	2.01155	51909	1.92645	34
27	45467	2.19938	47590	2.10126	49749	2.01008	51946	1.92508	33
28	45502	2.19769	47626	2.09969	49786	2.00862	51983	1.92371	32
29	45537	2.19599	47662	2 09811	49822	2.00715	52020	1.92235	31
30	45573	2.19430	47698	2.09654	49858	2.00569	52057	1.92098	30
31	45608	2.19261	47733	2.09498	49894	2.00423	52094	1.91962	29
32	45643	2.19092	47769	2.09341	49931	2.00277	52131	1.91826	28
33	45678	2.18923	47805	2.09184	49967	2.00131	52168	1.91690	27
34	45713	2.18755	47840	2.09028	50004	1.99986	52205	1.91554	26
35	45748	2.18587	47876	2.08872	50040	1.99841	52242	1.91418	25
36	45784	2.18419	47912	2.08716	50076	1.99695	52279	1.91282	24
37	45819	2.18251	47948	2.08560	50113	1.99550	52316	1.91147	23
38	45854	2.18084	47984	2.08405	50149	1.99406	52353	1.91012	22
39	45889	2.17916	48019	2.08250	50185	1.99261	52390	1.90876	21
40	45924	2.17749	48055	2.08094	50222	1.99116	52427	1.90741	20
41	45960	2.17582	48091	2.07939	50258	1.98972	52464	1.90607	19
42	45995	2.17416	48127	2.07785	50295	1.98828	52501	1.90472	18
43	46030	2.17249	48163	2.07630	50331	1.98684	52538	1.90337	17
44	46065	2.17083	48198	2.07476	50368	1.98540	52575	1.90203	16
45	46101	2.16917	48234	2.07321	50404	1.98396	52613	1.90069	15
46	46136	2.16751	48270	2.07167	50441	1.98253	52650	1.89935	14
47	46171	2.16585	48306	2.07014	50477	1.98110	52687	1.89801	13
48	46206	2.16420	48342	2.06860	50514	1.97966	52724	1.89667	12
49	46242	2.16255	48378	2.06706	50550	1.97823	52761	1.89533	11
50	46277	2.16090	48414	2.06553	50587	1.97680	52798	1.89400	10
51	46312	2.15925	48450	2.06400	50623	1.97538	52836	1.89266	9
52	46348	2.15760	48486	2.06247	50660	1.97395	52873	1.89133	8
53	46383	2.15596	48521	2.06094	50696	1.97253	52910	1.89000	7
54	46418	2 15432	48557	2.05942	50733	1.97111	52947	1.88867	6
55	46454	2.15268	48593	2.05790	50769	1.96969	52984	1.88734	5
56	46489	2.15104	48629	2.05637	50806	1.96827	53022	1.88602	4
57	46525	2.14940	48665	2.05485	50843	1.96685	53059	1.88469	3
58	46560	2.14777	48701	2.05333	50879	1.96544	53096	1.88337	2
59	46595	2.14614	48737	2.05182	50916	1.96402	53134	1.88205	1
60	46631	2.14451	48773	2.05030	50953	1.96261	53171	1.88073	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	65°		64°		63°		62°		

′	28°		29°		30°		31°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	53171	1.88073	55431	1.80405	57735	1.73205	60086	1.66428	60
1	53208	1.87941	55469	1.80281	57774	1.73089	60126	1.66318	59
2	53246	1.87809	55507	1.80158	57813	1.72973	60165	1.66209	58
3	53283	1.87677	55545	1.80034	57851	1.72857	60205	1.66099	57
4	53320	1.87546	55583	1.79911	57890	1.72741	60245	1.65990	56
5	53358	1.87415	55621	1.79788	57929	1.72625	60284	1.65881	55
6	53395	1.87283	55659	1.79665	57968	1.72509	60324	1.65772	54
7	53432	1.87152	55697	1.79542	58007	1.72393	60364	1.65663	53
8	53470	1.87021	55736	1.79419	58046	1.72278	60403	1.65554	52
9	53507	1.86891	55774	1.79296	58085	1.72163	60443	1.65445	51
10	53545	1.86760	55812	1.79174	58124	1.72047	60483	1.65337	50
11	53582	1.86630	55850	1.79051	58162	1.71932	60522	1.65228	49
12	53620	1.86499	55888	1.78929	58201	1.71817	60562	1.65120	48
13	53657	1.86369	55926	1.78807	58240	1.71702	60602	1.65011	47
14	53694	1.86239	55964	1.78685	58279	1.71588	60642	1.64903	46
15	53732	1.86109	56003	1.78563	58318	1.71473	60681	1.64795	45
16	53769	1.85979	56041	1.78441	58357	1.71358	60721	1.64687	44
17	53807	1.85850	56079	1.78319	58396	1.71244	60761	1.64579	43
18	53844	1.85720	56117	1.78198	58435	1.71129	60801	1.64471	42
19	53882	1.85591	56156	1.78077	58474	1.71015	60841	1.64363	41
20	53920	1.85462	56194	1.77955	58513	1.70901	60881	1.64256	40
21	53957	1.85333	56232	1.77834	58552	1.70787	60921	1.64148	39
22	53995	1.85204	56270	1.77713	58591	1.70673	60960	1.64041	38
23	54032	1.85075	56309	1.77592	58631	1.70560	61000	1.63934	37
24	54070	1.84946	56347	1.77471	58670	1.70446	61040	1.63826	36
25	54107	1.84818	56385	1.77351	58709	1.70332	61080	1.63719	35
26	54145	1.84689	56424	1.77230	58748	1.70219	61120	1.63612	34
27	54183	1.84561	56462	1.77110	58787	1.70106	61160	1.63505	33
28	54220	1.84433	56500	1.76990	58826	1.69992	61200	1.63398	32
29	54258	1.84305	56539	1.76869	58865	1.69879	61240	1.63292	31
30	54296	1.84177	56577	1.76749	58904	1.69766	61280	1.63185	30
31	54333	1.84049	56616	1.76630	58944	1.69653	61320	1.63079	29
32	54371	1.83922	56654	1.76510	58983	1.69541	61360	1.62972	28
33	54409	1.83794	56693	1.76390	59022	1.69428	61400	1.62866	27
34	54446	1.83667	56731	1.76271	59061	1.69316	61440	1.62760	26
35	54484	1.83540	56769	1.76151	59101	1.69203	61480	1.62654	25
36	54522	1.83413	56808	1.76032	59140	1.69091	61520	1.62548	24
37	54560	1.83286	56846	1.75913	59179	1.68979	61561	1.62442	23
38	54597	1.83159	56885	1.75794	59218	1.68866	61601	1.62336	22
39	54635	1.83033	56923	1.75675	59258	1.68754	61641	1.62230	21
40	54673	1.82906	56962	1.75556	59297	1.68643	61681	1.62125	20
41	54711	1.82780	57000	1.75437	59336	1.68531	61721	1.62019	19
42	54748	1.82654	57039	1.75[illegible]	59376	1.68419	61761	1.61914	18
43	54786	1.82528	57078	1.75200	59415	1.68308	61801	1.61808	17
44	54824	1.82402	57116	1.75082	59454	1.68196	61842	1.61703	16
45	54862	1.82276	57155	1.74964	59494	1.68085	61882	1.61598	15
46	54900	1.82150	57193	1.74846	59533	1.67974	61922	1.61493	14
47	54938	1.82025	57232	1.74728	59573	1.67863	61962	1.61388	13
48	54975	1.81899	57271	1.74610	59612	1.67752	62003	1.61283	12
49	55013	1.81774	57309	1.74492	59651	1.67641	62043	1.61179	11
50	55051	1.81649	57348	1.74375	59691	1.67530	62083	1.61074	10
51	55089	1.81524	57386	1.74257	59730	1.67419	62124	1.60970	9
52	55127	1.81399	57425	1.74140	59770	1.67309	62164	1.60865	8
53	55165	1.81274	57464	1.74022	59809	1.67198	62204	1.60761	7
54	55203	1.81150	57503	1.73905	59849	1.67088	62245	1.60657	6
55	55241	1.81025	57541	1.73788	59888	1.66978	62285	1.60553	5
56	55279	1.80901	57580	1.73671	59928	1.66867	62325	1.60449	4
57	55317	1.80777	57619	1.73555	59967	1.66757	62366	1.60345	3
58	55355	1.80653	57657	1.73438	60007	1.66647	62406	1.60241	2
59	55393	1.80529	57696	1.73321	60046	1.66538	62446	1.60137	1
60	55431	1.80405	57735	1.73205	60086	1.66428	62487	1.60033	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	61°		60°		59°		58°		

′	32°		33°		34°		35°		′
	Tang.	Cotang	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	62487	1.60033	64941	1.53986	67451	1.48256	70021	1.42815	60
1	62527	1.59930	64982	1.53888	67493	1.48163	70064	1.42726	59
2	62568	1.59826	65023	1.53791	67536	1.48070	70107	1.42638	58
3	62608	1.59723	65065	1.53693	67578	1.47977	70151	1.42550	57
4	62649	1.59620	65106	1.53595	67620	1.47885	70194	1.42462	56
5	62689	1.59517	65148	1.53497	67663	1.47792	70238	1.42374	55
6	62730	1.59414	65189	1.53400	67705	1.47699	70281	1.42286	54
7	62770	1.59311	65231	1.53302	67748	1.47607	70325	1.42198	53
8	62811	1.59208	65272	1.53205	67790	1.47514	70368	1.42110	52
9	62852	1.59105	65314	1.53107	67832	1.47422	70412	1.42022	51
10	62892	1.59002	65355	1.53010	67875	1.47330	70455	1.41934	50
11	62933	1.58900	65397	1.52913	67917	1.47238	70499	1.41847	49
12	62973	1.58797	65438	1.52816	67960	1.47146	70542	1.41759	48
13	63014	1.58695	65480	1.52719	68002	1.47053	70586	1.41672	47
14	63055	1.58593	65521	1.52622	68045	1.46962	70629	1.41584	46
15	63095	1.58490	65563	1.52525	68088	1.46870	70673	1.41497	45
16	63136	1.58388	65604	1.52429	68130	1.46778	70717	1.41409	44
17	63177	1.58286	65646	1.52332	68173	1.46686	70760	1.41322	43
18	63217	1.58184	65688	1.52235	68215	1.46595	70804	1.41235	42
19	63258	1.58083	65729	1.52139	68258	1.46503	70848	1.41148	41
20	63299	1.57981	65771	1.52043	68301	1.46411	70891	1.41061	40
21	63340	1.57879	65813	1.51946	68343	1.46320	70935	1.40974	39
22	63380	1.57778	65854	1.51850	68386	1.46229	70979	1.40887	38
23	63421	1.57676	65896	1.51754	68429	1.46137	71023	1.40800	37
24	63462	1.57575	65938	1.51658	68471	1.46046	71066	1.40714	36
25	63503	1.57474	65980	1.51562	68514	1.45955	71110	1.40627	35
26	63544	1.57372	66021	1.51466	68557	1.45864	71154	1.40540	34
27	63584	1.57271	66063	1.51370	68600	1.45773	71198	1.40454	33
28	63625	1.57170	66105	1.51275	68642	1.45682	71242	1.40367	32
29	63666	1.57069	66147	1.51179	68685	1.45592	71285	1.40281	31
30	63707	1.56969	66189	1.51084	68728	1.45501	71329	1.40195	30
31	63748	1.56868	66230	1.50988	68771	1.45410	71373	1.40109	29
32	63789	1.56767	66272	1.50893	68814	1.45320	71417	1.40022	28
33	63830	1.56667	66314	1.50797	68857	1.45229	71461	1.39936	27
34	63871	1.56566	66356	1.50702	68900	1.45139	71505	1.39850	26
35	63912	1.56466	66398	1.50607	68942	1.45049	71549	1.39764	25
36	63953	1.56366	66440	1.50512	68985	1.44958	71593	1.39679	24
37	63994	1.56265	66482	1.50417	69028	1.44868	71637	1.39593	23
38	64035	1.56165	66524	1.50322	69071	1.44778	71681	1.39507	22
39	64076	1.56065	66566	1.50228	69114	1.44688	71725	1.39421	21
40	64117	1.55966	66608	1.50133	69157	1.44598	71769	1.39336	20
41	64158	1.55866	66650	1.50038	69200	1.44508	71813	1.39250	19
42	64199	1.55766	66692	1.49944	69243	1.44418	71857	1.39165	18
43	64240	1.55666	66734	1.49849	69286	1.44329	71901	1.39079	17
44	64281	1.55567	66776	1.49755	69329	1.44239	71946	1.38994	16
45	64322	1.55467	66818	1.49661	69372	1.44149	71990	1.38909	15
46	64363	1.55368	66860	1.49566	69416	1.44060	72034	1.38824	14
47	64404	1.55269	66902	1.49472	69459	1.43970	72078	1.38738	13
48	64446	1.55170	66944	1.49378	69502	1.43881	72122	1.38653	12
49	64487	1.55071	66986	1.49284	69545	1.43792	72166	1.38568	11
50	64528	1.54972	67028	1.49190	69588	1.43703	72211	1.38484	10
51	64569	1.54873	67071	1.49097	69631	1.43614	72255	1.38399	9
52	64610	1.54774	67113	1.49003	69675	1.43525	72299	1.38314	8
53	64652	1.54675	67155	1.48909	69718	1.43436	72344	1.38229	7
54	64693	1.54576	67197	1.48816	69761	1.43347	72388	1.38145	6
55	64734	1.54478	67239	1.48722	69804	1.43258	72432	1.38060	5
56	64775	1.54379	67282	1.48629	69847	1.43169	72477	1.37976	4
57	64817	1.54281	67324	1.48536	69891	1.43080	72521	1.37891	3
58	64858	1.54183	67366	1.48442	69934	1.42992	72565	1.37807	2
59	64899	1.54085	67409	1.48349	69977	1.42903	72610	1.37722	1
60	64941	1.53986	67451	1.48256	70021	1.42815	72654	1.37638	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	57°		56°		55°		54°		

′	36° Tang.	36° Cotang.	37° Tang.	37° Cotang.	38° Tang.	38° Cotang.	39° Tang.	39° Cotang.	′
0	72654	1.37638	75355	1.32704	78129	1.27994	80978	1.23490	60
1	72699	1.37554	75401	1.32624	78175	1.27917	81027	1.23416	59
2	72743	1.37470	75447	1.32544	78222	1.27841	81075	1.23343	58
3	72788	1.37386	75492	1.32464	78269	1.27764	81123	1.23270	57
4	72832	1.37302	75538	1.32384	78316	1.27688	81171	1.23196	56
5	72877	1.37218	75584	1.32304	78363	1.27611	81220	1.23123	55
6	72921	1.37134	75629	1.32224	78410	1.27535	81268	1.23050	54
7	72966	1.37050	75675	1.32144	78457	1.27458	81316	1.22977	53
8	73010	1.36967	75721	1.32064	78504	1.27382	81364	1.22904	52
9	73055	1.36883	75767	1.31984	78551	1.27306	81413	1.22831	51
10	73100	1.36800	75812	1.31904	78598	1.27230	81461	1.22758	50
11	73144	1.36716	75858	1.31825	78645	1.27153	81510	1.22685	49
12	73189	1.36633	75904	1.31745	78692	1.27077	81558	1.22612	48
13	73234	1.36549	75950	1.31666	78739	1.27001	81606	1.22539	47
14	73278	1.36466	75996	1.31586	78786	1.26925	81655	1.22467	46
15	73323	1.36383	76042	1.31507	78834	1.26849	81703	1.22394	45
16	73368	1.36300	76088	1.31427	78881	1.26774	81752	1.22321	44
17	73413	1.36217	76134	1.31348	78928	1.26698	81800	1.22249	43
18	73457	1.36133	76180	1.31269	78975	1.26622	81849	1.22176	42
19	73502	1.36051	76226	1.31190	79022	1.26546	81898	1.22104	41
20	73547	1.35968	76272	1.31110	79070	1.26471	81946	1.22031	40
21	73592	1.35885	76318	1.31031	79117	1.26395	81995	1.21959	39
22	73637	1.35802	76364	1.30952	79164	1.26319	82044	1.21886	38
23	73681	1.35719	76410	1.30873	79212	1.26244	82092	1.21814	37
24	73726	1.35637	76456	1.30795	79259	1.26169	82141	1.21742	36
25	73771	1.35554	76502	1.30716	79306	1.26093	82190	1.21670	35
26	73816	1.35472	76548	1.30637	79354	1.26018	82238	1.21598	34
27	73861	1.35389	76594	1.30558	79401	1.25943	82287	1.21526	33
28	73906	1.35307	76640	1.30480	79449	1.25867	82336	1.21454	32
29	73951	1.35224	76686	1.30401	79496	1.25792	82385	1.21382	31
30	73996	1.35142	76733	1.30323	79544	1.25717	82434	1.21310	30
31	74041	1.35060	76779	1.30244	79591	1.25642	82483	1.21233	29
32	74086	1.34978	76825	1.30166	79639	.25567	82531	1.21166	28
33	74131	1.34896	76871	1.30087	79686	1.25492	82580	1.21094	27
34	74176	1.34814	76918	1.30009	79734	1.25417	82629	1.21023	26
35	74221	1.34732	76964	1.29931	79781	1.25343	82678	1.20951	25
36	74267	1.34650	77010	1.29853	79829	1.25268	82727	1.20879	24
37	74312	1.34568	77057	1.29775	79877	1.25193	82776	1.20808	23
38	74357	1.34487	77103	1.29696	79924	1.25118	82825	1.20736	22
39	74402	1.34405	77149	1.29618	79972	1.25044	82874	1.20665	21
40	74447	1.34323	77196	1.29541	80020	1.24969	82923	1.20593	20
41	74492	1.34242	77242	1.29463	80067	1.24895	82972	1.20522	19
42	74538	1.34160	77289	1.29385	80115	1.24820	83022	1.20451	18
43	74583	1.34079	77335	1.29307	80163	1.24746	83071	1.20379	17
44	74628	1.33998	77382	1.29229	80211	1.24672	83120	1.20308	16
45	74674	1.33916	77428	1.29152	80258	1.24597	83169	1.20237	15
46	74719	1.33835	77475	1.29074	80306	1.24523	83218	1.20166	14
47	74764	1.33754	77521	1.28997	80354	1.24449	83268	1.20095	13
48	74810	1.33673	77568	1.28919	80402	1.24375	83317	1.20024	12
49	74855	1.33592	77615	1.28842	80450	1.24301	83366	1.19953	11
50	74900	1.33511	77661	1.28764	80498	1.24227	83415	1.19882	10
51	74946	1.33430	77708	1.28687	80546	1.24153	83465	1.19811	9
52	74991	1.33349	77754	1.28610	80594	1.24079	83514	1.19740	8
53	75037	1.33268	77801	1.28533	80642	1.24005	83564	1.19669	7
54	75082	1.33187	77848	1.28456	80690	1.23931	83613	1.19599	6
55	75128	1.33107	77895	1.28379	80738	1.23858	83662	1.19528	5
56	75173	1.33026	77941	1.28302	80786	1.23784	83712	1.19457	4
57	75219	1.32946	77988	1.28225	80834	1.23710	83761	1.19387	3
58	75264	1.32865	78035	1.28148	80882	1.23637	83811	1.19316	2
59	75310	1.32785	78082	1.28071	80930	1.23563	83860	1.19246	1
60	75355	1.32704	78129	1.27994	80978	1.23490	83910	1.19175	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang	Cot.	Tang.	′
	53°		52°		51°		50°		

′	40°		41°		42°		43°		′
	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	Tang.	Cotang.	
0	83910	1.19175	86929	1.15037	90040	1.11061	93252	1.07237	60
1	83960	1.19105	86980	1.14969	90093	1.10996	93306	1.07174	59
2	84009	1.19035	87031	1.14902	90146	1.10931	93360	1.07112	58
3	84059	1.18964	87082	1.14834	90199	1.10867	93415	1.07049	57
4	84108	1.18894	87133	1.14767	90251	1.10802	93469	1.06987	56
5	84158	1.18824	87184	1.14699	90304	1.10737	93524	1.06925	55
6	84208	1.18754	87236	1.14632	90357	1.10672	93578	1.06862	54
7	84258	1.18684	87287	1.14565	90410	1.10607	93633	1.06800	53
8	84307	1.18614	87338	1.14498	90463	1.10543	93688	1.06738	52
9	84357	1.18544	87389	1.14430	90516	1.10478	93742	1.06676	51
10	84407	1.18474	87441	1.14363	90569	1.10414	93797	1.06613	50
11	84457	1.18404	87492	1.14296	90621	1.10349	93852	1.06551	49
12	84507	1.18334	87543	1.14229	90674	1.10285	93906	1.06489	48
13	84556	1.18264	87595	1.14162	90727	1.10220	93961	1.06427	47
14	84606	1.18194	87646	1.14095	90781	1.10156	94016	1.06365	46
15	84656	1.18125	87698	1.14028	90834	1.10091	94071	1.06303	45
16	84706	1.18055	87749	1.13961	90887	1.10027	94125	1.06241	44
17	84756	1.17986	87801	1.13894	90940	1.09963	94180	1.06179	43
18	84806	1.17916	87852	1.13828	90993	1.09899	94235	1.06117	42
19	84856	1.17846	87904	1.13761	91046	1.09834	94290	1.06056	41
20	84906	1.17777	87955	1.13694	91099	1.09770	94345	1.05994	40
21	84956	1.17708	88007	1.13627	91153	1.09706	94400	1.05932	39
22	85006	1.17638	88059	1.13561	91206	1.09642	94455	1.05870	38
23	85057	1.17569	88110	1.13494	91259	1.09578	94510	1.05809	37
24	85107	1.17500	88162	1.13428	91313	1.09514	94565	1.05747	36
25	85157	1.17430	88214	1.13361	91366	1.09450	94620	1.05685	35
26	85207	1.17361	88265	1.13295	91419	1.09386	94676	1.05624	34
27	85257	1.17292	88317	1.13228	91473	1.09322	94731	1.05562	33
28	85307	1.17223	88369	1.13162	91526	1.09258	94786	1.05501	32
29	85458	1.17154	88421	1.13096	91580	1.09195	94841	1.05439	31
30	85408	1.17085	88473	1.13029	91633	1.09131	94896	1.05378	30
31	85458	1.17016	88524	1.12963	91687	1.09067	94952	1.05317	29
32	85509	1.16947	88576	1.12897	91740	1.09003	95007	1.05255	28
33	85559	1.16878	88628	1.12831	91794	1.08940	95062	1.05194	27
34	85609	1.16809	88680	1.12765	91847	1.08876	95118	1.05133	26
35	85660	1.16741	88732	1.12699	91901	1.08813	95173	1.05072	25
36	85710	1.16672	88784	1.12633	91955	1.08749	95229	1.05010	24
37	85761	1.16603	88836	1.12567	92008	1.08686	95284	1.04949	23
38	85811	1.16535	88888	1.12501	92062	1.08622	95340	1.04888	22
39	85862	1.16466	88940	1.12435	92116	1.08559	95395	1.04827	21
40	85912	1.16398	88992	1.12369	92170	1.08496	95451	1.04766	20
41	85963	1.16329	89045	1.12303	92223	1.08432	95506	1.04705	19
42	86014	1.16261	89097	1.12238	92277	1.08369	95562	1.04644	18
43	86064	1.16192	89149	1.12172	92331	1.08306	95618	1.04583	17
44	86115	1.16124	89201	1.12106	92385	1.08243	95673	1.04522	16
45	86166	1.16056	89253	1.12041	92439	1.08179	95729	1.04461	15
46	86216	1.15987	89306	1.11975	92493	1.08116	95785	1.04401	14
47	86267	1.15919	89358	1.11909	92547	1.08053	95841	1.04340	13
48	86318	1.15851	89410	1.11844	92601	1.07990	95897	1.04279	12
49	86368	1.15783	89463	1.11778	92655	1.07927	95952	1.04218	11
50	86419	1.15715	89515	1.11713	92709	1.07864	96008	1.04158	10
51	86470	1.15647	89567	1.11648	92763	1.07801	96064	1.04097	9
52	86521	1.15579	89620	1.11582	92817	1.07738	96120	1.04036	8
53	86572	1.15511	89672	1.11517	92872	1.07676	96176	1.03976	7
54	86623	1.15443	89725	1.11452	92926	1.07613	96232	1.03915	6
55	86674	1.15375	89777	1.11387	92980	1.07550	96288	1.03855	5
56	86725	1.15308	89830	1.11321	93034	1.07487	96344	1.03794	4
57	86776	1.15240	89883	1.11256	93088	1.07425	96400	1.03734	3
58	86827	1.15172	89935	1.11191	93143	1.07362	96457	1.03674	2
59	86878	1.15104	89988	1.11126	93197	1.07299	96513	1.03613	1
60	86929	1.15037	90040	1.11061	93252	1.07237	96569	1.03553	0
′	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	Cot.	Tang.	′
	49°		48°		47°		46°		

′	44° Tang.	44° Cotang.	′	′	44° Tang.	44° Cotang.	′
0	96569	1.03553	60	31	98327	1.01702	29
1	96625	1.03493	59	32	98384	1.01642	28
2	96681	1.03433	58	33	98441	1.01583	27
3	96738	1.03372	57	34	98499	1.01524	26
4	96794	1.03312	56	35	98556	1.01465	25
5	96850	1.03252	55	36	98613	1.01406	24
6	96907	1.03192	54	37	98671	1.01347	23
7	96963	1.03132	53	38	98728	1.01288	22
8	97020	1.03072	52	39	98786	1.01229	21
9	97076	1.03012	51	40	98843	1.01170	20
10	97133	1.02952	50	41	98901	1.01112	19
11	97189	1.02892	49	42	98958	1.01053	18
12	97246	1.02832	48	43	99016	1.00994	17
13	97302	1.02772	47	44	99073	1.00935	16
14	97359	1.02713	46	45	99131	1.00876	15
15	97416	1.02653	45	46	99189	1.00818	14
16	97472	1.02593	44	47	99247	1.00759	13
17	97529	1.02533	43	48	99304	1.00701	12
18	97586	1.02474	42	49	99362	1.00642	11
19	97643	1.02414	41	50	99420	1.00583	10
20	97700	1.02355	40	51	99478	1.00525	9
21	97756	1.02295	39	52	99536	1.00467	8
22	97813	1.02236	38	53	99594	1.00408	7
23	97870	1.02176	37	54	99652	1.00350	6
24	97927	1.02117	36	55	99710	1.00291	5
25	97984	1.02057	35	56	99768	1.00233	4
26	98041	1.01998	34	57	99826	1.00175	3
27	98098	1.01939	33	58	99884	1.00116	2
28	98155	1.01879	32	59	99942	1.00058	1
29	98213	1.01820	31	60	Unité.	Unité.	0
30	98270	1.01761	30				
′	Cotang. 45°	Tang. 45°	′	′	Cotang. 45°	Tang. 45°	′

TABLE

DES

AIRES OU SURFACES DES SEGMENTS D'UN CERCLE,

DONT LE DIAMÈTRE EST 1 ET QUE L'ON SUPPOSE DIVISÉ EN 1000 PARTIES ÉGALES.

Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.
.001	.000042	.011	.001533	.021	.004031	.031	.007209
.002	.000119	.012	.001746	.022	.004322	.032	.007558
.003	.000219	.013	.001968	.023	.004618	.033	.007913
.004	.000337	.014	.002199	.024	.004921	.034	.008273
.005	.000470	.015	.002438	.025	.005230	.035	.008638
.006	.000618	.016	.002685	.026	.005546	.036	.009008
.007	.000779	.017	.002940	.027	.005867	.037	.009383
.008	.000951	.018	.003202	.028	.006194	.038	.009763
.009	.001135	.019	.003471	.029	.006527	.039	.010148
.010	.001329	.020	.003748	.030	.006865	.040	.010537

Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.
.041	.010931	.102	.042080	.163	.083320	.224	.131438
.042	.011330	.103	.042687	.164	.084059	.225	.132272
.043	.011734	.104	.043296	.165	.084801	.226	.133108
.044	.012142	.105	.043908	.166	.085544	.227	.133945
.045	.012554	.106	.044522	.167	.086289	.228	.134784
.046	.012971	.107	.045139	.168	.087036	.229	.135624
.047	.013392	.108	.045759	.169	.087785	.230	.136465
.048	.013818	.109	.046381	.170	.088535	.231	.137307
.049	.014247	.110	.047005	.171	.089287	.232	.138150
.050	.014681	.111	.047632	.172	.090041	.233	.138995
.051	.015119	.112	.048262	.173	.090797	.234	.139841
.052	.015561	.113	.048894	.174	.091554	.235	.140688
.053	.016007	.114	.049528	.175	.092313	.236	.141537
.054	.016457	.115	.050165	.176	.093074	.237	.142387
.055	.016911	.116	.050804	.177	.093836	.238	.143238
.056	.017369	.117	.051446	.178	.094601	.239	.144091
.057	.017831	.118	.052090	.179	.095366	.240	.144944
.058	.018296	.119	.052736	.180	.096134	.241	.145799
.059	.018766	.120	.053385	.181	.096903	.242	.146655
.060	.019239	.121	.054036	.182	.097674	.243	.147512
.061	.019716	.122	.054689	.183	.098447	.244	.148371
.062	.020196	.123	.055345	.184	.099221	.245	.149230
.063	.020680	.124	.056003	.185	.099997	.246	.150091
.064	.021168	.125	.056663	.186	.100774	.247	.150953
.065	.021659	.126	.057326	.187	.101553	.248	.151816
.066	.022154	.127	.057991	.188	.102334	.249	.152680
.067	.022652	.128	.058658	.189	.103116	.250	.153546
.068	.023154	.129	.059327	.190	.103900	.251	.154412
.069	.023659	.130	.059999	.191	.104685	.252	.155280
.070	.024168	.131	.060672	.192	.105472	.253	.156149
.071	.024680	.132	.061348	.193	.106261	.254	.157010
.072	.025195	.133	.062026	.194	.107051	.255	.157890
.073	.025714	.134	.062707	.195	.107842	.256	.158762
.074	.026236	.135	.063389	.196	.108636	.257	.159636
.075	.026761	.136	.064074	.197	.109430	.258	.160510
.076	.027289	.137	.064760	.198	.110226	.259	.161386
.077	.027821	.138	.065449	.199	.111024	.260	.162263
.078	.028356	.139	.066140	.200	.111823	.261	.163140
.079	.028894	.140	.066833	.201	.112624	.262	.164019
.080	.029435	.141	.067528	.202	.113426	.263	.164899
.081	.029979	.142	.068225	.203	.114230	.264	.165780
.082	.030526	.143	.068924	.204	.115035	.265	.166663
.083	.031076	.144	.069625	.205	.115842	.266	.167546
.084	.031629	.145	.070328	.206	.116650	.267	.168430
.085	.032186	.146	.071033	.207	.117460	.278	.169315
.086	.032745	.147	.071741	.208	.118271	.269	.170202
.087	.033307	.148	.072450	.209	.119083	.270	.171089
.088	.033872	.149	.073161	.210	.119897	.271	.171978
.089	.034441	.150	.073874	.211	.120712	.272	.172867
.090	.035011	.151	.074589	.212	.121529	.273	.173758
.091	.035585	.152	.075306	.213	.122347	.274	.174649
.092	.036162	.153	.076026	.214	.123167	.275	.175542
.093	.036741	.154	.076747	.215	.123988	.276	.176435
.094	.037323	.155	.077469	.216	.124[illegible]	.277	.177330
.095	.037909	.156	.078194	.217	.125634	.278	.178225
.096	.038496	.157	.078921	.218	.126459	.279	.179122
.097	.039087	.158	.079649	.219	.127285	.280	.180019
.098	.039680	.159	.080380	.220	.128113	.281	.180918
.099	.040276	.160	.081112	.221	.128942	.282	.181817
.100	.040875	.161	.081846	.222	.129773	.283	.182718
.101	.041476	.162	.082582	.223	.130605	.284	.183619

Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.	Sinus Verse.	Aire du Seg.
.285	.184521	.339	.234526	.393	.286521	.447	.339798
.286	.1854[illegible]5	.340	.235473	.394	.287498	.448	.340793
.287	.186329	.341	.236421	.395	.288476	.449	.341787
.288	.187234	.342	.237369	.396	.289453	.450	.342792
.289	.188140	.343	.238318	.397	.290432	.451	.343777
.290	.189047	.344	.239268	.398	.291411	.452	.344772
.291	.189955	.345	.240218	.399	.292390	.453	.345768
.292	.190864	.346	.241169	.400	.293369	.454	.346764
.293	.191775	.347	.242121	.401	.294349	.455	.347759
.294	.192684	.348	.243074	.402	.295330	.456	.348755
.295	.193596	.349	.244026	.403	.296311	.457	.349752
.296	.194509	.350	.244980	.404	.297292	.458	.350748
.297	.195422	.351	.245934	.405	.298273	.459	.351745
.298	.196337	.352	.246889	.406	.299255	.460	.352741
.299	.197252	.353	.247845	.407	.300238	.461	.353739
.300	.198168	.354	.248801	.408	.301220	.462	.354736
.301	.199085	.355	.249757	.409	.302203	.463	.355732
.302	.200003	.356	.250715	.410	.303187	.464	.356730
.303	.200922	.357	.251673	.411	.304171	.465	.357727
.304	.201841	.358	.252631	.412	.305155	.466	.358725
.305	.202761	.359	.253590	.413	.306140	.467	.359723
.306	.203683	.360	.254550	.414	.307125	.468	.360721
.307	.204605	.361	.255510	.415	.308110	.469	.361719
.308	.205527	.362	.256471	.416	.309095	.470	.362717
.309	.206451	.363	.257433	.417	.310081	.471	.363715
.310	.207376	.364	.258395	.418	.311068	.472	.364713
.311	.208301	.365	.259357	.419	.312054	.473	.365712
.312	.209227	.366	.260320	.420	.313041	474	.366710
.313	.210154	.367	.261284	.421	.314029	.475	.367709
.314	.211082	.368	.262248	.422	.315016	.476	.368708
.315	.212011	.369	.263213	.423	.316004	.477	.369707
.316	.212940	.370	.264178	.424	.316992	.478	.370706
.317	.213871	.371	.265144	.425	.317981	.479	.371705
.318	.214802	.372	.266111	.426	.318970	.480	.372704
.319	.215733	.373	.267078	.427	.319959	.481	.373703
.320	.216666	.374	.268045	.428	.320948	.482	.374702
.321	.217599	.375	.269013	.429	.321938	.483	.375702
.322	.218533	.376	.269982	.430	.322928	.484	.376702
.323	.219468	.377	.270951	.431	.323919	.485	.377701
.324	.220404	.378	.271920	.432	.324909	.486	.378701
.325	.221340	.379	.272890	.433	.325900	.487	.379700
.326	.222277	.380	.273861	.434	.326892	.488	.380700
.327	.223215	.381	.274832	.435	.327882	.489	.381699
.328	.224154	.382	.275803	.436	.328874	.490	.382699
.329	.225093	.383	.276775	.437	.329866	.491	.383699
.330	.226033	.384	.277748	.438	.330858	.492	.384699
.331	.226974	.385	.278721	.439	.331850	.493	.385699
.332	.227915	.386	.279694	.440	.332843	.494	.386699
.333	.228858	.387	.280668	.441	.333836	.495	.387699
.334	.229801	.388	.281642	.442	.334829	.496	.388699
.335	.230745	.389	.282617	.443	.335822	.497	.389699
.336	.231689	.390	.283592	.444	.336816	.498	.390699
.337	.232634	.391	.284568	.445	.337810	.499	.391699
.338	.233580	.392	.285544	.446	.338804	.500	.392699

REMARQUE.—Dans les cercles de rayons différents, les arcs semblables (21. Déf.) et les cordes qui les sous-tendent sont proportionnels à ces rayons ; l'on trouvera donc à l'aide des deux tables suivantes, la longueur d'un arc donné ou d'une corde, en multipliant l'arc correspondant ou la corde, de la table, par le rayon du cercle dont l'arc donné fait partie.

″	Arc.	′	Arc.	D.	Arc.	D.	Arc.	D.	Arc.
1	.0000048	1	.0002909	1	.0174533	61	1.0646508	121	2.1118484
2	.0000097	2	.0005818	2	.0349066	62	1.0821041	122	2.1293017
3	.0000145	3	.0008727	3	.0523599	63	1.0995574	123	2.1467550
4	.0000194	4	.0011636	4	.0698132	64	1.1170107	124	2.1642083
5	.0000242	5	.0014544	5	.0872665	65	1.1344640	125	2.1816616
6	.0000291	6	.0017453	6	.1047198	66	1.1519173	126	2.1991149
7	.0000339	7	.0020362	7	.1221730	67	1.1693706	127	2.2165682
8	.0000388	8	.0023271	8	.1396263	68	1.1868239	128	2 2340214
9	.0000436	9	.0026180	9	.1570796	69	1.2042772	129	2.2514747
10	.0000485	10	.0029089	10	.1745329	70	1.2217305	130	2.2689280
11	.0000533	11	.0031998	11	.1919862	71	1.2391838	131	2.2863813
12	.0000582	12	.0034907	12	.2094395	72	1.2566371	132	2.3038346
13	.0000630	13	.0037815	13	.2268928	73	1.2740904	133	2.3212879
14	.0000679	14	.0010724	14	.2443461	74	1.2915436	134	2.3387412
15	.0000727	15	.0043633	15	.2617994	75	1.3089969	135	2.3561945
16	.0000776	16	.0046542	16	.2792527	76	1.3264502	136	2.3736478
17	.0000824	17	.0049451	17	.2967060	77	1.3439035	137	2.3911011
18	.0000873	18	.0052360	18	.3141593	78	1.3613568	138	2.4085544
19	.0000921	19	.0055269	19	.3316126	79	1.3788101	139	2.4260077
20	.0000970	20	.0058178	20	.3490659	80	1.3962634	140	2.4434610
21	.0001018	21	.0061087	21	.3665191	81	1.4137167	141	2.4609142
22	.0001067	22	.0063995	22	.3839724	82	1.4311700	142	2.4783675
23	.0001115	23	.0066904	23	.4014257	83	1.4486233	143	2.4958208
24	.0001164	24	.0069813	24	.4188790	84	1.4660766	144	2.5132741
25	.0001212	25	.0072722	25	.4363323	85	1.4835299	145	2.5307274
26	.0001261	26	.0075631	26	.4537856	86	1.5009832	146	2.5481807
27	.0001309	27	.0078540	27	.4712389	87	1.5184364	147	2.5656340
28	.0001357	28	.0081449	28	.4886922	88	1.5358897	148	2.5830873
29	.0001406	29	.0084358	29	.5061455	89	1.5533430	149	2.6005406
30	.0001454	30	.0087266	30	5235988	90	1.5707963	150	2.6179939
31	.0001503	31	.0090175	31	.5410521	91	1.5882496	151	2.6354472
32	.0001551	32	.0093084	32	.5585054	92	1.6057029	152	2.6529005
33	.0001599	33	.0095993	33	.5759587	93	1.6231562	153	2.6703538
34	.0001648	34	.0098902	34	.5934119	94	1.6406095	154	2.6878070
35	.0001697	35	.0101811	35	.6108652	95	1.6580628	155	2.7052603
36	.0001745	36	.0104720	36	.6283185	96	1.6755161	156	2.7227136
37	.0001794	37	.0107629	37	.6457718	97	1.6929694	157	2.7401669
38	.0001842	38	.0110538	38	.6632251	98	1.7104227	158	2.7576202
39	.0001891	39	.0113446	39	.6806784	99	1.7278760	159	2.7750735
40	.0001939	40	.0116355	40	.6981317	100	1.7453293	160	2 7925268
41	.0001988	41	.0119264	41	.7155850	101	1.7627825	161	2.8099801
42	.0002036	42	.0122173	42	.7330383	102	1.7802358	162	2.8274334
43	.0002085	43	.0125082	43	.7504916	103	1.7976891	163	2.8448867
44	.0002133	44	.0127991	44	.7679449	104	1.8151424	164	2.8623400
45	.0002182	45	.0130900	45	.7853982	105	1.8325957	165	2.8797933
46	.0002230	46	.0133809	46	.8028515	106	1.8500490	166	2.8972466
47	.0002279	47	.0136717	47	.8203047	107	1.8675023	167	2.9146999
48	.0002327	48	.0139626	48	.8377580	108	1.8849556	168	2.9321531
49	.0002376	49	.0142535	49	.8552113	109	1.9024089	169	2.9496064
50	.0002424	50	.0145444	50	.8726646	110	1.9198622	170	2.9670597
51	.0002473	51	.0148353	51	.8901179	111	1.9373155	171	2.9845130
52	.0002521	52	.0151262	52	.9075712	112	1.9547688	172	3.0019663
53	.0002570	53	.0154171	53	.9250245	113	1.9722220	173	3.0194196
54	.0002618	54	.0157080	54	.9424778	114	1.9896753	174	3.0368729
55	.0002666	55	.0159989	55	.9599311	115	2.0071286	175	3.0543262
56	0002715	56	.0162897	56	.9773844	116	2.0245819	176	3.0717795
57	.0002763	57	.0165806	57	.9948377	117	2.0420352	177	3.0892328
58	.0002812	58	.0168715	58	1.0122910	118	2.0594885	178	3.1066861
59	.0002860	59	.0171624	59	1.0297443	119	2.0769418	179	3.1241394
60	.0002909	60	.0174533	60	1.0471976	120	2.0943951	180	3.1415927

M.	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	M.
0	.0000	.0175	.0349	.0524	.0698	.0872	.1047	.1221	.1395	.1569	.1743	0
1	.0003	.0177	0352	.0526	.0701	.0875	.1050	.1224	.1398	.1572	.1746	1
2	.0006	.0180	.0355	.0529	.0704	.0878	.1053	.1227	.1401	.1575	.1749	2
3	.0009	.0183	.0358	.0532	.0707	.0881	.1055	.1230	.1404	.1578	.1752	3
4	.0012	.0186	.0361	.0535	.0710	.0884	.1058	.1233	.1407	.1581	.1755	4
5	.0015	.0189	.0364	.0538	.0713	.0887	.1061	.1235	.1410	.1584	.1758	5
6	.0017	.0192	.0366	.0541	.0715	.0890	.1064	.1238	.1413	.1587	.1761	6
7	.0020	.0195	.0369	.0544	.0718	.0893	.1067	.1241	.1415	.1589	.1763	7
8	.0023	.0198	.0372	.0547	.0721	.0896	.1070	.1244	.1418	.1592	.1766	8
9	.0026	.0201	.0375	.0550	.0724	.0899	.1073	.1247	.1421	.1595	.1769	9
10	.0029	.0204	.0378	.0553	.0727	.0901	.1076	.1250	.1424	.1598	.1772	10
11	.0032	.0207	.0381	.0556	.0730	.0904	.1079	.1253	.1427	.1601	.1775	11
12	.0035	.0209	.0384	.0558	.0733	.0907	.1082	.1256	.1430	.1604	.1778	12
13	.0038	.0212	.0387	.0561	.0736	.0910	.1084	.1259	.1433	.1607	.1781	13
14	.0041	.0215	.0390	.0564	.0739	.0913	.1087	.1262	.1436	.1610	.1784	14
15	.0044	.0218	.0393	.0567	.0742	.0916	.1090	.1265	.1439	.1613	.1787	15
16	.0047	.0221	.0396	.0570	.0745	.0919	.1093	.1267	.1442	.1616	.1789	16
17	.0049	.0224	.0398	.0573	.0747	.0922	.1096	.1270	.1444	.1618	.1792	17
18	.0052	.0227	.0401	.0576	.0750	.0925	.1099	.1273	.1447	.1621	.1795	18
19	.0055	.0230	.0404	.0579	.0753	.0928	.1102	.1276	.1450	.1624	.1798	19
20	.0058	.0233	.0407	.0582	.0756	.0931	.1105	.1279	.1453	.1627	.1801	20
21	.0061	.0236	.0410	.0585	.0759	.0933	.1108	.1282	.1456	.1630	.1804	21
22	.0064	.0239	.0413	.0588	.0762	.0936	.1111	.1285	.1459	.1633	.1807	22
23	.0067	.0241	.0416	.0590	.0765	.0939	.1114	.1288	.1462	.1636	.1810	23
24	.0070	.0244	.0419	.0593	.0768	.0942	.1116	.1291	.1465	.1639	.1813	24
25	.0073	.0247	.0422	.0596	.0771	.0945	.1119	.1294	.1468	.1642	.1816	25
26	.0076	.0250	.0425	.0599	.0774	.0948	.1122	.1296	.1471	.1645	.1818	26
27	.0079	.0253	.0428	.0602	.0776	.0951	.1125	.1299	.1473	.1647	.1821	27
28	.0081	.0256	.0430	.0605	.0779	.0954	.1128	.1302	.1476	.1650	.1824	28
29	.0084	.0259	.0433	.0608	.0782	.0957	.1131	.1305	.1479	.1653	.1827	29
30	.0087	.0262	.0436	.0611	.0785	.0960	.1134	.1308	.1482	.1656	.1830	30
31	.0090	.0265	.0439	.0614	.0788	.0962	.1137	.1311	.1485	.1659	.1833	31
32	.0093	.0268	.0442	.0617	.0791	.0965	.1140	.1314	.1488	.1662	.1836	32
33	.0096	.0271	.0445	.0619	.0794	.0968	.1143	.1317	.1491	.1665	.1839	33
34	.0099	.0273	.0448	.0622	.0797	.0971	.1145	.1320	.1494	.1668	.1842	34
35	.0102	.0276	.0451	.0625	.0800	.0974	1148	.1323	.1497	.1671	.1845	35
36	.0105	.0279	.0454	.0628	.0803	.0979	.1151	.1325	.1500	.1674	.1847	36
37	.0108	.0282	.0457	.0631	.0806	.0980	.1154	.1328	.1502	.1676	.1850	37
38	.0111	.0285	.0460	.0634	.0808	.0983	.1157	.1331	.1505	.1679	.1853	38
39	.0113	.0288	.0462	.0637	.0811	.0986	.1160	.1334	.1508	.1682	.1856	39
40	.0116	.0291	.0465	.0640	.0814	.0989	.1163	.1337	.1511	.1685	.1859	40
41	.0119	.0294	.0468	.0643	.0817	.0992	.1166	.1340	.1514	.1688	.1862	41
42	.0122	.0297	.0471	.0646	.0820	.0994	.1169	.1343	.1517	.1691	.1865	42
43	.0125	.0300	.0474	.0649	.0823	.0997	.1172	.1346	.1520	.1694	.1868	43
44	.0128	.0303	.0477	.0651	.0826	.1000	.1175	.1349	.1523	.1697	.1871	44
45	.0131	.0305	.0480	.0654	.0829	.1003	.1177	.1352	.1526	.1700	.1873	45
46	.0134	.0308	.0483	.0657	.0832	.1006	.1180	.1355	.1529	.1703	.1876	46
47	.0137	.0311	.0486	.0660	.0835	.1009	.1183	.1357	.1531	.1705	.1879	47
48	.0140	.0314	.0489	.0663	.0838	.1012	.1186	.1360	.1534	.1708	.1882	48
49	.0143	.0317	.0492	.0666	.0840	.1015	.1189	.1363	.1537	.1711	.1885	49
50	.0145	.0320	.0494	.0669	.0843	.1018	.1192	.1366	.1540	.1714	.1888	50
51	.0148	.0323	.0497	.0672	.0846	.1021	.1195	.1369	.1543	.1717	.1891	51
52	.0151	.0326	.0500	.0675	.0849	.1023	.1198	.1372	.1546	.1720	.1894	52
53	.0154	.0329	.0503	.0678	.0852	.1026	.1201	.1375	.1549	.1723	.1897	53
54	.0157	.0332	.0506	.0681	.0855	.1029	.1204	.1378	.1552	.1726	.1900	54
55	.0160	.0335	.0509	.0683	.0858	.1032	.1206	.1381	.1555	.1729	.1902	55
56	.0163	.0337	.0512	.0686	.0861	.1035	.1209	.1384	.1558	.1732	.1905	56
57	.0166	.0340	.0515	.0689	.0864	.1038	.1212	.1386	.1560	.1734	.1908	57
58	.0169	.0343	.0518	.0692	.0867	.1041	.1215	.1389	.1563	.1737	.1911	58
59	.0172	.0346	.0521	.0695	.0869	.1044	.1218	.1392	.1566	.1740	.1914	59
60	.0175	.0349	.0524	.0698	.0872	.1047	.1221	.1395	.1569	.1743	.1917	60

9°	10°	M.
.1569	.1743	0
.1572	.1746	1
.1575	.1749	2
.1578	.1752	3
.1581	.1755	4
.1584	.1758	5
.1587	.1761	6
.1589	.1763	7
.1592	.1766	8
.1595	.1769	9
.1598	.1772	10
.1601	.1775	11
.1604	.1778	12
.1607	.1781	13
.1610	.1784	14
.1613	.1787	15
.1616	.1789	16
.1618	.1792	17
.1621	.1795	18
.1624	.1798	19
.1627	.1801	20
.1630	.1804	21
.1633	.1807	22
.1636	.1810	23
.1639	.1813	24
.1642	.1816	25
.1645	.1818	26
.1647	.1821	27
.1650	.1824	28
.1653	.1827	29
.1656	.1830	30
.1659	.1833	31
.1662	.1836	32
.1665	.1839	33
.1668	.1842	34
.1671	.1845	35
.1674	.1847	36
.1676	.1850	37
.1679	.1853	38
.1682	.1856	39
.1685	.1859	40
. 688	.1862	41
.1691	.1865	42
.1694	.1868	43
.1697	.1871	44
.1700	.1873	45
.1703	.1876	46
.1705	.1879	47
.1708	.1882	48
.1711	.1885	49
.1714	.1888	50
.1717	.1891	51
.1720	.1894	52
.1723	.1897	53
.1726	.1900	54
.1729	.1902	55
.1732	.1905	56
.1734	.1908	57
.1737	.1911	58
.1740	.1914	59
.1743	.1917	60

M.	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	M.
0′	.1917	.2091	.2264	.2437	.2611	.2783	.2956	3129	.3301	.3473	.3645	0′
1	.1920	.2093	.2267	.2440	.2613	.2786	.2959	.3132	.3304	.3476	.3648	1
2	.1923	.2096	.2270	.2443	.2616	.2789	.2962	.3134	.3307	.3479	.3650	2
3	.1926	.2099	.2273	.2446	.2619	.2792	.2965	.3137	.3310	.3482	.3653	3
4	.1928	.2102	.2276	.2449	.2622	.2795	.2968	.3140	.3312	.3484	.3656	4
5	.1931	.2105	.2279	.2452	.2625	.2798	.2971	.3143	.3315	.3487	.3659	5
6	.1934	.2108	.2281	.2455	.2628	.2801	.2973	.3146	.3318	.3490	.3662	6
7	.1937	2111	.2284	.2458	.2631	.2804	.2976	.3149	.3321	.3493	.3665	7
8	.1940	.2114	.2287	.2460	.2634	.2807	.2979	.3152	.3324	.3496	.3668	8
9	.1943	.2117	.2290	.2463	.2636	.2809	.2982	.3155	3327	.3499	.3670	9
10	.1946	.2119	.2293	.2466	.2639	.2812	.2985	.3157	.3330	.3502	.3673	10
11	.1949	.2122	.2296	.2469	.2642	.2815	.2988	.3160	.3333	.3504	.3676	11
12	.1952	.2125	.2299	.2472	.2645	.2818	.2991	.3163	.3335	.3507	.3679	12
13	.1955	.2128	.2302	.2475	.2648	.2821	.2994	.3166	.3338	.3510	.3682	13
14	.1957	.2131	.2305	.2478	.2651	.2824	.2996	.3169	.3341	.3513	.3685	14
15	.1960	.2134	.2307	.2481	.2654	.2827	.2999	.3172	.3344	.3516	.3688	15
16	.1963	.2137	.2310	.2484	.2657	.2830	.3002	.3175	.3347	.3519	.3690	16
17	.1966	.2140	.2313	.2486	.2660	.2832	.3005	.3178	.3350	.3522	.3693	17
18	.1969	.2143	.2316	.2489	.2662	.2835	.3008	.3180	.3353	.3525	.3696	18
19	.1972	.2146	.2319	.2492	.2665	.2838	.3011	.3183	.3355	.3527	.3699	19
20	.1975	.2148	.2322	.2495	.2668	.2841	.3014	.3186	.3358	.3530	.3702	20
21	.1978	.2151	.2325	.2498	.2671	.2844	.3017	.3189	.3361	.3533	.3705	21
22	.1981	.2154	.2328	.2501	.2674	.2847	.3019	.3192	.3364	.3536	.3708	22
23	.1983	.2157	.2331	.2504	.2677	.2850	.3022	.3195	.3367	.3539	.3710	23
24	.1986	.2160	.2333	.2507	.2680	.2853	.3025	.3198	.3370	.3542	.3713	24
25	.1989	.2163	.2336	.2510	.2683	.2855	.3028	.3200	.3373	.3545	.3716	25
26	.1992	.2166	.2339	.2512	.2685	.2858	.3031	.3203	.3376	.3547	.3719	26
27	.1995	.2169	.2342	.2515	.2688	.2861	.3034	.3206	.3378	.3550	.3722	27
28	.1998	.2172	.2345	.2518	.2691	.2864	.3037	.3209	.3381	.3553	.3725	28
29	.2001	.2174	.2348	.2521	.2694	.2867	.3040	.3212	.3384	.3556	.3728	29
30	.2004	.2177	.2351	.2524	.2697	.2870	.3042	.3215	.3387	.3559	.3730	30
31	.2007	.2180	.2354	.2527	.2700	.2873	.3045	.3218	.3390	.3562	.3733	31
32	.2010	.2183	.2357	.2530	.2703	.2876	.3048	.3221	.3393	.3565	.3736	32
33	.2012	.2186	.2359	.2533	.2706	.2878	.3051	.3223	.3396	.3567	.3739	33
34	.2015	.2189	.2362	.2536	.2709	.2881	.3054	.3226	.3398	.3570	.3742	34
35	.2018	.2192	.2365	.2538	.2711	.2884	.3057	.3229	.3401	.3573	.3745	35
36	.2021	.2195	.2368	.2541	.2714	.2887	.3060	.3232	.3404	.3576	.3748	36
37	.2024	.2198	.2371	.2544	.2717	.2890	.3063	.3235	.3407	.3579	.3750	37
38	.2027	.2200	.2374	.2547	.2720	.2893	.3065	.3238	.3410	.3582	.3753	38
39	.2030	.2203	.2377	.2550	.2723	.2896	.3068	.3241	.3413	.3585	.3756	39
40	.2033	.2206	.2380	.2553	.2726	.2899	.3071	.3244	.3416	.3587	.3759	40
41	.2036	.2209	.2383	.2556	.2729	.2902	.3074	.3246	.3419	.3590	.3762	41
42	.2038	.2212	.2385	.2559	.2732	.2904	.3077	.3249	.3421	.3593	.3765	42
43	.2041	.2215	.2388	.2561	.2734	.2907	.3080	.3252	.3424	.3596	.3768	43
44	.2044	.2218	.2391	.2564	.2737	.2910	.3083	.3255	.3427	.3599	.3770	44
45	.2047	.2221	.2394	.2567	.2740	.2913	.3086	.3258	.3430	.3602	.3773	45
46	.2050	.2224	.2397	.2570	.2743	.2916	.3088	.3261	.3433	.3605	.3776	46
47	.2053	.2226	.2400	.2573	.2746	.2919	.3091	.3264	.3436	.3608	.3779	47
48	.2056	.2229	.2403	.2576	.2749	.2922	.3094	[illegible]	.3439	.3610	.3782	48
49	.2059	.2232	.2406	.9579	.2752	.2925	.3097	[illegible]	.3441	.3613	.3785	49
50	.2062	.2235	.2409	.2582	.2755	.2927	.3100	[illegible]	.3444	.3616	.3788	50
51	.2065	.2238	.2411	.2585	.2758	.2930	.3103	[illegible]	.3447	.3619	.3790	51
52	.2067	.2241	.2414	.2587	.2760	.2933	.3106	.3278	.3450	.3622	.3793	52
53	.2070	.2244	.2417	.2590	.2763	.2936	.3109	.3281	.3453	.3625	.3796	53
54	.2073	.2247	.2420	.2593	.2766	.2939	.3111	.3284	.3456	.3628	.3799	54
55	.2076	.2250	.2423	.2596	.2769	.2942	.3114	.3287	.3459	.3630	.3802	55
56	.2079	.2253	.2426	.2599	.2772	.2945	.3117	.3289	.3462	.3633	.3805	56
57	.2082	.2255	.2429	.2602	.2775	.2948	.2120	.3292	.3464	.3636	.3808	57
58	.2085	.2258	.2432	.2605	.2778	.2950	.3123	.3295	.3467	.3639	.3810	58
59	.2088	.2261	.2434	.2608	.2781	.2953	.3126	.3298	.3470	.3642	.3813	59
60	.2091	.2264	.2437	.2611	.2783	.2956	.3129	.3301	.3473	.3645	.3816	60

M.	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	M.
'0	.3816	.3987	.4158	.4329	.4499	.4669	.4838	.5008	.5176	.5345	.5513	'0
1	.3819	.3990	.4161	.4332	.4502	.4672	.4841	.5010	.5179	.5348	.5516	1
2	.3822	.3993	.4164	.4334	.4505	.4675	.4844	.5013	.5182	.5350	.5518	2
3	.3825	.3996	.4167	.4337	.4508	.4677	.4847	.5016	.5185	.5353	.5521	3
4	.3828	.3999	.4170	.4340	.4510	.4680	.4850	.5019	.5188	.5356	.5524	4
5	.3830	.4002	[illegible]172	.4343	.4513	.4683	.4853	.5022	.5190	.5359	.5527	5
6	.3833	.4004	[illegible]175	.4346	.4516	.4686	.4855	.5024	.5193	.5362	.5530	6
7	.3836	.4007	[illegible]	.4349	.4519	.4689	.4858	.5027	.5196	.5364	.5532	7
8	.3839	.4010	[illegible]	.4352	.4522	.4692	.4861	.5030	.5199	.5367	.5535	8
9	.3842	.4013	.4184	.4354	.4525	.4694	.4864	.5033	.5202	.5370	.5538	9
10	.3845	.4016	.4187	.4357	.4527	.4697	.4867	.5036	.5204	.5373	.5541	10
11	.3848	.4019	.4190	.4360	.4530	.4700	.4869	.5039	.5207	.5376	.5543	11
12	.3850	.4022	.4192	.4363	.4533	.4703	.4872	.5041	.5210	.5378	.5546	12
13	.3853	.4024	.4195	.4366	.4536	.4706	.4875	.5044	.5213	.5381	.5549	13
14	.3856	.4027	.4198	.4369	.4539	.4708	.4878	.5047	.5216	.5384	.5552	14
15	.3859	.4030	.4201	.4371	.4542	.4711	.4881	.5050	.5219	.5387	.5555	15
16	.3862	.4033	.4204	.4374	.4544	.4714	.4884	.5053	.5221	.5390	.5557	16
17	.3865	.4036	.4207	.4377	.4547	.4717	.4886	.5055	.5224	.5392	.5560	17
18	.3868	.4039	.4209	.4380	.4550	.4720	.4889	.5058	.5227	.5395	.5563	18
19	.3870	.4042	.4212	.4383	.4553	.4723	.4892	.5061	.5230	.5398	.5566	19
20	.3873	.4044	.4215	.4386	.4556	.4725	.4895	.5064	.5233	.5401	.5569	20
21	.3876	.4047	.4218	.4388	.4559	.4728	.4898	.5067	.5235	.5404	.5571	21
22	.3879	.4050	.4221	.4391	.4561	.4731	.4901	.5070	.5238	.5406	.5574	22
23	.3882	.4053	.4224	.4394	.4564	.4734	.4903	.5072	.5241	.5409	.5577	23
24	.3885	.4056	.4226	.4397	.4567	.4737	.4906	.5075	.5244	.5412	.5580	24
25	.3888	.4059	.4229	.4400	.4570	.4740	.4909	.5078	.5247	.5415	.5583	25
26	.3890	.4061	4232	.4403	.4573	.4742	.4912	5081	.5249	.5418	.5585	26
27	.3893	.4064	.4235	.4405	.4576	.4745	.4915	.5084	.5252	.5420	.5588	27
28	.3896	.4067	.4238	.4408	.4578	.4748	.4917	.5086	.5255	.5423	.5591	28
29	.3899	.4070	.4241	.4411	.4581	.4751	.4920	.5089	5258	.5426	.5594	29
30	.3902	.4073	.4244	.4414	.4584	.4754	.4923	.5092	.5261	.5429	.5597	30
31	.3905	.4076	.4246	.4417	.4587	.4757	.4926	.5095	.5263	.5432	.5599	31
32	.3908	.4079	.4249	.4420	.4590	.4759	.4929	.5098	.5266	.5434	.5602	32
33	.3910	.4081	.4252	.4422	.4593	.4762	.4932	.5100	.5269	.5437	.5605	33
34	.3913	.4084	.4255	.4425	.4595	.4765	.4934	.5103	.5272	.5440	.5608	34
35	.3916	.4087	.4258	.4428	.4598	.4768	.4937	.5106	.5275	.5443	.5611	35
36	.3919	.4090	.4261	.4431	.4601	.4771	.4940	.5109	.5277	5446	.5613	36
37	.3922	.4093	.4263	.4434	.4604	.4773	.4943	.5112	.5280	.5448	.5616	37
38	.3925	.4096	.4266	.4437	.4607	.4776	.4946	.5115	.5283	.5451	.5619	38
39	.3927	.4098	.4269	.4439	.4609	.4779	.4948	.5117	.5286	.5454	.5622	39
40	.3930	.4101	.4272	.4442	.4612	.4782	4951	.5120	.5289	.5457	.5625	40
41	.3933	.4104	.4275	.4445	.4615	.4785	.4954	.5123	.5291	.5460	.5627	41
42	.3936	.4107	.4278	.4448	.4618	.4788	.4957	.5126	.5294	.5462	.5630	42
43	.3939	.4110	.4280	.4451	.4621	.4790	4960	.5129	.5297	.5465	.5633	43
44	.3942	.4113	.4283	.4454	.4624	.4793	.4963	.5131	.5300	.5468	.5636	44
45	.3945	.4116	.4286	.4456	.4626	.4796	.4965	.5134	.5303	5471	.5638	45
46	.3947	.4118	.4289	.4459	.4629	.4799	.4968	.5137	.5306	.5474	.5641	46
47	.3950	.4121	.4292	.4462	.4632	.4802	.4971	.5140	.5308	.5476	.5644	47
48	.3953	.4124	.4295	.4465	.4635	.4805	.4974	.5143	.5311	.5479	.5647	48
49	.3956	.4127	.4298	.4468	.4638	.4807	.4977	.5145	.5314	.5482	.5650	49
50	.3959	.4130	.4300	.4471	.4641	.4810	.4979	.5148	.5317	.5485	.5652	50
51	.3962	.4133	.4303	.4474	.4643	.4813	.4982	.5151	.5320	.5488	.5655	51
52	.3965	.4135	.4306	.4476	.4646	.4816	.4985	.5154	.5322	.5490	.5658	52
53	.3967	.4138	.4309	.4479	.4649	.4819	.4988	.5157	.5325	.5493	.5661	53
54	.3970	.4141	.4312	.4482	.4652	.4822	.4991	.5160	.5328	.5496	.5664	54
55	.3973	.4144	.4315	.4485	.4655	.4824	.4994	.5162	.5331	.5499	.5666	55
56	.3976	.4147	.4317	.4488	.4658	.4827	.4996	.5165	.5334	.5502	.5669	56
57	.3979	.4150	.4320	.4491	.4660	.4830	.4999	.5168	.5336	.5504	.5672	57
58	.3982	.4153	.4323	.4493	.4663	.4833	.5002	.5171	.5339	.5507	.5675	58
59	.3985	.4155	.4326	.4496	.4666	.4836	.5005	.5174	.5342	.5510	.5678	59
60	.3987	.4158	.4329	.4499	.4669	.4838	.5008	.5176	5345	.5513	.5680	60

M.	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	M.
'0	5680	.5847	.6014	.6180	.6346	.6511	.6676	.6840	.7004	.7167	.7330	'0
1	.5683	.5850	.6017	.6183	.6349	.6514	.6679	.6843	.7007	.7170	.7333	1
2	.5686	.5853	.6020	.6186	.6352	.6517	.6682	.6846	.7010	.7173	.7335	2
3	.5689	.5856	.6022	.6189	.6354	.6520	.6684	.6849	.7012	.7176	.7338	3
4	.5691	.5859	.6025	.6191	.6357	.6522	.6687	.6851	.7015	.7178	.7341	4
5	.5694	.5861	.6028	.6194	.6360	.6525	.6690	.6854	.7018	.7181	.7344	5
6	.5697	.5864	.6031	.6197	.6363	.6528	.6693	.6857	.7020	.7184	.7346	6
7	.5700	.5867	.6034	.6200	.6365	.6531	.6695	.6860	.7023	.7186	.7349	7
8	.5703	.5870	.6036	.6202	.6368	.6533	.6698	.6862	.7026	.7189	.7352	8
9	.5705	.5872	.6039	.6205	.6371	.6536	.6701	.6865	.7029	.7192	.7354	9
10	.5708	.5875	.6042	.6208	.6374	.6539	.6704	.6868	.7031	.7195	.7357	10
11	.5711	.5878	.6045	.6211	.6376	.6542	.6706	.6870	.7034	.7197	.7360	11
12	.5714	.5881	.6047	.6214	.6379	.6544	.6709	.6873	.7037	.7200	.7362	12
13	.5717	.5884	.6050	.6216	.6382	.6547	.6712	.6876	.7040	.7203	.7365	13
14	.5719	.5886	.6053	.6219	.6385	.6550	.6715	.6879	.7042	.7205	.7368	14
15	.5722	.5889	.6056	.6222	.6387	.6553	.6717	.6881	.7045	.7208	.7371	15
16	.5725	.5892	.6058	.6225	.6390	.6555	.6720	.6884	.7048	.7211	.7373	16
17	.5728	.5895	.6061	6227	.6393	.6558	.6723	.6887	.7050	.7214	.7376	17
18	.5730	.5897	.6064	.6230	.6396	.6561	.6725	.6890	.7053	.7216	.7379	18
19	.5733	.5900	.6067	.6233	.6398	.6564	.6728	.6892	.7056	.7219	.7381	19
20	.5736	.5903	.6070	.6236	.6401	.6566	.6731	.6895	.7059	.7222	.7384	20
21	.5739	.5906	.6072	.6238	.6404	.6569	.6734	.6898	.7061	.7224	.7387	21
22	.5742	.5909	.6075	.6241	.6407	.6572	.6736	.6901	.7064	.7227	.7390	22
23	.5744	.5911	.6078	.6244	.6410	.6575	.6739	.6903	.7067	.7230	.7392	23
24	.5747	.5914	.6081	.6247	.6412	.6577	.6742	.6906	.7069	.7232	.7395	24
25	.5750	.5917	.6083	.6249	.6415	.6580	.6745	.6909	.7072	.7235	.7398	25
26	.5753	.5920	.6086	.6252	.6418	.6583	.6747	.6911	.7075	.7238	.7400	26
27	.5756	.5922	.6089	.6255	.6421	.6586	.6750	.6914	.7078	.7241	.7403	27
28	.5758	.5925	.6092	.6258	.6423	.6588	.6753	.6917	.7080	.7243	.7406	28
29	.5761	.5928	.6095	.6260	.6426	.6591	.6756	.6920	.7083	.7246	.7408	29
30	.5764	.5931	.6097	.6263	.6429	.6594	.6758	.6922	.7086	.7249	.7411	30
31	.5767	.5934	.6100	.6266	.6432	.6597	.6761	.6925	.7089	.7251	.7414	31
32	.5769	.5936	.6103	.6269	.6434	.6599	.6764	.6928	.7091	.7254	.7417	32
33	.5772	.5939	.6106	.6272	.6437	.6602	.6767	.6931	.7094	.7257	.7419	33
34	.5775	.5942	.6108	.6274	.6440	.6605	.6769	.6933	.7097	.7260	.7422	34
35	.5778	.5945	.6111	.6277	.6443	.6608	.6772	.6936	.7099	.7262	.7425	35
36	.5781	.5947	.6114	.6280	.6445	.6610	.6775	.6939	.7102	.7265	.7427	36
37	.5783	.5950	.6117	.6283	.6448	.6613	.6777	.6941	.7105	.7268	.7430	37
38	.5786	.5953	.6119	.6285	.6451	.6616	.6780	.6944	.7108	.7270	.7433	38
39	.5789	.5956	.6122	.6288	.6454	.6619	.6783	.6947	.7110	.7273	.7435	39
40	.5792	.5959	.6125	.6291	.6456	.6621	.6786	.6950	.7113	.7276	.7438	40
41	.5795	.5961	.6128	.6294	.6459	.6624	.6788	.6952	.7116	.7279	.7441	41
42	.5797	.5964	.6130	.6296	.6462	.6627	.6791	.6955	.7118	.7281	.7443	42
43	.5800	.5967	.6133	.6299	.6465	.6630	.6794	.6958	.7121	.7284	.7446	43
44	.5803	.5970	.6136	.6302	.6467	.6632	.6797	.6961	.7124	.7287	.7449	44
45	.5806	.5972	.6139	.6305	.6470	.6635	.6799	.6963	.7127	.7289	.7452	45
46	.5808	.5975	.6142	.6307	.6473	.6638	.6802	.6966	.7129	.7292	.7454	46
47	.5811	.5978	.6144	.6310	.6476	.6640	.6805	.6969	.7132	.7295	.7457	47
48	.5814	.5981	.6147	.6313	.6478	.6643	.6808	.6971	.7135	.7298	.7460	48
49	.5817	.5984	.6150	.6316	.6481	.6646	.6810	.6974	.7137	.7300	.7462	49
50	.5820	.5986	.6153	.6318	.6484	.6649	.6813	.6977	.7140	.7303	.7465	50
51	.5822	.5989	.6155	.6321	.6487	.6651	.6816	.6980	.7143	.7306	.7468	51
52	5825	.5992	.6158	.6324	.6489	.6654	.6819	.6982	.7146	.7308	.7471	52
53	.5828	.5995	.6161	.6327	.6492	.6657	.6821	.6985	.7148	.7311	.7473	53
54	.5831	.5997	.6164	.6330	.6495	.6660	.6824	.6988	.7151	.7314	.7476	54
55	.5834	.6000	.6166	.6332	.6498	.6662	.6827	.6991	.7154	.7316	7479	55
56	.5836	.6003	.6169	.6335	.6500	.6665	.6829	.6993	.7156	.7319	.7481	56
57	.5839	.6006	.6172	.6338	.6503	6668	.6832	.6996	.7159	.7322	.7484	57
58	.5842	.6009	.6175	.6341	.6506	.6671	.6835	.6999	.7162	.7325	.7487	58
59	.5845	.6011	.6178	.6343	.6509	.6673	.6838	.7001	.7165	.7327	.7489	59
60	.5847	.6014	.6180	.6346	.6511	.6676	.6840	.7004	.7167	.7330	.7492	60

M.	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	M.
0′	.7492	.7654	.7815	.7975	.8135	.8294	.8452	.8610	.8767	.8924	.9080	0′
1	.7495	.7656	.7817	.7978	.8137	8297	.8455	.8613	.8770	.8927	.9082	1
2	.7498	.7659	.7820	.7980	.8140	.8299	.8458	.8615	.8773	.8929	.9085	2
3	.7500	.7662	.7823	.7983	.8143	.8302	.8460	.8618	.8775	.8932	.9088	3
4	.7503	.7664	.7825	.7986	.8145	.8304	.8463	.8621	.8778	.8934	.9090	4
5	.7506	.7667	.7828	.7988	.8148	.8307	.8466	8623	.8780	.8937	.9093	5
6	.7508	.7670	.7831	.7991	.8151	.8310	.8468	.8626	.8783	.8940	.9095	6
7	.7511	.7672	.7833	.7994	.8153	.8312	.8471	.8629	.8786	.8942	.9098	7
8	.7514	.7675	.7836	.7996	.8156	.8315	.8473	.8631	.8788	.8945	.9101	8
9	.7516	.7678	.7839	.7999	.8159	.8318	.8476	.8634	.8791	8947	.9103	9
10	.7519	.7681	.7841	.8002	.8161	.8320	.8479	.8636	.8794	.8950	.9106	10
11	.7522	.7683	.7844	.8004	.8164	.8323	.8481	.8639	.8796	.8953	9108	11
12	.7524	.7686	.7847	.8007	.8167	.8326	.8484	.8642	.8799	.8955	.9111	12
13	.7527	.7689	.7849	.8010	.8169	.8328	.8487	.8644	.8801	.8958	.9113	13
14	.7530	.7691	.7852	.8012	.8172	.8331	.8489	.8647	.8804	.8960	.9116	14
15	.7533	.7694	.7855	.8015	.8175	.8334	.8492	.8650	.8807	.8963	.9119	15
16	.7535	.7697	.7857	.8018	.8177	.8336	.8495	.8652	.8809	.8966	9121	16
17	.7538	.7699	.7860	.8020	.8180	.8339	.8497	.8655	.8812	.8968	.9124	17
18	.7541	.7702	.7863	.8023	.8183	.8341	.8500	.8657	.8814	.8971	.9126	18
19	.7543	.7705	.7865	.8026	.8185	.8344	.8502	.8660	.8817	.8973	.9129	19
20	.7546	.7707	.7868	.8028	.8188	.8347	.8505	.8663	.8820	.8976	.9132	20
21	.7549	.7710	.7871	.8031	.8190	.8349	.8508	.8665	.8822	.8979	.9134	21
22	.7551	.7713	.7873	.8034	.8193	.8352	.8510	.8668	.8825	.8981	.9137	22
23	.7554	.7715	.7876	.8036	.8196	.8355	.8513	.8671	.8828	.8984	.9139	23
24	.7557	.7718	.7879	.8039	.8198	.8357	.8516	.8673	.8830	.8986	.9142	24
25	.7560	.7721	.7882	.8042	.8201	.8360	.8518	.8676	.8833	.8989	.9145	25
26	.7562	.7723	.7884	.8044	.8204	.8363	.8521	.8678	.8835	.8992	.9147	26
27	.7565	.7726	.7887	.8047	.8206	.8365	.8523	.8681	.8838	.8994	.9150	27
28	.7568	7729	.7890	.8050	.8209	.8368	.8526	.8684	.8841	.8997	.9152	28
29	.7570	.7731	.7892	.8052	.8212	.8371	.8529	.8686	.8843	.8999	.9155	29
30	.7573	.7734	.7895	.8055	.8214	.8373	.8531	.8689	.8846	.9002	.9157	30
31	.7576	.7737	.7898	.8058	.8217	.8376	.8534	.8692	.8848	.9005	.9160	31
32	.7578	.7740	.7900	.8060	.8220	.8378	.8537	.8694	.8851	.9007	9163	32
33	.7581	.7742	.7903	.8063	.8222	.8381	.8539	.8697	.8854	.9010	.9165	33
34	.7584	.7745	.7906	.8066	.8225	.8384	.8542	.8699	.8856	.9012	.9168	34
35	.7586	.7748	.7908	.8068	.8228	.8386	.8545	.8702	.8859	9015	.9170	35
36	.7589	.7750	.7911	.8071	.8230	.8389	.8547	.8705	.8861	.9018	.9173	36
37	.7592	.7753	.7914	.8074	.8233	.8392	.8550	.8707	.8864	.9020	.9176	37
38	.7595	.7756	.7916	.8076	.8236	.8394	.8552	8710	.8867	.9023	.9178	38
39	.7597	.7758	.7919	.8079	.8238	.8397	.8555	.8712	.8869	.9025	.9181	39
40	.7600	.7761	.7922	8082	.8241	.8400	.8558	.8715	.8872	.9028	.9183	40
41	.7603	.7764	.7924	.8084	.8244	.8402	.8560	.8718	.8874	.9031	.9186	41
42	.7605	.7766	.7927	.8087	.8246	.8405	.8563	.8720	.8877	.9033	.9188	42
43	.7608	.7769	.7930	.8090	.8249	.8408	.8566	.8723	.8880	.9036	.9191	43
44	.7611	.7772	.7932	.8092	.8251	.8410	.8568	.8726	.8882	.9038	.9194	44
45	.7613	.7774	.7935	.8095	.8254	.8413	.8571	.8728	.8885	.9041	.9196	45
46	.7616	.7777	.7938	.8098	.8257	.8415	.8573	.8731	.8887	.9044	.9199	46
47	.7619	.7780	.7940	.8100	.8259	.8418	.8576	.8734	.8890	.9046	.9201	47
48	.7621	.7782	.7943	.8103	.8262	.8421	.8579	.8736	.8893	.9049	.9204	48
49	.7624	.7785	.7946	.8105	.8265	.8423	.8581	.8739	.8895	.9051	.9207	49
50	.7627	.7788	.7948	.8108	.8267	.8426	.8584	.8741	.8898	.9054	.9209	50
51	.7629	.7791	.7951	.8111	.8270	.8429	.8587	.8744	.8900	.9056	.9212	51
52	.7632	.7793	.7954	.8113	.8273	.8431	.8589	.8747	.8903	.9059	.9214	52
53	.7635	.7796	.7956	.8116	.8275	.8434	.8592	.8749	.8906	.9062	.9217	53
54	.7638	.7799	.7959	.8119	.8278	.8437	.8594	.8752	.8908	.9064	.9219	54
55	.7640	.7801	.7962	.8121	.8281	.8439	.8597	.8754	.8911	.9067	.9222	55
56	.7643	.7804	.7964	.8124	.8283	.8442	.8600	.8757	.8914	.9069	.9225	56
57	.7646	.7807	.7967	.8127	.8286	.8444	.8602	.8760	.8916	.9072	.9227	57
58	.7648	.7809	.7970	.8129	.8289	.8447	.8605	.8762	.8919	.9075	.9230	58
59	.7651	.7812	.7972	.8132	.8291	.8450	.8608	.8765	.8921	.9077	.9232	59
60	.7654	.7815	.7975	.8135	.8294	.8452	.8610	.8767	.8924	.9080	.9225	60

M.	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	M.
0′	.9235	.9389	.9543	.9696	.9848	1.0000	1.0151	1.0301	1.0450	1.0598	0′
1	.9238	.9392	9546	.9699	.9851	1.0003	1.0153	1.0303	1.0452	1.0601	1
2	.9240	.9395	.9548	.9701	.9854	1.0005	1.0156	1.0306	1.0455	1.0603	2
3	.9243	.9397	.9551	.9704	.9856	1.0008	1.0158	1.0308	1.0457	1.0606	3
4	.9245	.9400	.9553	.9706	.9859	1.0010	1.0161	1.0311	1.0460	1.0608	4
5	.9248	.9402	.9556	.9709	9861	1.0013	1.0163	1.0313	1.0462	1.0611	5
6	.9250	.9405	.9559	.9711	.9864	1.0015	1.0166	1.0316	1.0465	1.0613	6
7	.9253	.9407	.9561	.9714	.9866	1.0018	1.0168	1.0318	1.0467	1.0616	7
8	.9256	.9410	.9564	.9717	.9869	1.0020	1.0171	1.0321	1.0470	1.0618	8
9	.9258	.9413	.9566	.9719	.9871	1.0023	1.0173	1.0323	1.0472	1.0621	9
10	.9261	.9415	.9569	.9722	.9874	1.0025	1.0176	1.0326	1.0475	1.0623	10
11	.9263	.9418	.9571	.9724	.9876	1.0028	1.0178	1.0328	1.0477	1.0626	11
12	.9266	.9420	.9574	.9727	.9879	1.0030	1.0181	1.0331	1.0480	1.0628	12
13	.9268	.9423	.9576	.9729	.9881	1.0033	1.0183	1.0333	1.0482	1.0630	13
14	.9271	.9425	.9579	.9732	.9884	1.0035	1.0186	1.0336	1 0485	1.0633	14
15	.9274	.9428	.9581	.9734	.9886	1.0038	1.0188	1.0338	1.0487	1.0635	15
16	.9276	.9430	.9584	.9737	.9889	1.0040	1.0191	1.0341	1.0490	1.0638	16
17	.9279	9433	.9587	.9739	.9891	1.0043	1.0193	1.0343	1.0492	1.0640	17
18	.9281	9436	.9589	.9742	.9894	1.0045	1.0196	1.0346	1.0495	1.0643	18
19	.9284	.9438	.9592	.9744	.9897	1.0048	1.0198	1.0348	1.0497	1.0645	19
20	.9287	.9441	.9594	.9747	.9899	1.0050	1.0201	1.0351	1.0500	1.0648	20
21	.9289	.9443	.9597	.9750	.9902	1.0053	1.0203	1.0353	1.0502	1.0650	21
22	.9292	.9446	.9599	.9752	.9904	1.0055	1.0206	1.0356	1.0504	1.0653	22
23	.9294	.9448	.9602	.9755	.9907	1.0058	1.0208	1.0358	1 0507	1.0655	23
24	.9297	.9451	.9604	.9757	.9909	1.0060	1.0211	1.0361	1.0509	1.0658	24
25	.9299	.9454	.9607	.9760	.9912	1.0063	1.0213	1.0363	1.0512	1.0660	25
26	.9302	.9456	.9610	.9762	.9914	1.0065	1.0216	1.0366	1.0514	1.0662	26
27	.9305	.9459	.9612	.9765	.9917	1.0068	1 0218	1.0368	1.0517	1.0665	27
28	.9307	.9461	.9615	.9767	.9919	1.0070	1.0221	1.0370	1.0519	1.0667	28
29	.9310	.9464	.9517	.9770	.9922	1.0073	1.0223	1.0373	1 0522	1.0670	29
30	.9312	.9466	.9620	.9772	9924	1.0075	1.0226	1.0375	1.0524	1.0672	30
31	.9315	.9469	.9622	.9775	.9927	1.0078	1.0228	1.0378	1.0527	1.0675	31
32	.9317	.9472	.9625	.9778	.9929	1.0080	1.0231	1.0380	1.0529	1.0677	32
33	.9320	.9474	.9627	.9780	.9932	1.0083	1.0233	1.0383	1.0532	1.0680	33
34	.9323	.9477	.9630	.9783	.9934	1.0086	1.0236	1.0385	1.0534	1.0682	34
35	.9325	.9479	.9633	.9785	9937	1 0088	1.0238	1.0388	1.0537	1.0685	35
36	.9328	.9482	.9635	.9788	.9939	1.0091	1.0241	1.0390	1.0539	1.0687	36
37	.9330	.9484	.9638	.9790	.9942	1.0093	1.0243	1.0393	1.0542	1.0690	37
38	.9333	.9487	.9640	.9793	.9945	1.0696	1.0246	1.0395	1.0544	1.0692	38
39	.9335	9489	.9643	.9795	.9947	1.0098	1.0248	1.0398	1.0547	1.0694	39
40	.9338	.9492	.9645	.9798	.9950	1.0101	1.0251	1.0400	1.0549	1.0697	40
41	.9341	.9495	.9648	.9800	.9952	1.0103	1.0253	1.0403	1.0551	1.0699	41
42	.9343	.9497	.9650	.9803	.9955	1.0106	1.0256	1.0405	1.0554	1.0702	42
43	.9346	.9500	.9653	.9805	.9957	1.0108	1.0258	1.0408	1.0556	1.0704	43
44	.9348	.9502	.9655	.9808	.9960	1.0111	1.0261	1.0410	1.0559	1.0707	44
45	.9351	.9505	.9658	.9810	.9962	1.0113	1.0263	1.0413	1.0561	1.0709	45
46	.9353	.9507	.9661	.9813	.9965	1.0116	1.0266	1.0415	1.0564	1.0712	46
47	.9356	.9510	.9663	.9816	.9967	1.0118	1.0268	1.0418	1.0566	1.0714	47
48	.9359	.9512	.9666	.9818	.9970	1.0121	1.0271	1.0420	1.0569	1.0717	48
49	.9361	.9515	.9668	.9821	.9972	1.0123	1.0273	1.0423	1.0571	1.0719	49
50	.9364	.9518	.9671	.9823	.9975	1.0126	1.0276	1.0425	1.0574	1.0721	50
51	.9366	.9520	.9673	.9826	.9977	1.0128	1.0278	1.0428	1.0576	1.0724	51
52	.9369	.9523	.9676	.9828	.9980	1.0131	1.0281	1.0430	1.0579	1.0726	52
53	.9371	.9525	.9678	.9831	.9982	1.0133	1.0283	1.0433	1.0581	1.0729	53
54	.9374	.9528	.9681	.9833	.9985	1.0136	1.0286	1.0435	1.0584	1.0731	54
55	.9377	.9530	.9683	.9836	.9987	1.0138	1.0288	1.0438	1.0586	1.0734	55
56	.9379	.9533	.9686	.9838	.9990	1.0141	1.0291	1.0440	1.0589	1.0736	56
57	.9382	.9536	.9689	.9841	.9992	1.0143	1.0293	1.0443	1.0591	1.0739	57
58	.9384	.9538	.9691	.9843	.9995	1.0146	1.0296	1.0445	1.0593	1.0741	58
59	.9387	.9541	.9694	.9846	.9998	1.0148	1.0298	1.0447	1.0596	1.0744	59
60	.9389	.9543	.9696	.9848	10000	1.0151	1.0301	1.0450	1.0598	1.0746	60

M.	65°	66°	67°	68°	69°	70°	71°	72°	73°	M.
0′	1.0746	1.0893	1.1039	1.1184	1.1328	1.1472	1.1614	1.1756	1.1896	0′
1	1.0748	1.0895	1.1041	1.1186	1.1331	1.1474	1.1616	1.1758	1.1899	1
2	1.0751	1.0898	1.1044	1.1189	1.1333	1.1476	1.1619	1.1760	1.1901	2
3	1.0753	1.0900	1.1046	1.1191	1.1335	1.1479	1.1621	1.1763	1.1903	3
4	1.0756	1.0903	1.1048	1.1194	1.1338	1.1481	1.1624	1.1765	1.1906	4
5	1.0758	1.0905	1.1051	1.1196	1.1340	1.1483	1.1626	1.1767	1.1908	5
6	1.0761	1.0907	1.1053	1.1198	1.1342	1.1486	1.1628	1.1770	1.1910	6
7	1.0763	1.0910	1.1056	1.1201	1.1345	1.1488	1.1631	1.1772	1.1913	7
8	1.0766	1.0912	1.1058	1.1203	1.1347	1.1491	1.1633	1.1775	1.1915	8
9	1.0768	1.0915	1.1061	1.1206	1.1350	1.1493	1.1635	1.1777	1.1917	9
10	1.0771	1.0917	1.1063	1.1208	1.1352	1.1495	1.1638	1.1779	1.1920	10
11	1.0773	1.0920	1.1065	1.1210	1.1354	1.1498	1.1640	1.1782	1.1922	11
12	1.0775	1.0922	1.1068	1.1213	1.1357	1.1500	1.1642	1.1784	1.1924	12
13	1.0778	1.0924	1.1070	1.1215	1.1359	1.1502	1.1645	1.1786	1.1927	13
14	1.0780	1.0927	1.1073	1.1218	1.1362	1.1505	1.1647	1.1789	1.1929	14
15	1.0783	1.0929	1.1075	1.1220	1.1364	1.1507	1.1650	1.1791	1.1931	15
16	1.0785	1.0932	1.1078	1.1222	1.1366	1.1510	1.1652	1.1793	1.1934	16
17	1.0788	1.0934	1.1080	1.1225	1.1369	1.1512	1.1654	1.1796	1.1936	17
18	1.0790	1.0937	1.1082	1.1227	1.1371	1.1514	1.1657	1.1798	1.1938	18
19	1.0793	1.0939	1.1085	1.1230	1.1374	1.1517	1.1659	1.1800	1.1941	19
20	1.0795	1.0942	1.1087	1.1232	1.1376	1.1519	1.1661	1.1803	1.1943	20
21	1.0797	1.0944	1.1090	1.1234	1.1378	1.1522	1.1664	1.1805	1.1946	21
22	1.0800	1.0946	1.1092	1.1237	1.1381	1.1524	1.1666	1.1807	1.1948	22
23	1.0802	1.0949	1.1094	1.1239	1.1383	1.1526	1.1668	1.1810	1.1950	23
24	1.0805	1.0951	1.1097	1.1242	1.1386	1.1529	1.1671	1.1812	1.1952	24
25	1.0807	1.0954	1.1099	1.1244	1.1388	1.1531	1.1673	1.1814	1.1955	25
26	1.0810	1.0956	1.1102	1.1246	1.1390	1.1533	1.1676	1.1817	1.1957	26
27	1.0812	1.0959	1.1104	1.1249	1.1393	1.1536	1.1678	1.1819	1.1959	27
28	1.0815	1.0961	1.1107	1.1251	1.1395	1.1538	1.1680	1.1821	1.1962	28
29	1.0817	1.0963	1.1109	1.1254	1.1398	1.1541	1.1683	1.1824	1.1964	29
30	1.0820	1.0966	1.1111	1.1256	1.1400	1.1543	1.1685	1.1826	1.1966	30
31	1.0822	1.0968	1.1114	1.1258	1.1402	1.1545	1.1687	1.1829	1.1969	31
32	1.0824	1.0971	1.1116	1.1261	1.1405	1.1548	1.1690	1.1831	1.1971	32
33	1.0827	1.0973	1.1119	1.1263	1.1407	1.1550	1.1692	1.1833	1.1973	33
34	1.0829	1.0976	1.1121	1.1266	1.1409	1.1552	1.1694	1.1836	1.1976	34
35	1.0832	1.0978	1.1123	1.1268	1.1412	1.1555	1.1697	1.1838	1.1978	35
36	1.0834	1.0980	1.1126	1.1271	1.1414	1.1557	1.1699	1.1840	1.1980	36
37	1.0837	1.0983	1.1128	1.1273	1.1417	1.1560	1.1702	1.1843	1.1983	37
38	1.0839	1.0985	1.1131	1.1275	1.1419	1.1562	1.1704	1.1845	1.1985	38
39	1.0841	1.0988	1.1133	1.1278	1.1421	1.1564	1.1706	1.1847	1.1987	39
40	1.0844	1.0990	1.1136	1.1280	1.1424	1.1567	1.1709	1.1850	1.1990	40
41	1.0846	1.0993	1.1138	1.1283	1.1426	1.1569	1.1711	1.1852	1.1992	41
42	1.0849	1.0995	1.1140	1.1285	1.1429	1.1571	1.1713	1.1854	1.1994	42
43	1.0851	1.0997	1.1143	1.1287	1.1431	1.1574	1.1716	1.1857	1.1997	43
44	1.0854	1.1000	1.1145	1.1290	1.1433	1.1576	1.1718	1.1859	1.1999	44
45	1.0856	1.1002	1.1148	1.1292	1.1436	1.1579	1.1720	1.1861	1.2001	45
46	1.0859	1.1005	1.1150	1.1295	1.1438	1.1581	1.1723	1.1864	1.2004	46
47	1.0861	1.1007	1.1152	1.1297	1.1441	1.1583	1.1725	1.1866	1.2006	47
48	1.0863	1.1010	1.1155	1.1299	1.1443	1.1586	1.1727	1.1868	1.2008	48
49	1.0866	1.1012	1.1157	1.1302	1.1445	1.1588	1.1730	1.1871	1.2011	49
50	1.0868	1.1014	1.1160	1.1304	1.1448	1.1590	1.1732	1.1873	1.2013	50
51	1.0871	1.1017	1.1162	1.1307	1.1450	1.1593	1.1735	1.1875	1.2015	51
52	1.0873	1.1019	1.1165	1.1309	1.1452	1.1595	1.1737	1.1878	1.2018	52
53	1.0876	1.1022	1.1167	1.1311	1.1455	1.1598	1.1739	1.1880	1.2020	53
54	1.0878	1.1024	1.1169	1.1314	1.1457	1.1600	1.1742	1.1882	1.2022	54
55	1.0881	1.1027	1.1172	1.1316	1.1460	1.1602	1.1744	1.1885	1.2025	55
56	1.0883	1.1029	1.1174	1.1319	1.1462	1.1605	1.1746	1.1887	1.2027	56
57	1.0885	1.1031	1.1177	1.1321	1.1464	1.1607	1.1749	1.1889	1.2029	57
58	1.0888	1.1034	1.1179	1.1323	1.1467	1.1609	1.1751	1.1892	1.2032	58
59	1.0890	1.1036	1.1181	1.1326	1.1469	1.1612	1.1753	1.1894	1.2034	59
60	1.0893	1.1039	1.1184	1.1328	1.1472	1.1614	1.1756	1.1896	1.2036	60

M.	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	M.
0′	1.2036	1.2175	1.2313	1.2450	1.2586	1.2722	1.2856	1.2989	1.3121	0′
1	1.2039	1.2178	1.2316	1.2453	1.2589	1.2724	1.2858	1.2991	1.3123	1
2	1.2041	1.2180	1.2318	1.2455	1.2591	1.2726	1.2860	1.2993	1.3126	2
3	1.2043	1.2182	1.2320	1.2457	1.2593	1.2728	1.2862	1.2996	1.3128	3
4	1.2046	1.2184	1.2322	1.2459	1.2595	1.2731	1.2865	1.2998	1.3130	4
5	1.2048	1.2187	1.2325	1.2462	1.2598	1.2733	1.2867	1.3000	1.3132	5
6	1.2050	1.2189	1.2327	1.2464	1.2600	1.2735	1.2869	1.3002	1.3134	6
7	1.2053	1.2191	1.2329	1.2466	1.2602	1.2737	1.2871	1.3004	1.3137	7
8	1.2055	1.2194	1.2332	1.2468	1.2604	1.2740	1.2874	1.3007	1.3139	8
9	1.2057	1.2196	1.2334	1.2471	1.2607	1.2742	1.2876	1.3009	1.3141	9
10	1.2060	1.2198	1.2336	1.2473	1.2609	1.2744	1.2878	1.3011	1.3143	10
11	1.2062	1.2201	1.2338	1.2475	1.2611	1.2746	1.2880	1.3013	1.3145	11
12	1.2064	1.2203	1.2341	1.2478	1.2614	1.2748	1.2882	1.3015	1.3147	12
13	1.2066	1.2205	1.2343	1.2480	1.2616	1.2751	1.2885	1.3018	1.3150	13
14	1.2069	1.2208	1.2345	1.2482	1.2618	1.2753	1.2887	1.3020	1.3152	14
15	1.2071	1.2210	1.2348	1.2484	1.2620	1.2755	1.2889	1.3022	1.3154	15
16	1.2073	1.2212	1.2350	1.2487	1.2623	1.2757	1.2891	1.3024	1.3156	16
17	1.2076	1.2214	1.2352	1.2489	1.2625	1.2760	1.2894	1.3027	1.3158	17
18	1.2078	1.2217	1.2354	1.2491	1.2627	1.2762	1.2896	1.3029	1.3161	18
19	1.2080	1.2219	1.2357	1.2493	1.2629	1.2764	1.2898	1.3031	1.3163	19
20	1.2083	1.2221	1.2359	1.2496	1.2632	1.2766	1.2900	1.3033	1.3165	20
21	1.2085	1.2224	1.2361	1.2498	1.2634	1.2769	1.2903	1.3035	1.3167	21
22	1.2087	1.2226	1.2364	1.2500	1.2636	1.2771	1.2905	1.3038	1.3169	22
23	1.2090	1.2228	1.2366	1.2503	1.2638	1.2773	1.2907	1.3040	1.3172	23
24	1.2092	1.2231	1.2368	1.2505	1.2641	1.2775	1.2909	1.3042	1.3174	24
25	1.2094	1.2233	1.2370	1.2507	1.2643	1.2778	1.2911	1.3044	1.3176	25
26	1.2097	1.2235	1.2373	1.2509	1.2645	1.2780	1.2914	1.3046	1.3178	26
27	1.2099	1.2237	1.2375	1.2512	1.2648	1.2782	1.2916	1.3049	1.3180	27
28	1.2101	1.2240	1.2377	1.2514	1.2650	1.2784	1.2918	1.3051	1.3183	28
29	1.2104	1.2242	1.2380	1.2516	1.2652	1.2787	1.2920	1.3053	1.3185	29
30	1.2106	1.2244	1.2382	1.2518	1.2654	1.2789	1.2922	1.3055	1.3187	30
31	1.2108	1.2247	1.2384	1.2521	1.2656	1.2791	1.2925	1.3057	1.3189	31
32	1.2111	1.2249	1.2386	1.2523	1.2659	1.2793	1.2927	1.3060	1.3191	32
33	1.2113	1.2251	1.2389	1.2525	1.2661	1.2795	1.2929	1.3062	1.3193	33
34	1.2115	1.2254	1.2391	1.2528	1.2663	1.2798	1.2931	1.3064	1.3196	34
35	1.2117	1.2256	1.2393	1.2530	1.2665	1.2800	1.2934	1.3066	1.3198	35
36	1.2120	1.2258	1.2396	1.2532	1.2668	1.2802	1.2936	1.3068	1.3200	36
37	1.2122	1.2260	1.2398	1.2534	1.2670	1.2804	1.2938	1.3071	1.3202	37
38	1.2124	1.2263	1.2400	1.2537	1.2672	1.2807	1.2940	1.3073	1.3204	38
39	1.2127	1.2265	1.2402	1.2539	1.2674	1.2809	1.2942	1.3075	1.3207	39
40	1.2129	1.2267	1.2405	1.2541	1.2677	1.2811	1.2945	1.3077	1.3209	40
41	1.2131	1.2270	1.2407	1.2543	1.2679	1.2813	1.2947	1.3079	1.3211	41
42	1.2134	1.2272	1.2409	1.2546	1.2681	1.2816	1.2949	1.3082	1.3213	42
43	1.2136	1.2274	1.2412	1.2548	1.2683	1.2818	1.2951	1.3084	1.3215	43
44	1.2138	1.2277	1.2414	1.2550	1.2686	1.2820	1.2954	1.3086	1.3218	44
45	1.2141	1.2279	1.2416	1.2552	1.2688	1.2822	1.2956	1.3088	1.3220	45
46	1.2143	1.2281	1.2418	1.2555	1.2690	1.2825	1.2958	1.3090	1.3222	46
47	1.2145	1.2283	1.2421	1.2557	1.2692	1.2827	1.2960	1.3093	1.3224	47
48	1.2148	1.2286	1.2423	1.2559	1.2695	1.2829	1.2962	1.3095	1.3226	48
49	1.2150	1.2288	1.2425	1.2562	1.2697	1.2831	1.2965	1.3097	1.3228	49
50	1.2152	1.2290	1.2428	1.2564	1.2699	1.2833	1.2967	1.3099	1.3231	50
51	1.2154	1.2293	1.2430	1.2566	1.2701	1.2836	1.2969	1.3101	1.3233	51
52	1.2157	1.2295	1.2432	1.2568	1.2704	1.2838	1.2971	1.3104	1.3235	52
53	1.2159	1.2297	1.2434	1.2571	1.2706	1.2840	1.2973	1.3106	1.3237	53
54	1.2161	1.2299	1.2437	1.2573	1.2708	1.2842	1.2976	1.3108	1.3239	54
55	1.2164	1.2302	1.2439	1.2575	1.2710	1.2845	1.2978	1.3110	1.3242	55
56	1.2166	1.2304	1.2441	1.2577	1.2713	1.2847	1.2980	1.3112	1.3244	56
57	1.2168	1.2306	1.2443	1.2580	1.2715	1.2849	1.2982	1.3115	1.3246	57
58	1.2171	1.2309	1.2446	1.2582	1.2717	1.2851	1.2985	1.3117	1.3248	58
59	1.2173	1.2311	1.2448	1.2584	1.2719	1.2854	1.2987	1.3119	1.3250	59
60	1.2175	1.2313	1.2450	1.2586	1.2722	1.2856	1.2989	1.3121	1.3252	60

M.	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	M.
0′	1.3252	1.3383	1.3512	1.3640	1.3767	1.3893	1.4018	0′
1	1.3255	1.3385	1.3514	1.3642	1.3769	1.3895	1.4020	1
2	1.3257	1.3387	1.3516	1.3644	1.3771	1.3897	1.4022	2
3	1.3259	1.3389	1.3518	1.3646	1.3773	1.3899	1.4024	3
4	1.3261	1.3391	1.3520	1.3648	1.3776	1.3902	1.4026	4
5	1.3263	1.3393	1.3523	1.3651	1.3778	1.3904	1.4029	5
6	1.3265	1.3396	1.3525	1.3653	1.3780	1.3906	1.4031	6
7	1.3268	1.3398	1.3527	1.3655	1.3782	1.3908	1.4033	7
8	1.3270	1.3400	1.3529	1.3657	1.3784	1.3910	1.4035	8
9	1.3272	1.3402	1.3531	1.3659	1.3786	1.3912	1.4037	9
10	1.3274	1.3404	1.3533	1.3661	1.3788	1.3914	1.4039	10
11	1.3276	1.3406	1.3535	1.3663	1.3790	1.3916	1.4041	11
12	1.3279	1.3409	1.3538	1.3665	1.3792	1.3918	1.4043	12
13	1.3281	1.3411	1.3540	1.3668	1.3794	1.3920	1.4045	13
14	1.3283	1.3413	1.3542	1.3670	1.3797	1.3922	1.4047	14
15	1.3285	1.3415	1.3544	1.3672	1.3799	1.3925	1.4049	15
16	1.3287	1.3417	1.3546	1.3674	1.3801	1.3927	1.4051	16
17	1.3289	1.3419	1.3548	1.3676	1.3803	1.3929	1.4053	17
18	1.3292	1.3421	1.3550	1.3678	1.3805	1.3931	1.4055	18
19	1.3294	1.3424	1.3552	1.3680	1.3807	1.3933	1.4058	19
20	1.3296	1.3426	1.3555	1.3682	1.3809	1.3935	1.4060	20
21	1.3298	1.3428	1.3557	1.3685	1.3811	1.3937	1.4062	21
22	1.3300	1.3430	1.3559	1.3687	1.3813	1.3939	1.4064	22
23	1.3302	1.3432	1.3561	1.3689	1.3816	1.3941	1.4066	23
24	1.3305	1.3434	1.3563	1.3691	1.3818	1.3943	1.4068	24
25	1.3307	1.3437	1.3565	1.3693	1.3820	1.3945	1.4070	25
26	1.3309	1.3439	1.3567	1.3695	1.3822	1.3947	1.4072	26
27	1.3311	1.3441	1.3570	1.3697	1.3824	1.3950	1.4074	27
28	1.3313	1.3443	1.3572	1.3699	1.3826	1.3952	1.4076	28
29	1.3315	1.3445	1.3574	1.3702	1.3828	1.3954	1.4078	29
30	1.3318	1.3447	1.3576	1.3704	1.3830	1.3956	1.4080	30
31	1.3320	1.3449	1.3578	1.3706	1.3832	1.3958	1.4082	31
32	1.3322	1.3452	1.3580	1.3708	1.3834	1.3960	1.4084	32
33	1.3324	1.3454	1.3582	1.3710	1.3837	1.3962	1.4086	33
34	1.3326	1.3456	1.3585	1.3712	1.3839	1.3964	1.4089	34
35	1.3328	1.3458	1.3587	1.3714	1.3841	1.3966	1.4091	35
36	1.3331	1.3460	1.3589	1.3716	1.3843	1.3968	1.4093	36
37	1.3333	1.3462	1.3591	1.3718	1.3845	1.3970	1.4095	37
38	1.3335	1.3465	1.3593	1.3721	1.3847	1.3972	1.4097	38
39	1.3337	1.3467	1.3595	1.3723	1.3849	1.3975	1.4099	39
40	1.3339	1.3469	1.3597	1.3725	1.3851	1.3977	1.4101	40
41	1.3341	1.3471	1.3599	1.3727	1.3853	1.3979	1.4103	41
42	1.3344	1.3473	1.3602	1.3729	1.3855	1.3981	1.4105	42
43	1.3346	1.3475	1.3604	1.3731	1.3858	1.3983	1.4107	43
44	1.3348	1.3477	1.3606	1.3733	1.3860	1.3985	1.4109	44
45	1.3350	1.3480	1.3608	1.3735	1.3862	1.3987	1.4111	45
46	1.3352	1.3482	1.3610	1.3738	1.3864	1.3989	1.4113	46
47	1.3354	1.3484	1.3612	1.3740	1.3866	1.3991	1.4115	47
48	1.3357	1.3486	1.3614	1.3742	1.3868	1.3993	1.4117	48
49	1.3359	1.3488	1.3617	1.3744	1.3870	1.3995	1.4119	49
50	1.3361	1.3490	1.3619	1.3746	1.3872	1.3997	1.4122	50
51	1.3363	1.3492	1.3621	1.3748	1.3874	1.3999	1.4124	51
52	1.3365	1.3495	1.3623	1.3750	1.3876	1.4002	1.4126	52
53	1.3367	1.3497	1.3625	1.3752	1.3879	1.4004	1.4128	53
54	1.3370	1.3499	1.3627	1.3754	1.3881	1.4006	1.4130	54
55	1.3372	1.3501	1.3629	1.3757	1.3883	1.4008	1.4132	55
56	1.3374	1.3503	1.3631	1.3759	1.3885	1.4010	1.4134	56
57	1 2376	1.3505	1.3634	1.3761	1.3887	1.4012	1.4136	57
58	1.3378	1.3508	1.3636	1.3763	1.3889	1.4014	1.4138	58
59	1.3380	1.3510	1.3638	1.3765	1.3891	1.4016	1.4140	59
60	1.3383	1.3512	1.3640	1.3767	1.3893	1.4018	1.4142	60

89°	M.
1.4018	0'
1.4020	1
1.4022	2
1.4024	3
1.4026	4
1.4029	5
1.4031	6
1.4033	7
1.4035	8
1.4037	9
1.4039	10
1.4041	11
1.4043	12
1.4045	13
1.4047	14
1.4049	15
1.4051	16
1.4053	17
1.4055	18
1.4058	19
1.4060	20
1.4062	21
1.4064	22
1.4066	23
1.4068	24
1.4070	25
1.4072	26
1.4074	27
1.4076	28
1.4078	29
1.4080	30
1.4082	31
1.4084	32
1.4086	33
1.4089	34
1.4091	35
1.4093	36
1.4095	37
1.4097	38
1.4099	39
1.4101	40
1.4103	41
1.4105	42
1.4107	43
1.4109	44
.4111	45
.4113	46
.4115	47
.4117	48
.4119	49
.4122	50
.4124	51
.4126	52
.4128	53
.4130	54
.4132	55
.4134	56
.4136	57
.4138	58
.4140	59
.4142	60

No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.
1	1.	65	.015384615	129	.007751938	193	.005181347
2	0.5	66	.015151515	130	.007692308	194	.005154639
3	.333333333	67	.014925373	131	.007633588	195	.005128205
4	.25	68	.014705882	132	.007575758	196	.005102041
5	.2	69	.014492754	133	.007518797	197	.005076142
6	.166666667	70	.014285714	134	.007462687	198	.005050505
7	.142857143	71	.014084507	135	.007407407	199	.005025126
8	.125	72	.013888889	136	.007352941	200	.005000000
9	.111111111	73	.013698630	137	.007299270	201	.004975124
10	.1	74	.013513514	138	.007246377	202	.004950495
11	.090909091	75	.013333333	139	.007194245	203	.004926108
12	.083333333	76	.013157895	140	.007142857	204	.004901961
13	.076923077	77	.012987013	141	.007092199	205	.004878049
14	.071428571	78	.012820513	142	.007042254	206	.004854369
15	.066666667	79	.012658228	143	.006993007	207	.004830918
16	.0625	80	.0125	144	.006944444	208	.004807692
17	.058823529	81	.012345679	145	.006896552	209	.004784689
18	.055555556	82	.012195122	146	.006849315	210	.004761905
19	.052631579	83	.012048193	147	.006802721	211	.004739336
20	.05	84	.011904762	148	.006756757	212	.004716981
21	.047619048	85	.011764706	149	.006711409	213	.004694836
22	.045454545	86	.011627907	150	.006666667	214	.004672897
23	.043478261	87	.011494253	151	.006622517	215	.004651163
24	.041666667	88	.011363636	152	.006578947	216	.004629630
25	.04	89	.011235955	153	.006535948	217	.004608295
26	.038461538	90	.011111111	154	.006493506	218	.004587156
27	.037037037	91	.010989011	155	.006451613	219	.004566210
28	.035714286	92	.010869565	156	.006410256	220	.004545455
29	.034482759	93	.010752688	157	.006369427	221	.004524887
30	.033333333	94	.010638298	158	.006329114	222	.004504505
31	.032258065	95	.010526316	159	.006289308	223	.004484305
32	.03125	96	.010416667	160	.00625	224	.004464286
33	.030303030	97	.010309278	161	.006211180	225	.004444444
34	.029411765	98	.010204082	162	.006172840	226	.004424779
35	.028571429	99	.010101010	163	.006134969	227	.004405286
36	.027777778	100	.01	164	.006097561	228	.004385965
37	.027027027	101	.009900990	165	.006060606	229	.004366812
38	.026315789	102	.009803922	166	.006024096	230	.004347826
39	.025641026	103	.009708738	167	.005988024	231	.004329004
40	.025	104	.009615385	168	.005952381	232	.004310345
41	.024390244	105	.009523810	169	.005917160	233	.004291845
42	.023809524	106	.009433962	170	.005882353	234	.004273504
43	.023255814	107	.009345794	171	.005847953	235	.004255319
44	.022727273	108	.009259259	172	.005813953	236	.004237288
45	.022222222	109	.009174312	173	.005780347	237	.004219409
46	.021739130	110	.009090909	174	.005747126	238	.004201681
47	.021276600	111	.009009009	175	.005714286	239	.004184100
48	.020833333	112	.008928571	176	.005681818	240	.004166667
49	.020408163	113	.008849558	177	.005649718	241	.004149378
50	.02	114	.008771930	178	.005617978	242	.004132231
51	.019607843	115	.008695652	179	.005586592	243	.004115226
52	.019230769	116	.008620690	180	.005555556	244	.004098361
53	.018867925	117	.008547009	181	.005524862	245	.004081633
54	.018518519	118	.008474576	182	.005494505	246	.004065041
55	.018181818	119	.008403361	183	.005464481	247	.004048583
56	.017857143	120	.008333333	184	.005434783	248	.004032258
57	.017543860	121	.008264463	185	.005405405	249	.004016064
58	.017241379	122	.008196721	186	.005376344	250	.004
59	.016949153	123	.008130081	187	.005347594	251	.003984064
60	.016666667	124	.008064516	188	.005319149	252	.003968254
61	.016393443	125	.008	189	.005291005	253	.003952569
62	.016129032	126	.007936508	190	.005263158	254	.003937008
63	.015873016	127	.007874016	191	.005235602	255	.003921569
64	.015625	128	.0078125	192	.005208333	256	.003906250

No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.
257	.003891051	321	.003115265	385	.002597403	449	.002227171
258	.003875969	322	.003105590	386	.002590674	450	.002222222
259	.003861004	323	.003095975	387	.002583979	451	.002217295
260	.003846154	324	.003086420	388	.002577320	452	.002212389
261	.003831418	325	.003076923	389	.002570694	453	.002207506
262	.003816794	326	.003067485	390	.002564103	454	.002202643
263	.003802281	327	.003058104	391	.002557545	455	.002197802
264	.003787879	328	.003048780	392	.002551020	456	.002192982
265	.003773585	329	.003039514	393	.002544529	457	.002188184
266	.003759398	330	.003030303	394	.002538071	458	.002183406
267	.003745318	331	.003021148	395	.002531646	459	.002178649
268	.003731343	332	.003012048	396	.002525253	460	.002173913
269	.003717472	333	.003003003	397	.002518892	461	.002169197
270	.003703704	334	.002994012	398	.002512563	462	.002164502
271	.003690037	335	.002985075	399	.002506266	463	.002159827
272	.003676471	336	.002976190	400	.0025	464	.002155172
273	.003663004	337	.002967359	401	.002493766	465	.002150538
274	.003649635	338	.002958580	402	.002487562	466	.002145923
275	.003636364	339	.002949853	403	.002481390	467	.002141328
276	.003623188	340	.002941176	404	.002475248	468	.002136752
277	.003610108	341	.002932551	405	.002469136	469	.002132196
278	.003597122	342	.002923977	406	.002463054	470	.002127660
279	.003584229	343	.002915452	407	.002457002	471	.002123142
280	.003571429	344	.002906977	408	.002450980	472	.002118644
281	.003558719	345	.002898551	409	.002444988	473	.002114165
282	.003546099	346	.002890173	410	.002439024	474	.002109705
283	.003533569	347	.002881844	411	.002433090	475	.002105263
284	.003521127	348	.002873563	412	.002427184	476	.002100840
285	.003508772	349	.002865330	413	.002421308	477	.002096436
286	.003496503	350	.002857143	414	.002415459	478	.002092050
287	.003484321	351	.002849003	415	.002409639	479	.002087683
288	.003472222	352	.002840909	416	.002403846	480	.002083333
289	.003460208	353	.002832861	417	.002398082	481	.002079002
290	.003448276	354	.002824859	418	.002392344	482	.002074689
291	.003436426	355	.002816901	419	.002386635	483	.002070393
292	.003424658	356	.002808989	420	.002380952	484	.002066116
293	.003412969	357	.002801120	421	.002375297	485	.002061856
294	.003401361	358	.002793296	422	.002369668	486	.002057613
295	.003389831	359	.002785515	423	.002364066	487	.002053388
296	.003378378	360	.002777778	424	.002358491	488	.002049180
297	.003367003	361	.002770083	425	.002352941	489	.002044990
298	.003355705	362	.002762431	426	.002347418	490	.002040816
299	.003344482	363	.002754821	427	.002341920	491	.002036660
300	.003333333	364	.002747253	428	.002336449	492	.002032520
301	.003322259	365	.002739726	429	.002331002	493	.002028398
302	.003311258	366	.002732240	430	.002325581	494	.002024291
303	.003300330	367	.002724796	431	.002320186	495	.002020202
304	.003289474	368	.002717391	432	.002314815	496	.002016129
305	.003278689	369	.002710027	433	.002309469	497	.002012072
306	.003267974	370	.002702703	434	.002304147	498	.002008032
307	.003257329	371	.002695418	435	.002298851	499	.002004008
308	.003246753	372	.002688172	436	.002293578	500	.002
309	.003236246	373	.002680965	437	.002288330	501	.001996008
310	.003225806	374	.002673797	438	.002283105	502	.001992032
311	.003215434	375	.002666667	439	.002277904	503	.001988072
312	.003205128	376	.002659574	440	.002272727	504	.001984127
313	.003194888	377	.002652520	441	.002267574	505	.001980198
314	.003184713	378	.002645503	442	.002262443	506	.001976285
315	.003174603	379	.002638522	443	.002257336	507	.001972387
316	.003164557	380	.002631579	444	.002252252	508	.001968504
317	.003154574	381	.002624672	445	.002247191	509	.001964637
318	.003144654	382	.002617801	446	.002242152	510	.001960784
319	.003134796	383	.002610966	447	.002237136	511	.001956947
320	.003125	384	.002604167	448	.002232143	512	.001953125

No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.
513	.001949318	577	.001733102	641	.001560062	705	.001418440
514	.001945525	578	.001730104	642	.001557632	706	.001416431
515	.001941748	579	.001727116	643	.001555210	707	.001414427
516	.001937984	580	.001724138	644	.001552795	708	.001412429
517	.001934236	581	.001721170	645	.001550388	709	.001410437
518	.001930502	582	.001718213	646	.001547988	710	.001408451
519	.001926782	583	.001715266	647	.001545595	711	.001406470
520	.001923077	584	.001712329	648	.001543210	712	.001404494
521	.001919386	585	.001709402	649	.001540832	713	.001402525
522	.001915709	586	.001706485	650	.001538462	714	.001400560
523	.001912046	587	.001703578	651	.001536098	715	.001398601
524	.001908397	588	.001700680	652	.001533742	716	.001396648
525	.001904762	589	.001697793	653	.001531394	717	.001394700
526	.001901141	590	.001694915	654	.001529052	718	.001392758
527	.001897533	591	.001692047	655	.001526718	719	.001390821
528	.001893939	592	.001689189	656	.001524390	720	.001388889
529	.001890359	593	.001686341	657	.001522070	721	.001386963
530	.001886792	594	.001683502	658	.001519757	722	.001385042
531	.001883239	595	.001680672	659	.001517451	723	.001383126
532	.001879699	596	.001677852	660	.001515152	724	.001381215
533	.001876173	597	.001675042	661	.001512859	725	.001379310
534	.001872659	598	.001672241	662	.001510574	726	.001377410
535	.001869159	599	.001669449	663	.001508296	727	.001375516
536	.001865672	600	.001666667	664	.001506024	728	.001373626
537	.001862197	601	.001663894	665	.001503759	729	.001371742
538	.001858736	602	.001661130	666	.001501502	730	.001369863
539	.001855288	603	.001658375	667	.001499250	731	.001367989
540	.001851852	604	.001655629	668	.001497006	732	.001366120
541	.001848429	605	.001652893	669	.001494768	733	.001364256
542	.001845018	606	.001650165	670	.001492537	734	.001362398
543	.001841621	607	.001647446	671	.001490313	735	.001360544
544	.001838235	608	.001644737	672	.001488095	736	.001358696
545	.001834862	609	.001642036	673	.001485884	737	.001356852
546	.001831502	610	.001639344	674	.001483680	738	.001355014
547	.001828154	611	.001636661	675	.001481481	739	.001353180
548	.001824818	612	.001633987	676	.001479290	740	.001351351
549	.001821494	613	.001631321	677	.001477105	741	.001349528
550	.001818182	614	.001628664	678	.001474926	742	.001347709
551	.001814882	615	.001626016	679	.001472754	743	.001345895
552	.001811594	616	.001623377	680	.001470588	744	.001344086
553	.001808318	617	.001620746	681	.001468429	745	.001342282
554	.001805054	618	.001618123	682	.001466276	746	.001340483
555	.001801802	619	.001615509	683	.001464129	747	.001338688
556	.001798561	620	.001612903	684	.001461988	748	.001336898
557	.001795332	621	.001610306	685	.001459854	749	.001335113
558	.001792115	622	.001607717	686	.001457726	750	.001333333
559	.001788909	623	.001605136	687	.001455604	751	.001331558
560	.001785714	624	.001602564	688	.001453488	752	.001329787
561	.001782531	625	.0016	689	.001451379	753	.001328021
562	.001779359	626	.001597444	690	.001449275	754	.001326260
563	.001776199	627	.001594896	691	.001447178	755	.001324503
564	.001773050	628	.001592357	692	.001445087	756	.001322751
565	.001769912	629	.001589825	693	.001443001	757	.001321004
566	.001766784	630	.001587302	694	.001440922	758	.001319261
567	.001763668	631	.001584786	695	.001438849	759	.001317523
568	.001760563	632	.001582278	696	.001436782	760	.001315789
569	.001757469	633	.001579779	697	.001434720	761	.001314060
570	.001754386	634	.001577287	698	.001432665	762	.001312336
571	.001751313	635	.001574803	699	.001430615	763	.001310616
572	.001748252	636	.001572327	700	.001428571	764	.001308901
573	.001745201	637	.001569859	701	.001426534	765	.001307190
574	.001742160	638	.001567398	702	.001424501	766	.001305483
575	.00173913	639	.001564945	703	.001422475	767	.001303781
576	.001736111	640	.0015625	704	.001420455	768	.001302083

No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No.	Réciproque.	No	Réciproque.
769	.001300390	827	.001209190	885	.001129944	943	.001060445
770	.001298701	828	.001207729	886	.001128668	944	.001059322
771	.001297017	829	.001206273	887	.001127396	945	.001058201
772	.001295337	830	.001204819	888	.001126126	946	.001057082
773	.001293661	831	.001203369	889	.001124859	947	.001055966
774	.001291990	832	.001201923	890	.001123596	948	.001054852
775	.001290323	833	.001200480	891	.001122334	949	.001053741
776	.001288660	834	.001199041	892	.001121076	950	.001052632
777	.001287001	835	.001197605	893	.001119821	951	.001051525
778	.001285347	836	.001196172	894	.001118568	952	.001050420
779	.001283697	837	.001194743	895	.001117318	953	.001049318
780	.001282051	838	.001193317	896	.001116071	954	.001048218
781	.001280410	839	.001191895	897	.001114827	955	.001047120
782	.001278772	840	.001190476	898	.001113586	956	.001046025
783	.001277139	841	.001189061	899	.001112347	957	.001044932
784	.001275510	842	.001187648	900	.001111111	958	.001043841
785	.001273885	843	.001186240	901	.001109878	959	.001042753
786	.001272265	844	.001184834	902	.001108647	960	.001041667
787	.001270648	845	.001183432	903	.001107420	961	.001040583
788	.001269036	846	.001182033	904	.001106195	962	.001039501
789	.001267427	847	.001180638	905	.001104972	963	.001038422
790	.001265823	848	.001179245	906	.001103753	964	.001037344
791	.001264223	849	.001177856	907	.001102536	965	.001036269
792	.001262626	850	.001176471	908	.001101322	966	.001035197
793	.001261034	851	.001175088	909	.001100110	967	.001034126
794	.001259446	852	.001173709	910	.001098901	968	.001033058
795	.001257862	853	.001172333	911	.001097695	969	.001031992
796	.001256281	854	.001170960	912	.001096491	970	.001030928
797	.001254705	855	.001169591	913	.001095290	971	.001029866
798	.001253133	856	.001168224	914	.001094092	972	.001028807
799	.001251564	857	.001166861	915	.001092896	973	.001027749
800	.00125	858	.001165501	916	.001091703	974	.001026694
801	.001248439	859	.001164144	917	.001090513	975	.001025641
802	.001246883	860	.001162791	918	.001089325	976	.001024590
803	.001245330	861	.001161440	919	.001088139	977	.001023541
804	.001243781	862	.001160093	920	.001086957	978	.001022495
805	.001242236	863	.001158749	921	.001085776	979	.001021450
806	.001240695	864	.001157407	922	.001084599	980	.001020408
807	.001239157	865	.001156069	923	.001083424	981	.001019368
808	.001237624	866	.001154734	924	.001082251	982	.001018330
809	.001236094	867	.001153403	925	.001081081	983	.001017294
810	.001234568	868	.001152074	926	.001079914	984	.001016260
811	.001233046	869	.001150748	927	.001078749	985	.001015228
812	.001231527	870	.001149425	928	.001077586	986	.001014199
813	.001230012	871	.001148106	929	.001076426	987	.001013171
814	.001228501	872	.001146789	930	.001075269	988	.001012146
815	.001226994	873	.001145475	931	.001074114	989	.001011122
816	.001225490	874	.001144165	932	.001072961	990	.001010101
817	.001223990	875	.001142857	933	.001071811	991	.001009082
818	.001222494	876	.001141553	934	.001070664	992	.001008065
819	.001221001	877	.001140251	935	.001069519	993	.001007049
820	.001219512	878	.001138952	936	.001068376	994	.001006036
821	.001218027	879	.001137656	937	.001067236	995	.001005025
822	.001216545	880	.001136364	938	.001066098	996	.001004016
823	.001215067	881	.001135074	939	.001064963	997	.001003009
824	.001213592	882	.001133787	940	.001063830	998	.001002004
825	.001212121	883	.001132503	941	.001062699	999	.001001001
826	.001210654	884	.001131222	942	.001061571	1000	.001000000

REM. I. On aurait dû dire à l'endroit des "logarithmes" que pour ce qui est du **calcul des caracteristiques negatives :**

1° **L'addition des caracteristiques negatives**, *se fait en prenant leur somme.* Ainsi : $\overline{2}$ ajouté à $\overline{3}$ donne $\overline{5}$; de même $\overline{2}.371654$ ajouté à $\overline{3}.783415$ donne $\overline{4}.155069$, puisque l'unité retenue sur la somme des parties décimales des deux logarithmes, diminue d'autant la somme des caractéristiques négatives, comme on va le voir.

2° **L'addition d'une caracteristique positive avec une negative**, *se fait en prenant leur différence et en donnant à cette différence le signe de la plus grande.* Ainsi : $6+\overline{2}=4$, 5 et $\overline{2}$ donnent 3, $\overline{5}$ et 2 font $\overline{3}$, $2+1=\overline{1}$; de même, la somme de 5.346854 et $\overline{3}.268542$ est 2.615396 ; la somme de 6.387465 et $\overline{2}.924563$ est 5.312028, car l'unité retenue sur la somme des décimales des deux logarithmes, affecte d'autant la somme de leurs exposants ou caractéristiques.

3° **Pour soustraire un exposant negatif:** *changez en le signe de — en + et ajoutez le par les règles précédentes.* Ainsi : $2-\overline{3}=5$; $\overline{5}$ soustrait de $\overline{2}$ donne 5 et $\overline{2}$, c.-à-d. 3 ; $\overline{5}-\overline{3}=3+\overline{5}=\overline{2}$; de même, 3.246854 soustrait de 2.684765 laisse 5.437911 ; mais $\overline{5}.765462$ soustrait de $\overline{2}.346853$ laisse 2.581391, car dans ce cas pour soustraire la première décimale 7 il faut emprunter 1 de $\overline{2}$, ce qui réduit $\overline{2}$ à $\overline{3}$; alors $\overline{3}$ et 5 donnent 2. Si l'on soustrait $\overline{3}.785631$ de $\overline{5}.684325$, le résultat est $\overline{3}$. etc., car $\overline{5}-1=\overline{6}$ et $\overline{3}$ ôté de $\overline{6}$, il reste $\overline{3}$.

4° **Pour multiplier un logarithme avec un exposant negatif :** *multipliez la partie décimale ou fractionnaire par les règles ordinaires, multipliez alors l'exposant négatif, ce qui donnera un produit négatif auquel vous ajouterez (par la règle 2°) les entiers, s'il y en a, que vous aurez retenus sur la partie décimale.* Ainsi : $\overline{2}\times 5=\overline{10}$ et s'il y a à ajouter par exemple 2 de retenue, le résultat est $\overline{8}$; de même, $\overline{2}$,368546 $\times\, 2=\overline{4}.737092$, et $\overline{3}.7856473\times 6=\overline{14}.7138838$.

5° **Pour diviser un logarithme a caracteristique negative :** *si la caractéristique est divisible par le diviseur, écrivez le quotient avec un signe négatif et divisez la partie décimale par les règles ordinaires ; mais si l'exposant négatif n'est pas divisible par le diviseur, ajoutez lui tel nombre négatif qui le rendra divisible, et écrivez en même temps à la gauche de la partie décimale du logarithme un nombre entier et positif égal ; divisez alors séparément l'exposant négatif ainsi augmenté et l'autre partie du logarithme, et le premier quotient pris négativement sera la caractéristique de la partie fractionnaire du quotient.* Ainsi : $\overline{6}$ divisé par $3=\overline{2}$; mais pour diviser $\overline{10}$ par 3, ajoutez $\overline{2}$ pour avoir $\overline{12}$ et

2, le premier nombre $\overline{12} \div 3$ donne $\overline{4}$ et le dernier donne $\frac{2}{3}$; donc le quotient est $\overline{4}$ et $\frac{2}{3}$; de même, $\overline{6}.324684$ divisé par 3, donne $\overline{2}.108228$; mais $\overline{14}.326847 \div 9 = (\overline{18} + 4.326847) \div 9 = \overline{2}.4807608$. En ajoutant $\overline{4}$ et 4 au log. du dernier exemple on n'en altère aucunement la valeur, puisque la somme de $\overline{4}$ et 4 est 0.

REM. II. La table des **cordes** (page 88) offre entre autres usages qu'on peut en faire, le moyen le plus exact de décrire ou de faire un angle d'un nombre donné de degrés et minutes, et même (par une simple règle de proportion) de secondes, etc. Cette table, avec celle des arcs de cercle qui la précède, permet aussi de comparer et de calculer les longueurs respectives des côtés d'un triangle sphérique considéré comme rectiligne ou d'un triangle rectiligne considéré comme sphérique.

REM. III. La table des **Diviseurs et Multiplicateurs Réciproques** est très utile, en ce que à son aide l'on peut de suite remplacer un diviseur par un multiplicateur, ou en d'autres termes, changer une division en une multiplication qui produise le même quotient ou résultat; ou, si l'on veut, une multiplication en une division qui donne le même produit. Soit par exemple à diviser 53739173 par 250, le réciproque du diviseur 250 est le multiplicateur .004, et en effet c'est la même chose de multiplier le nombre donné par .004, ou de le diviser par 250, tandisque le calcul à faire est bien plus simple et plus court dans le premier cas que dans le second, puisqu'il suffit de multiplier par 4 et de retrancher dans le produit trois chiffres pour décimales. Soit encore à diviser par 885 un nombre entier quelconque suivi de décimales, le réciproque de 885 est .001129944 ou .00113 à très près, on multipliera donc par .00113 ou ce qui est la même chose, par 113 pour séparer ensuite autant de décimales qu'il y en a tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur. Si dans le dernier exemple, le diviseur était 8850 ou 88500, etc., il est clair que le multiplicateur réciproque serait alors .000113 ou .0000113 etc., suivant le cas; et si le diviseur était au contraire 88.5, 8.85, .885, .0885, .00885, etc., le multiplicateur correspant deviendrait .0113, .113, 1.13, 11.3 ou 113, etc., suivant le cas. Si le diviseur excède 1000, on le trouvera néanmoins assez souvent ou à très près dans la colonne des réciproques, ainsi pour 1032, l'on prendra 1031992 qui lui est égal à très près et dont le multiplicateur correspondant est 969, c.-à-d. 9.69 puisque le réciproque est 1032 au lieu de .001032. Si le diviseur donné était 1383, son réciproque serait à très près 7.23, un diviseur 13830 donnerait pour multiplicateur .723 à très près, et ainsi de suite.

DE DIVERS CORPS OU SUBSTANCES.

METAUX.	Poids spécifique.	Poids d'un p. c. ang., en liv., av.
Acier.	7.810	488.12
	7.870	491.87
Alliage pour caractère d'imprimerie	10.450	653.12
Antimoine fondu	6.702	368.87
Argent pur fondu	10.474	654.62
Argent battu	10.510	656.87
	11.091	693.19
Arsenic fondu	8.310	519.37
Bismuth fondu	9.822	613.88
Cobalt fondu	7.812	488.25
Cuivre natif	7.600	475.00
	8.500	531.25
Cuivre (rouge) fondu.	7.824	489.00
	9.000	562.50
Cuivre (rouge). Fil de.	8.878	554.87
Cuivre (rouge) laminé.	8.915	557.19
Cuivre jaune (Laiton)	8.395	524.69
Etain fondu	7.291	455.69
Etain. Potier d'	7.471	466.94
Fer en barre	7.600	475.00
	7.788	487.75
Fer fondu	7.207	450.44
Fonte	7.053	448.12
Iridium battu	23.000	1437.50
Mercure (Vif argent)	13.598	849.87
Nickel fondu	7.807	487.94
	8.279	517.44
Or forgé ou battu	19.361	1210.06
Or pur fondu (24 carats)	19.258	1203.62
Or monnayé (22 carats)	17.647	1102.94
Or de bijouterie (20 carats)	15.709	981.81
Or natif	17.000	1062.50
	19.000	1187.50
Platine pur	19.500	1218.75
Platine forgé	20.336	1271.00
Platine. Fil de	21.042	1315.12
Platine laminé	22.069	1379.31
Platine natif	15.600	975.00
	17.200	1075.00
Plomb	11.325	707.81
	11.445	715.31
Potassium	0.722	45.10
	0.865	54.10
Zinc fondu	6.862	428.87
Zinc laminé	7.200	450.00
Sodium	0.865	54.10
	0.972	60.75

TERRES, PIERRES, Etc.	Poids spécifique.	Poids d'un p. c. ang. en liv.
Agate	2.350	
	2.670	
Albâtre	2.640	165.00
	2.880	180.00
Alum.	1.714	
Ambre jaune	1.078	
Ambre gris	0.926	
Améthyste	2.750	
Ardoise	2.672	167.00
	2.752	172.00
Argile	2.000	125.00
	2.160	135.00
Arcanson	1.085	67.81
Asphalte	1.070	66.87
	2.060	128.75
Basalte	2.422	151.40
	2.864	179.00
Bitume	1.104	69.00
Borax	1.714	71.87
Brai. Poix	1.150	125.00
Brique	2.000	117.00
Brique posée au mortier	1.872	125.00
Brique posée au ciment	2.000	166.50
Caillou-tage, Blocaille	2.664	
Carbonate de chaux.	2.380	148.75
Calcaire, Pierre à ch.	3.180	198.75
Chaux vive	1.640	102.50
Corail	2.540	
	2.860	
Craie	2.250	140.60
	2.784	174.00
Cristal de roche	2.580	
	2.888	
Diamant	3.520	
	3.550	
Dolomite	2.800	175.00
Emeraude	2.600	
	2.775	
Emeri	4.000	
Felspar	2.438	152.40
	2.800	175.00
Gypse	1.872	117.00
	2.312	144.50
Granite	2.614	163.40
	2.956	184.75
Gravier	1.920	120.00
Horn-blende	2.700	168.75
	3.830	239.40

SUITE DES **TERRES ET PIERRES.**	Poids spécifique.	Poids d'un p. c. ang. en liv.
Houille, (charbon de terre)	1.250	78.10
	1.370	85.60
Houille, anthracite	1.800	112.50
Jais	1.300	
Marbre	2.650	165.60
	2.858	178.60
Marbre statuaire	2.837	177.31
Mica	2.546	
	2.934	
Nitre	1.900	
Pierre ordinaire	2.520	157.50
Pierre à paver	2.416	151.00
Pierre à moulanges	2.484	155.20
	2.502	156.40
Pierre à razoir	2.876	179.75
Pierre à fusil, Silex	2.580	161.25
	2.664	166.50
Pierre ponce	0.605	
	0.915	
Pierre d'aimant	4.930	
Pierre pourrie (tripoli)	1.980	
Pierre meulière	2.413	158.10
Phosphore	1.714	
Plombagine	1.987	
	2.400	
Porcelaine	2.385	
Porphyre	2.452	153.25
	2.972	185.75
Quartz	2.624	164.00
	3.750	234.37
Rubis	4.283	
Sable	1.520	95.00
Sanguine	2.660	
Sel gemme	2.250	
Schiste	2.600	162.50
Serpentin. Marbre	2.264	141.50
	3.000	187.20
Souffre fondu	1.990	124.37
Souffre natif	2.033	127.12
Terre ordinaire	1.520	95.00
	2.000	125.00
Tourbe	0.600	37.50
	1.329	83.12
Verre	2.640	165.00
	3.330	208.12
DIVERS.		
Beurre	0.940	58.12
Camphre	0.989	
Cire d'abeilles	0.966	60.37

SUITE DES **DIVERS.**	Poids spécifique	Poids d'un p. c. ang. en liv.
Cire	0.897	56.06
Caoutchouc	0.935	
Corne	1.840	
Colle de poisson	1.111	
Drèche	1.200	75.00
Glace	0.950	59.37
Gomme arabique	1.452	
Hommes vivants	0.891	
Indigo	1.009	
Ivoire	1.824	
Livres reliés	0.690	43.10
Neige nouvelle	0.088	5.50
Neige compacte	0.440	27.50
Opium	1.336	
Os de beuf	1.660	
Poids blancs	0.808	50.50
Poudre à tirer, compacte	1.745	
Pour à tirer, non compacte	0.922	57.62
Saindoux	0.947	59.19
Sucre blanc	1.606	
Sucre canne	1.563	
Suif	0.942	58.87
LIQUIDES.		
Alcool absolu	0.792	
Acide sulphurique	1.840	
Acide nitrique	1.271	
	1.584	
Acide citrique	1.034	
Bitume liquide	0.848	
Bière	1.020	
	1.050	
Cidre	1.018	
Eau Glacée	1.001	
Eau distillée à 40° C.	1.000	
Eau distillée à 0° C.	0.999	
Eau de mer	1.028	
Eau de la mer morte	1.225	
Esprit de preuve	0.917	
Essence de citrons	0.852	
Essence de thérébentine	0.870	
Ether sulphurique	0.716	
Goudron	1.015	
Huile de thérébentine	0.792	
Huile d'olive	0.915	
Huile de lin	0.940	
Huile de castor	0.970	
Huile de baleine	0.923	

Pour le poids du pied cube, voyez la table, page 108.

Huile de naphte	0.847	Pour le poids du pied cube, voyez la table, page 108.		Chêne Angl. vert	1.218	76.13
Lait de femme	1.020			Chêne Angl. demi-sec	1.054	65.90
Lait de vache, etc.	1.032			Chêne Angl. sec	0.834	52.13
	1.040			Chêne, const. de navire sec	1.288	80.50
Miel	1.450			Chêne, const. de navire demi-sec	1.074	67.12
Mélasse (treacle)	1.290			Chêne, const. de navire sec	0.818	51.10
Mercure	13.598			Chêne âgé de 60	1.170	73.12
Porter	1.011			Chêne Canadien	0.872	54.50
Urine d'homme	1.011			Chêne Dantzic	0.760	47.50
Sang humain	1.054			Citronnier	0.726	45.37
Vinaigre	1.009			Cocotier	1.040	65.00
	1.034			Coudrier	0.606	37.87
Vin de Bordeaux	0.994			Courbaril vert	1.013	63.30
Vin d'Oporto	0.997			Courbaril demi-sec	0.902	56.40
Vin de Madère	1.038			Courbaril sec	0.774	48.40
Vin de Bourgogne	0.991			Cyprès, Espagnol	0.644	40.25
Air atmosphérique	0.001[illegible]			Ebène, Américain	1.332	83.25
FLUIDES AERIFORMES.				Ebène, Indien	1.210	75.62
				Ebénier. Faux	0.834	52.11
				Epinette	0.476	29.70
Air atmosphér. étant	1.000				0.715	44.68
Gaz acide carbonique	1.520			Erable vert	0.990	61.90
Gaz hydrogène sulphuré	1.191			Erable sec	0.818	51.15
				Erable	0.750	46.87
Gaz oxygène	1.104			Frêne vert	1.038	64.90
Gaz nitrogène	0.969			Frêne sec	0.797	49.80
Vapeur d'eau	0.624			Frêne	0.600	37.50
Gaz hydrogène	0.069				0.845	52.81
				Gaïac. (Lignum vitae)	1.333	83.31
BOIS.				Genièvre	0.556	34.75
				Grenadier	1.354	84.62
Acajou, Honduras	0.560	35.00		Hêtre vert	1.046	65.40
Acajou, Espagnol	1.063	66.44		Hêtre demi-sec	0.906	56.60
	0.852	53.25		Hêtre sec	0.722	45.10
Avelinier	0.600	37.50		Hêtre	0.696	43.50
Aune vert	0.998	62.40			0.852	53.25
Aune demi-sec	0.791	48.80		Houx	0.763	47.70
Aune sec	0.630	39.40		If, Hollandais	0.788	49.25
Brezillet. Bois de Brézil	1.031	64.44		If, Espagnol	0.807	50.44
Buis, Français	0.912	57.00		Jasmin, Espagnol	0.770	48.12
Buis, de Hollande	1.328	83.00		Laurier	0.822	51.37
Buis, sec	1.030	64.37		Lentisque	0.849	53.06
Campèche. Bois de	0.913	57.06		Liège	0.240	15.00
Cèdre, Américain	0.560	35.00		Limonier et Cognassier	0.705	44.06
Cèdre de Palestine	0.596	37.25		Merisier vert	1.046	65.40
Cèdre Indien	1.315	82.19		Merisier demi-sec	0.898	56.60
Cèdre vert	0.812	57.00		Merisier sec	0.722	45.10
Cèdre demi-sec	0.674	42.14		Merisier de 60 ans, sec	0.578	36.13
Cèdre sec	0.470	29.40		Munier, Espagnol	0.897	56.06
Cerisier	0.715	44.68		Néflier	0.944	59.00
Charme vert	1.024	64.00		Noyer Anglais vert	0.941	58.80
Charme demi-sec	0.912	57.00		Noyer Anglais sec	0.749	46.80
Charme sec	0.816	51.00		Noyer Français	0.671	41.94
Châtaignier vert	0.966	60.40		Orme dur vert	1.120	70.00
Châtaignier sec	0.603	37.70		Orme dur sec	0.781	48.80

SUITE DES **BOIS.**		Poids spécifique.	Poids d'un p. c. ang. en liv.
Orme		0.542	33.87
		0.670	41.87
Oranger		0.705	44.06
Olivier		0.927	57.94
Platane	sec	0.640	40.00
		0.736	46.00
Peuplier	vert	0.933	58.30
	sec	0.619	38.70
Peuplier noir	vert	0.974	60.90
	demi-sec	0.674	42.13
	sec	0.464	29.00
Peuplier de Lomb.	sec.	0.384	24.00
Pin blanc du Cana.	sec	0.464	29.00
Pin, blanc		0.490	30.62
		0.512	32.00
Pin, jaune		0.550	34.37
		0.660	41.25
Pin, vert		0.864	54.00
		1.184	74.00
Pin, sec		0.496	31.00
		0.656	41.00
Poirier		0.661	41.31
Pommier		0.793	49.56
Prunier		0.785	49.06
Seringat		1.099	68.74
Saule		0.585	36.56
Sureau		0.677	42.30
Sycomore	vert	1.024	64.00
	demi-sec	0.896	56.00
	sec	0.768	48.00
Tremble	vert	0.874	54.60
	demi-sec	0.653	40.80
	sec	0.546	34.10
Teck		0.744	46.50
		0.860	53.75
Tilleul		0.604	37.75
Vigne		1.327	82.94
BOIS DU CANADA.			
Bois blanc		.435	27.2
Bois dur		.791	49.5
Bouleau		.649	40.5

SUITE DES **BOIS DU CANADA.**	Poids spécifique.	Poids d'un p. c. ang. en liv.
Cèdre rouge	.525	32.8
Cèdre blanc	.357	22.3
Cerisier rouge	.582	36.4
Cerisier à grappes	.615	38.5
Châtaiginer	.460	28.7
Chêne blanc	.687	43.0
	à	
	.718	44.9
Chêne rouge	.566	35.4
Chêne piqué	.622	38.9
Epinette noire	.476	29.7
Epinette rouge	.671	42.0
Erable dur	.815	51.0
Erable tendre	.742	48.9
Erable piqué	.676	42.3
Frêne Franc	.673	42.0
Frêne gras	.489	30.5
Frêne à baleines	.668	41.7
Hêtre rouge	.780	48.8
Merisier blanc	.680	42.5
Merisier rouge	.602	37.6
Noyer dur	.629	39.4
	à	
	.728	45.5
Noyer noir	.572	35.8
	à	
	.598	37.4
Noyer tendre	.423	26.5
Orme dur	.768	48.0
Orme gris	.601	37.5
Orme gras	.408	25.5
Orme tendre	.520	32.5
Peuplier	.324	20.3
Pin blanc	.374	23.4
Pin jaune	.500	31.2
Pin rouge	.402	25.1
Plaine	.586	36.6
Pruche	.345	21.5
Sapin	.401	25.0
Saule noir	.431	27.0
Sycomore	.494	30.9
Tilleul	.337	21.0
Tremble	.448	28.0

REMARQUES.

Il est à peine nécessaire de dire que pour plusieurs corps ou substances dont on donne ici le poids d'un pied cube et la pesanteur spécifique, ces poids ne sont que des moyens plus ou moins approximatifs.

En effet, l'on comprend que pour ce qui est des métaux, ces corps, sous le

laminoir ou le marteau, peuvent se condenser de manière à ajouter notamment à leur poids sous un même volume.

Il en est ainsi d'autres substances, telles que la terre ordinaire, la neige, la farine, le plâtre, etc. dont le poids variera nécessairement en raison du plus ou moins de compression à laquelle on les aura assujetties.

Le poids du grain varie beaucoup en raison de sa qualité.

Les bois affectent aussi des pesanteurs bien différentes, suivant qu'ils sont plus ou moins secs et suivant que les échantillons qui ont servi à déterminer ces poids sont de gros ou de petit calibre. C'est ce qui explique les pesanteurs comparativement petites, des bois du Canada qu'on a établies sur des échantillons secs de 15 ans et n'ayant que 7″ × 6″ × 1″, ceux mêmes qui ont été expédiés à Londres lors de l'exposition de 1851. Il suit de ce que l'on vient de dire que suivant que l'on voudra évaluer le poids d'une menuiserie ou d'une charpenterie, l'on se servira des moindres ou des plus grandes pesanteurs qu'affectent les bois à estimer.

N. B. Comme le grain est d'ordinaire coté au minot, il est utile de savoir au besoin que :

1°. Le minot français du Canada est (à une fraction près) de 2339 pouces cubes ; or 2339 ÷ 1728 (nombre de pouces dans un pied cube) = 1.353587963 ou 1⅓ près ; d'où il suit qu'en multipliant un nombre donné de minots français par 1.35 (etc., suivant l'exactitude voulue) on aura le nombre correspondant de pieds cubes anglais.

2°. De même, le minot anglais du Canada est de 2150.42 pouces cubes ; divisant par 1728, on a 1.24445602 ou 1¼ près ; d'où, on réduira les minots anglais en pieds cubes anglais en les multipliant par 1.24 etc.

3°. L'opération inverse, c.-à-d. la réduction de pieds cubes anglais en minots français, se fera en multipliant par .7387772552 ou par .74 près, puisque 1728 ÷ 2339 = .73 etc.

4°. Et l'on convertira en minots anglais un nombre donné de pieds cubes anglais en multipliant ces derniers par .803563955 ou par .8 près, car 1728 ÷ 2150.42 = .8 etc.

5°. Le gallon à vin est de 231 pouces cubes anglais, ce qui permettra de réduire au besoin un nombre donné de gallons d'un liquide quelconque en pieds cubes, ou vice versa.

Voici encore quelques données qui peuvent faciliter la comparaison et traduction des mesures anglaises et françaises.

Mesures lineaires.

1 p. fr. vaut 1.066 près pieds anglais.
1 p. fr. " 1.615 " chaînons de Gunter.
1 mètre " 3.078 " pieds français
1 mètre " 3.281 " " anglais.
1 mètre " 4.971 " chaînons de Gunter.
1 chaînon Gunter vaut 0.66 pieds anglais.
1 arpent (180 p. fr.) " 191.835 " anglais.

Mesures de superficie.

1 p. c. fr. vaut 1.136 près pieds anglais.
1 p. c. fr. " 2.607¼ " chaînons Gunter.
1 mètre c. " 9.477 " pieds français.
1 mètre c. " 10.764 " " anglais.
1 mètre c. " 24.711 " chaînons Gunter.
1 acre (ang.) vaut 43,560 pieds anglais.

Mesures de superficie.

1 acre (ang.) " 38,351 pieds français.
1 arp. c. (fr.) " 32,400 " français.
1 arp. c. (fr.) " 36,800⅔ " anglais.
1 arp. c. (fr.) " 84,483 " chaînons G.
1 chaînon c. G. " 0.4356 " anglais.

Mesures cubiques ou de capacite.

1 p. c. fr. vaut 1.2105 près pieds anglais.
1 mètre c. " 29.17385 " " français.
1 mètre c. " 35.31505 " " anglais.
1 mètre c. " 1.30796 " " verges.
72 p. c. fr. " 87.15625 pieds cubes anglais une toise de maçonnerie.

anglais, de divers corps ou substances, en liv. av.

METAUX.

	livres.
Acier	490
Argent	657
Cuivre (rouge)	549
Fer fondu	450
Fer battu	480
Laiton (cuivre jaune)	523
Mercure (vif-argent)	850
Or	1200
Platine	1380
Plomb	710
Sodium	61
Zinc	450

PIERRES ET TERRES.

Ardoise	172
Argile (glaise)	125
Asphalte	145
Brique sèche	120 à 130
Brique saturée d'eau	130 à 140
Brique posée au mortier	117
Brique posée au ciment	125
Caillou	167
Chaux vive	103
Craie	140 à 166
Ciment et plâtre en poudre	85
Ciment et plâtre en tuile	120
Dalles à paver	150
Dolomite (calcaire magnésien)	175
Glaise (argile)	125
Granite 163 à 185	166
Gravier	120
Grès	160 à 170
Gypse (sulp. de chaux)	117 à 145
Houille	78 à 86
Houille Anthracite	113
Marbre 166 à 178	170
Pierre ordinaire	157
Pierre réfractaire	187 à 194
Pierre de Montréal	169 à 170
Do. de Deschambault	169 à 170
Do. de la Pointe-au-Tremble	169 à 170
Pierre du Cap-Rouge	167
Pierre noire de Québec	170
Pierre de l'Ange Gardien	160
Pierre du Château-Richer	160
Sable	95
Terre ordinaire	95 à 125
Tourbe	37 à 83
Tuile	135

BOIS.

Acajou, Honduras	35
Acajou, Espagnol	53
Bouleau	40 à 45
Cèdre blanc	26
Chêne	43 à 52
Epinette	30 à 42
Erable	42 à 51
Frêne	35 à 47
Hêtre	43 à 49
Liège	15
Merisier	36 à 45
Noyer noir	37 à 46
Noyer tendre	27 à 35
Orme	35 à 48
Pin	27 à 35

DIVERS.

Arcanson	68
Avoine	24 à 29
Blé	46 à 48
Blé d'Inde	41
Cassonade	53
Café vert	43
Drèche	75
Farine	47
Graine de lin	42
Gruau	46
Glace	59
Livres reliés	43 à 50
Mélasse	80
Neige nouvelle	5 à 6
Neige compacte	27 à 33
Orge	37 à 39
Orge perlé	53
Pois	48 à 53
Poudre à tirer	58
Riz	53
Savon	67 à 72
Sel	67
Sucre d'érable	83
Suif	59
Thé	15 à 21

LIQUIDES.

Alcool	$49\frac{1}{4}$
Bières	63 à 66
Eau	$62\frac{1}{2}$
Eau de mer	$64\frac{1}{4}$
Huiles	53 à 60
Vins	62 à 65

FLUIDES AERIFORMES.

	onces
Air atmosphérique	1.286
Gaz acide carbonique	1.955
Gaz hydrogène	0.088

BE

nces, en liv. av.

...	40 à 45
nc	26
...	43 à 52
...	30 à 42
...	42 à 51
...	35 à 47
...	43 à 49
...	15
...	36 à 45
r	37 à 46
dre	27 à 35
...	35 à 48
...	27 à 35

DIVERS.

...	68
...	24 à 29
...	46 à 48
...	41
...	53
...	43
...	75
...	47
in	42
...	46
...	59
s	43 à 50
...	80
velle	5 à 6
acte	27 à 33
...	37 à 39
...	53
...	48 à 53
rer	58
...	53
...	67 à 72
...	67
ole	83
...	59
...	15 à 21

QUIDES.

...	49½
...	63 à 66
...	62½
...	64½
...	53 à 60
...	62 à 65

**DES AERI-
ORMES.**

	onces
érique	1.286
rbonique	1.955
ne	0.088